HZ BOOKS
华章教育

国外电子与电气工程技术丛书

Pearson

信号、系统及推理

[美] 艾伦 V. 奥本海姆（Alan V. Oppenheim）
麻省理工学院（MIT）
乔治 C. 维基斯（George C. Verghese）
麻省理工学院（MIT）
著

李玉柏 崔琳莉 武畅 译

Signals, Systems and Inference





机械工业出版社
China Machine Press

本书是美国麻省理工学院（MIT）知名教授奥本海姆的最新力作，是其在MIT开展的二十余年的课程建设所涉及知识体系的拓展和延伸，所提出的“推理”是结合先验知识和可用的信号量测来归纳不确定性的存在性，从而领引信号与系统后续课程建设。本书详细阐述了确定性信号与系统的性质和表示形式，包括群延迟和状态空间模型的结构与行为；引入了相关函数和功率谱密度来描述和处理随机信号。

本书涉及的应用实例包括脉冲幅度调制，基于观测器的反馈控制，最小均方误差估计下的最佳线性滤波器，以及匹配滤波；强调了基于模型的推理方法，特别是针对状态估计、信号估计和信号检测的应用。本书融合并扩展了信号与系统时频域分析的基本素材，以及概率论知识，这些都是信号处理、控制、通信、金融工程、生物医学等工程和应用科学领域的基本分析方法。

本书可作为电子信息、通信、自动化类等全部电类专业信号与系统课程的教材，也可以供从事信息获取、转换、传输及处理工作广大科技工作者参考。

作者简介

艾伦 V. 奥本海姆（Alan V. Oppenheim） 美国麻省理工学院（MIT）电气与计算机科学系教授，MIT电子学研究实验室（RLE）首席研究员，美国国家工程院院士，IEEE会士，研究领域为通用领域的信号处理及应用。曾因出色的科研和教学工作多次获奖，包括IEEE教育勋章、IEEE成立百年杰出贡献奖、IEEE在声学、语音和信号处理领域的社会与技术成就奖等。另著有《Signals and Systems，Second Edition》、《Discrete-Time Signal Processing，Third Edition》。





Pearson
www.pearson.com

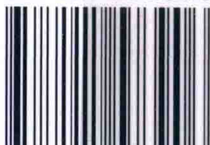
投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991　88361066
购书热线：(010) 68326294　88379649　68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·锡 彬

上架指导：信号与系统

ISBN 978-7-111-57390-6



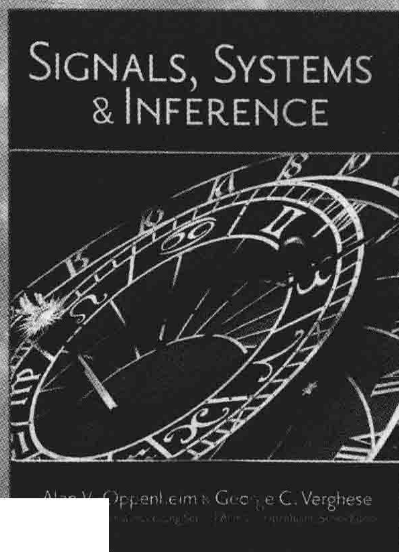
定价：99.00元

国外电子与电气工程技术丛书

信号、系统及推理

[美] 艾伦 V. 奥本海姆（Alan V. Oppenheim） 麻省理工学院（MIT）
乔治 C. 维基斯（George C. Verghese） 麻省理工学院（MIT） 著
李玉柏 崔琳莉 武畅 译

Signals, Systems and Inference




机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

信号、系统及推理 /（美）艾伦 V. 奥本海姆（Alan V. Oppenheim），（美）乔治 C. 维基斯（George C. Verghese）著；李玉柏，崔琳莉，武畅译．—北京：机械工业出版社，2017.7
（国外电子与电气工程技术丛书）
书名原文：Signals, Systems and Inference

ISBN 978-7-111-57390-6

I. 信… II. ①艾… ②乔… ③李… ④崔… ⑤武… III. 信号系统 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 150002 号

本书版权登记号：图字：01-2016-3983

Authorized translation from the English language edition, entitled *Signals, Systems and Inference*, 9780133943283 by Alan V. Oppenheim, George C. Verghese, published by Pearson Education, Inc, Copyright © 2016.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by CHINA MACHINE PRESS/ HUAZHANG CO., Copyright © 2017.

本书中文简体字版由 Pearson Education（培生教育出版集团）授权机械工业出版社在中华人民共和国境内（不包括台湾地区和香港、澳门特别行政区）独家出版发行。未经出版者书面许可，不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售。

本书共有 13 章。第 1 章和第 2 章简要概述了线性时不变系统的假定条件。第 3 章讨论了数字通信中脉冲幅度调制的应用。第 4 ~ 6 章专注于状态空间模型的研究，主要讨论了单输入单输出的 LTI 情况。第 7 ~ 9 章简要概述了假定的概率前提条件，包括对静态随机变量的估计和假设检验。第 10 ~ 13 章讨论了广义平稳随机信号，以及这些信号经 LTI 滤波后的输出信号。第 12 章重点讨论的是线性最小方均误差的信号估计，也就是维纳滤波。第 13 章的重点是匹配滤波相关的最佳方案的信号检测。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码：100037）
责任编辑：张梦玲　王　颖　　责任校对：李秋荣
印　　刷：北京诚信伟业印刷有限公司　　版　　次：2017 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：185mm×260mm　1/16　　印　　张：23.5
书　　号：ISBN 978-7-111-57390-6　　定　　价：99.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：(010) 88378991　88361066　　投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

版权所有・侵权必究
封底无防伪标均为盗版
本书法律顾问：北京大成律师事务所　韩光 / 邹晓东

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Alan V. Oppenheim、Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Peter Wilson、H. Vincent Poor、Hassan K. Khalil、Gene F. Franklin、Rex Miller等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”和“国外工业控制与智能制造丛书”为系列出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科、自动化、人工智能等建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息类、控制类、智能制造类等相关教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www. hzbook. com

电子邮件：hzjsj@hzbook.com

联系电话：(010)88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译者序

当决定翻译 Alan V. Oppenheim 教授等撰写的本书时，内心既很激动，又很忐忑。激动是因为能让国内更多的读者读到这本经典教材，真心兴奋。而忐忑不仅仅是因为本书有如此丰富而且精致的内容，更重要的是，本书所承载的 Alan V. Oppenheim 等知名学者的撰写 DNA，承载的 MIT 课程建设理念，承载的引领学生发现问题的精神，将这些一一呈现出来对于译者来说是一个非常巨大的挑战。

信号与系统的概念和基本原理对于电子类专业的大学生来说是最基础的。也正是 Alan V. Oppenheim 教授在 1989 年出版的经典教材《Signals and Systems》(1997 年推出了第 2 版)构架了信号与系统相关课程的信号表示、系统表征、响应分析的基础知识，以及时域描述和变换域处理的方法体系。

然而，随着现代技术的高速发展，电子技术类专业的大学生需要具有对复杂工程问题中信号、系统的表征和数学描述能力，掌握复杂工程问题中的信号分析和处理方法，因此仅仅学习“信号与系统”这门课程的内容是明显不够的。这就催生了“信号与系统”后续课程的诞生，以及针对信号与系统的知识体系的拓展和延伸。

本书系统地阐述了这种知识体系的拓展和延伸。

首先是概念的延伸，针对响应信号或者观测信号揭示系统内部存在的动态变化，不论是状态空间模型、可达性和可观测性等概念，还是微分方程、反馈控制的过程描述。这种描述的理论基础在于本书引入的一个概念——推理，其定义为“结合先验知识和可用的信号量测来归纳不确定性的存在性”。这里的先验知识可以是应用系统得到信号量测的某种输入输出描述，或者状态空间描述。推理可以是应用系统中参数和响应动态变化的推演、分析，或者是应用系统内部工作模型的推演、控制与改进过程。

其次是确定性分析到概率分析的拓展。获得被干扰、噪声或者其他不确定因素影响的应用领域的基础概念和基础理论，从而构架信号、系统和概率的知识体系组合。之所以说本书内容非常丰富，就是因为本书立足的由基本原理和概念所构架的信号、系统、概率的研究和应用非常丰富，支持的领域非常广泛，有着丰富的历史重要性。

最后是本书引入的观测器概念，可以将不确定的或者不可观测的系统响应与观测信号分开，同时给推理的算法实现赋予了设计系统来处理相应观测信号的新内涵。有基础的读者可能会联想到信号检测与估计理论，这里将信号与系统状态、模态结合起来，将观测器与滤波理论结合起来，无论是在状态估计还是信号检测上，构成的推理具有数学上的基础和普适性的应用。

尽管知识体系的延伸和应用拓展非常多，但本书的内容组织仍然非常精致。正如 Alan V. Oppenheim 教授在致谢中所说的，本教材的内容源于在 MIT 开展的二十余年课程的教学经验，以及不断丰富和完善的课程讲义，直到 2015 年才决定正式出版。在这个过程中不断有内容被选入，或者被移除，因为作者总是把那些能独立于各种各样繁杂应用的、基于数学和算法以及计算基础的知识组织起来。

正因为本书的内容组织精致，读者可能体会不到像 Alan V. Oppenheim 教授另外两本经典教材《Signals and Systems》和《Discrete-Time Signal Processing》里的那些事无巨细的说明与推导。虽然少了谆谆教导的风格，但本书还是保持了 Alan V. Oppenheim 教授的撰写 DNA：总会将离散和连续系统的分析一并呈现与处理，并讨论连续的离散实现；总是注重微分方程、差分方程以及状态空间的描述，并展示它们在通信、控制、网络、生物医

学和经济等领域中的应用；总是给出丰富的、从概念和应用中抽象出的习题，包括知识点的推导和深入理解的基础习题、高级习题，以及知识内容的扩展、更高级别的扩展习题。

感谢机械工业出版社华章公司引进这本重要的图书，感谢华章公司的王颖副总编委托我们翻译本书。本书第1～6章由武畅翻译，第7～9章以及开场白、前言、索引由崔琳莉翻译，第10～13章由李玉柏翻译，全书由李玉柏统稿。

记得2011年在西安的TI全球核心大学计划国际研讨会上，有幸和Alan V. Oppenheim就信号分析与处理类课程建设进行面对面交流，对Oppenheim奉行的“在大学，我们致力于发现解决方案中的问题；在产业界，我们致力于为问题找到解决方案”的理念印象深刻。因此我们希望每一位读者在信号处理、控制、通信、金融工程、生物医学、物理或其他领域中，能够运用本书的知识、理论和方法去发现问题，同时也希望读者能发现我们翻译的不足和理解上的偏差。恳请广大读者的批评指正，电子邮箱ybli@uestc.edu.cn。

电子科技大学　李玉柏
2017年4月19日于成都

前言

本书基于大学本科课程内容并有适当的延伸和拓展，目前我们在 MIT 电气工程系和计算机科学系都开设了相应的课程。选课的学生大多是不同工程学科分支的大三和大四学生，也有应用科学专业的本科生和研究生。学习这门课程一般要求学生修过两门先修课程：一门是关于信号与系统时域和频域分析方法的导论课程；另一门是关于概率的导论课程。大多数工程专业的学生都在学位课程的早期阶段完成了这两门课程的学习。“信号与系统”课程总是与微分方程相关，也涉及一些基本的线性代数知识。

在许多工程院系，对应用数学特别感兴趣的学生往往会选修一门控制、信号处理或者通信等更专业的本科生课程。除了专业性以外，这类课程通常研究的是确定性信号与系统。而我们的目标是融合信号、系统和概率的相关知识，构建更深入的基础知识体系，以引起更多学生的兴趣。因此对于工程院系和应用科学系来说，本书既可以是本科生的基础教材，也可以是更高阶本科课程的理论基础，甚至作为研究生课程的导论部分。

选择本书作为教材的课程中，关于信号与系统的描述对学生来说通常是新的，比如，通过相关函数和功率谱密度来描述的随机信号及其特征。课程中会介绍一些新的信号与系统特性，如状态空间模型、可达性和可观测性、最佳滤波器和群延迟。同时该课程还强调了基于模型的推理方法，特别是状态估计、信号估计和信号检测部分。

尽管现有的各种教材也涉及了该课程的部分内容，但我们始终没有找到一本覆盖所有想要讨论内容的教材。于是首先有了相关讲义，这也是比较容易实现的部分，然后最终形成了本书。在这个过程中，我们不断地尝试改进和完善课程内容，并调整它们之间的相互顺序。期间，我们也不时将某部分内容包括进来或者删除。多次尝试得出的结论是，我们甚至无法在一个学期的课程中讲授完信息论的基本概念，尽管这些概念对通信系统和推理(更一般情况下)来说非常重要。

正如本书开场白所述，信号、系统和概率一直并将继续是非常有用的知识体系组合，可用于研究信号处理、控制、通信、金融工程、生物医学，以及许多其他涉及连续时间或离散时间并且被干扰、噪声或不确定因素影响的动态变化过程领域。这也是构建全书结构和内容的基础与前提。

本书由 4 个部分组成。第 1 章和第 2 章简要概述了线性时不变（Linear Time Invariant，LTI)系统的假定条件，部分素材内容可能并不常见。这两章的关键目的是为后续章节建立起统一的标记符号和概念。第 3 章讨论了数字通信中脉冲幅度调制的应用。

第 4～6 章专注于状态空间模型的研究，主要讨论了单输入单输出的 LTI 情况。其内容很大程度上围绕这些系统的特征模式展开，并简单假设在不同的固有频率下。本书的这部分内容为 LTI 系统的状态观测器引入了基于模型的推理概念，也讨论了相关的反馈控制方案。

第 7～9 章简要概述了假定的概率前提条件，包括对静态随机变量的估计和假设检验。正如第 1 章和第 2 章一样，我们认为在回顾学生可能在早期概率课程中学过的知识的同时，建立本书独有的概率相关符号和概念非常重要。此外，这部分的部分内容，特别是假设检验，可能对一些学生来说比较陌生。

第 10～13 章讨论了广义平稳随机信号，以及这些信号经 LTI 滤波后的输出信号。相关函数和功率谱密度的特征和解释可以用来研究典型的信号估计和信号检测问题。第 12 章重点讨论的是线性最小均方误差的信号估计，也就是维纳滤波。第 13 章的重点是匹配

滤波相关的最佳方案的信号检测。

正如经常所说的，课程的目的是引导学生发现问题而不是解决掉所有问题。本着这种精神，每章的最后一节都给出了延伸阅读。在这些简短的小节中，我们不是一一罗列参考文献，而是对参考素材蕴含的丰富学习资源给出建议。我们给出的文献全部都是书籍而不是论文，而且每次引用都仅限于该书对应的部分。

每一章都包含大量的习题，分为基础习题、高级习题和扩展习题。基础习题对大多数学生来说比较容易；高级习题可能要求高些；扩展习题常常会涉及一些超出本章内容的问题。某些习题需要仿真或者采用合适的计算包来进行计算。鉴于这些计算包的多样性和普遍性，我们并没有围绕任何特定平台来构建计算习题。

本书的内容远多于一学期的课程所能教授的，所以教师或者自学者可以根据需要进行选择。这么多年，我们尝试过不同的选择。如果是更偏向于通信或者信号处理专业的课程，第4～6章(状态空间模型)可以略去，或者只做简单介绍。如果是更偏向于控制专业的课程，第3章、第9章和第13章可以考虑选修。

前面给出了两种选讲方案，接下来详细概述我们目前采用的课程安排。该课程每周两次大课，大约需要13周。大课与相同数量的小班讨论课交织进行，其中小班讨论课对大课中的特定问题进行更多交互式的讨论，并且解答每周的作业。除此之外，我们也会选择性指导小班讨论课。最后还组织了晚上“公共休息室”，每周多次允许学生聚集在教室里相互讨论；当他们做作业的时候，还会有一位教师在现场指导。

在教学过程中，我们总是强调习题更像是对概念和知识体系进行学习与汇总的过程，而不是一次测验。我们希望学生本着这种精神对待课后习题。特别是，我们鼓励学生积极合作，分享见解和方法。我们对习题的划分主要是根据学生的反馈。课程安排一般会有一次期中测验和一次期末考试，章后习题会被优先用作测验或考试题目。如果需要的话，课堂上的很多素材也可以提炼成课程设计。

导论课的作用就像开场白在本书中的地位一样。因此，导论课的重点是关注学生可能并不熟悉的预备知识或科目，让学生自己复习余下的部分，这可以通过适当的作业题加以引导。然后就可以直接进入第4～6章的状态空间部分。即使学生之前接触过一些状态空间模型，这里也必定有他们第一次接触的东西，尽管他们通常能够很容易联想到对应的素材。我们不要求学生掌握详细的证明推导过程，如LTI观测器或者状态反馈的特征值的位置，而是期望他们能够理解相关的结论，并知道如何运用到实例中。关于状态空间观测器框架的一个重要知识点就是系统模型在从测量信号到系统推理中起到的作用。

然后我们的课程转向概率模型和随机信号。第7章对概率的回顾主要引出了第8章讨论的最小均方误差(Minimum Mean Square Error，MMSE)和线性MMSE(Linear MMSE，LMMSE)估计。为了更快地开始随机信号的分析，而不是长时间回顾概率的预备知识，我们将第9章中假设检验的学习推迟到了课程末，把它作为第13章中信号检测的引子。这样做的部分依据是第9章和第13章都是关于离散随机量的推理，即假设；而第8章和第12章是关于连续随机变量推理的(L)MMSE估计。因此从第8章直接进入第10章学习随机信号，也就是随机过程，重点讨论广义平稳(Wide-Sense Stationary，WSS)过程的时域分析，以及对这些过程的LTI滤波。

第11章讨论的主题可与第1章的信号变换和能量谱密度联系起来，同时也建立起与第2章的全通滤波器和谱因式分解的关系。这些内容对于第12章中WSS过程的LMMSE(或维纳)滤波也是非常重要的。在大部分课程讲授中，我们省略了因果维纳滤波器的详尽推导，而只是讨论基于一个过程的过去值来预测该过程的将来值的情况。

强烈建议课程的最后一部分回归到第3章，用基于脉冲幅度调制的数字通信来进一步分析假设检验问题。回归到第3章的过程也会涉及第2章关于信道失真和群延迟的知

识。然后再在第 9 章讨论假设检验范例。这也是学习最后一章（即第 13 章）中信号检测的基础。

本书的广泛性，以及完成该书项目所涉及的不同背景，意味着我们有许多参考学习其他课程的地方。就如同向书中引用的参考文献学习一样，我们也向参与了很多课程建设工作的学生、助教和教职工同事学习。如果本书能够引导或者帮助有相似发现之旅的读者，能够对他们在构建自己的信号、系统和推理的分析主题上有所帮助，那么本书也就充分达到了预期目的。

关于封面[一]

在设计原书封面的过程中，我们幸运地和 Krista Van Guilder 近距离合作。Krista Van Guilder 是一位很有天赋的艺术家，也是 MIT 电子研究实验室(RLE)媒体与设计的经理。封面设计源于我们期望以一种赏心悦目、耳目一新的方式展示出本书的主题。我们对封面的设计从选择图像开始，包括日晷、时钟和星盘。星盘(www.astrolabes.org)发明于两千多年前，盛行于17世纪，是许多天文计算的重要仪器，比如根据天体的活动范围和位置确定时间。受这些图像的启发，Krista 通过自己的研究拍摄了这张漂亮的天文钟照片，这个天文钟自1410年起就在布拉格(Prague)的老城广场上记录时间。时间(离散的和连续的)当然也是本书的中心。这个表面标记着星盘的天文钟，即 Prague Orloj，显示了太阳和月亮的位置，连同其他许多天文符号一起，被选为封面的主图像。

拍摄 Prague Orloj 的照片有很多，而封面上的这张特别吸引我们。这张照片由 Matteo Foiadelli 拍摄于2009年，他是意大利贝加莫一位热爱摄影的计算机工程师。那时他与朋友到布拉格度假，带了一台新的数码单反相机。正如他向我们解释的："我只是想拍一张与通常正面照不一样的天文钟照片。于是我试着接近一点并从侧面拍摄。"我们非常幸运地发现了这张照片，也很感激他同意将这张照片用作本书的封面。

装饰封底的图像[二]由一个与众不同的相机——1990年部署在轨道上的哈勃望远镜拍摄。这幅拍摄于2001年的图像，与天文钟形成显著对比，捕捉的是十亿年前银河系留下的光子迹象。如哈勃官方网站(www.hubblesite.org)描述的：

> ESO 77-14 的这幅哈勃图像是一幅关于天际舞蹈的绝妙快照，灵感来自于一对大小相似的银河星系。星系间的引力争夺一方面形成连接它们的星际桥梁带，另一方面也造成星体间的断裂带。这个相互作用产生了印第安座和印度的星座，距离地球差不多5.5亿光年。两个星系中心间的尘埃带展示了最初的平圆盘(拉伸成了三维立体状)变形的程度。

从哈勃望远镜投射到精确轨道位置，以及随后的数据记录、检索和处理，到生成这样令人惊叹的图像，反映了自罗盘淡出使用4个世纪以来，人类获得的信号、系统及推理知识的重要性。然而，这幅图像也唤起了人们无尽的遐想空间。

[一] 此处介绍的是英文原书的封面，仅供参考。——编辑注

[二] 感兴趣的读者可以从网上查看英文原书的封底配图，本中文版未体现。——编辑注

致 谢

本书的内容来自于二十多年前我们在 MIT 所规划、设计和教授的一门课程。经过不断的尝试以及对内容素材的完善和改进，才有了当前的这个版本。这门课程是电气工程和计算科学系(EECS)五年制工程硕士学位课程的一部分。我们非常感激 Paul Penfield(时任系主任)、Jeffrey Shapiro(系副主任)和 William Siebert 对构建课程结构所提供的大力帮助。Jeffrey Shapiro 还和我们一起参与了最初课程内容的制定。我们同样感谢后续的部门主管——John Guttag、Rafael Reif、Eric Grimson、Anantha Chandrakasan，感谢他们在课程修订和管理方面给予的帮助。从更广泛的意义上讲，我们的学术生涯能够在这样高水平的学院和充满活力的部门度过，我们觉得非常幸运。MIT 通过科研促进教学的文化传统，以及对卓越教学的认同和追求，对我们都有重大影响。

和我们系里其他课程的教职员工一样，这门课程的教职员工既包括每周上两次大课的主讲教师(他们全权负责课程)，也包括小班指导教师和助教(他们定期与小组学生当面讨论)。这么多年来很多系里的同事都与我们一起承担过该课程的教学任务，或作为小班指导教师，或作为课程主讲教师。许多学生也曾是出色的、热心的助教。趁此机会，我们想感谢所有为开展这门课程做出各种贡献的人，以及体验过这门课程或内容的学生。

除了我们单独以及联合多次讲授或指导这门课程外，其他参与这门课程教学任务的同事有：Bernard Lesieutre、Charles Rohrs、Jeffrey Shapiro、Gregory Wornell 和 John Wyatt。在这个过程中，他们不仅为课程内容和课程讲义提供了有价值的反馈，还给出了新的见解，编写了新的测试和课后习题。

多年来，担任过小班课指导教师的不仅有才华横溢的教职员工，还有高年级的研究生，我们非常幸运地和他们一起工作。指导过小班课的有：Jinane Abounadi、Elfar Adalsteinsson、Babak Ayazifar、Duane Boning、Petros Boufounos、John Buck、Mujdat Cetin、Jorge Goncalves、Julie Greenberg、Christoforos Hadjicostis、Peter Hagelstein、Thomas Heldt、Steven Isabelle、Franz Kaertner、James Kirtley、Amos Lapidoth、Bernard Lesieutre、Steve Massaquoi、Shay Maymon、Alexandre Megretski、Jose Moura、Asuman Ozdaglar、Michael Perrott、Rajeev Ram、Charles Rohrs、Melanie Rudoy、Jeffrey Shapiro、Ali Shoeb、William Siebert、Vladimir Stojanovic、Collin Stultz、Russell Tredrake、Mitchell Trott、Thomas Weiss、Alan Willsky、Gregory Wornell、John Wyatt、Laura Zager 和 Lizhong Zheng。这些人为学生提供了丰富的学习体验，对课程内容和本书做出了很多贡献。

这段时期内，我们和班上的学生也受益于优秀的助教对该课程的奉献。这些助教是：Irina Abainov、Abubakar Abid、Anthony Accardi、Chalee Asavathiratham、Thomas Baran、Leighton Barnes、Soosan Beheshti、Ballard Blair、Petros Boufounos、Venkat Chandrasekaran、Jon Chu、Aaron Cohen、Roshni Cooper、Ujjaval Desai、Vijay Divi、Shihab Elborai、Baris Krkmen、Siddhartan Govindasamy、Hanhong Gao、James Geraci、Michael Girone、Carlos Gomez-Uribe、Christoforos Hadjicostis、Andrew Halberstadt、Nicholas Hardy、Everest Huang、Irena Hwang、Zahi Karam、Asif Khan、Alaa Kharbouch、Ashish Khisti、Lohith Kini、Alison Laferriere、Ryan Lang、Danial Lashkari、Adrian Lee、Karen Lee、Durodami Lisk、Karen Livescu、Lorenzo Lorilla、Zhipeng Li、Peter Mayer、Rebecca Mieloszyk、Jose Oscar Mur Miranda、Kirimania

Murithi、Akshay Naheta、Kenny Ng、Tri Ngo、Paul Njoroge、Ehimwenma Nosakhare、Uzoma Orji、Tushar Parlikar、Pedro Pinto、Victor Preciado、Andrew Russell、Navid Sabbaghi、Maya Said、Peter Sallaway、Sridevi Sarma、Matthew Secor、Mariam Shanechi、Xiaomeng Shi、Andrew Singer、Lakshminarayan Srinivasan、Brian Stube、Eduardo Sverdlin-Lisker、Kazutaka Takahashi、Afsin Ustundag、Kathleen Wage、Tianyu Wang、Keyuan Xu、HoKei Yee 和 Laura Zager。他们的贡献以各种方式贯穿于本书。

在教授该课程的多年中，同事 Frederick Hennie 一直引领着我们。Agnes Chow 对 EECS 系的行政管理战略和财政方案保证了我们和其他同事能够专注于教学。Lisa Bella 作为系教育主任助手，以令人难以置信的响应能力和耐心，几乎独自完成了每个学期全系百余教授和百余助教的行政方面的工作。我们还要感谢多次授课过程中的行政助理，他们是：Alecia Batson、Margaret Beucler、Dimonika Bray、Susan Davco、Angela Glass、Vivian Mizuno、Sally Santiage、Darla Secor、Eric Strattman 和 Diane Wheeler。

随着该课程在这二十年间的不断发展，伴随课程的讲义也在不断地完善和改进。而这个讲义又最终促使了本书的诞生。学生可以说是这个过程中的主要参与者，体现在问题、要求、挑战、建议、批评和鼓励方面。与 MIT 这些有天赋的、勤奋的、有思想的以及能自由发表意见的学生一起合作，也一直是我们的荣幸。

有时候我们也感叹，当前的版本其实是本书的第 4 版，而前面 3 个版本都没有正式出版过。然而，据任何教材作者所知，所有的教材从最初看上去还不错的课程讲义到最后润色出版，是一项非常艰巨的任务。我们要特别感谢 Leighton Barnes 和 Ballard Blair 所付出的努力，同时还有 Manishika Agaskar、Ganesh Ajjanagadde、Michael Mekonnen 和 Guolong Su。非常感谢 Laura von Bosau 愉快、高效和敏锐地将所有的内容片段拼接成一本书。

我们的系领导坚定地鼓励我们把课程讲义出版成书，而不仅仅是让讲义作为教辅资料存在，因此内容素材变得更加广泛和相对独立。近些年来 Anantha Chandrakasan 的激励更是促成本书的一个关键催化剂。同样一些出版商的热情也非常重要，非常感谢他们。Tom Robbins 早在该课程的前十年期间就看到了潜在的机会，并定期提供有用的建议，那时他就职于 Prentice Hall。Phil Meyler 也在稍后的一个阶段慷慨地提供了详细的反馈。出于对 Pearson 副总裁兼编辑主任 Marcia Horton 以及执行编辑 Andrew Gilfillan 的远见和诚意的尊重，我们选择了这家出版商。他们的耐心、决心和信心对我们意味着很多。特别感谢 Pearson 强大又随和的编辑和制作人员，尤其是高级主编 Scott Disanno、Jouve 的高级项目经理 Pavithra Jayapaul。

正如在关于封面中所说的，非常高兴有机会和 Krista Van Guilder 近距离合作。RLE 也是我们的研究基地，一个为研究者提供创造性环境的地方，也影响着我们的教学，包括本书的编写。Yoel Fink 和 Jeffrey Shapiro 直率的领导，以及 RLE 总部典型的竞争和友好氛围，奠定了 RLE 的基调。

要做好一本精装书，自然要能经受住一路上的各种挑战。其中一个不算最小的挑战是，我们需要就不定期产生的不同意见、直觉、方法和风格达成一致，有时针对的是许多小问题，有时针对的也可能是重大问题。我们像朋友一样开始，相互尊重，这样的关系在解决这些问题上很有帮助。同时，紧密合作、合著出书的经历，也加深了我们彼此之间的尊重和友谊。

在接下来的部分，我们想单独表达一些想法和致谢。

Alan V. Oppenheim

字面理解也好比喻也好，我对本书贡献的大部分 DNA 来自于我的母亲，她对我来说

是一个非凡的导师和榜样。直到现在我仍然惊讶于她的奋斗经历。她的父母从东欧经由埃利斯岛来到美国，作为一个贫穷移民家庭的十个孩子之一的她，设法上了大学，接着在20世纪20年代末进入了医学院。然后，作为一个单亲母亲，她在公共卫生领域全职工作的同时非常成功地养育大了三个孩子。

我进入MIT，多少有点意外，1955年作为一名新生入学，而就在不久之前刚给家里写了封信说可能会在第一学年末去个更有意思的地方。显然，在MIT变得对我来说有趣和令人满意之前的长时间里，这里已经是一个奇妙美好的地方，而我也在这里度过了我的整个学术生涯，一开始是作为一名学生，之后是作为一名教职员工。

我一生中最幸运的一天，是我走进了那时还年轻的一位助理教授Amar Bose的办公室，随后成为他的第一位助教。他最终也成为我的博士论文指导老师。几十年来我从他那里学到的关于教学、科研以及生活的经验对我的影响很大且难以描述。他为自己所做的每件事都设立了最高的标准，他作为教师、投资人和企业家取得的成就就是一个传奇。Tom Stockham是在我攻读博士期间遇到的另一位年轻的助理教授。他对我的观点的激励和肯定给了我追求目标的勇气。他在MIT当教职员工和接着在MIT的林肯实验室当研究人员的这段时间内，是数字信号处理未知领域的先驱者之一。经过那段时期以及后来他在犹他大学的研究工作，Tom成为广为人知的数字音频之父。Tom是一位卓越的教师、研究者、实践工程师和朋友。我第一次遇见Bernard(Ben) Gold是我刚成为MIT教职员工不久，而那时他是EECS的一名访问学者。他在语音压缩方面的研究给数字信号处理领域带来了许多开创性的贡献。Ben的智慧、创造力和谦逊的风格总是激励着我。他总是热切地向他身边的人学习，即使这些人是来请教他的。Amar、Tom和Ben教会了我许多事情，包括每一个追求中激情和非凡标准的重要性。他们对我的影响融入了我的生活、职业和这本书中。我想念他们，他们的精神深深地影响着我。

所有的作者都知道，编写教材是一个漫长的、艰难的但又最终回报丰厚的过程。在我的职业生涯中，我有机会编写过一些书，其中部分书有过两个或三个版本。在那些过程中，我很幸运能够同其他非常优秀的合著者合作，除了George Verghese，还有Ron Schfer和Alan Willsky。这样重要的合作项目常常会拉近彼此的关系，而且我还要很高兴地说，所有的这些过程都伴随着强大的凝聚力和伟大的友谊。

我经常被问到是否热爱写作。我的回答通常是："写作是艰巨的任务，甚至有时会让人感到痛苦，但是我享受写完的感觉。"完成这项工程不可避免地需要家人和亲密朋友的宽容、耐心、支持与理解，我极其幸运地在我的职业生涯中拥有这些，它们来自我的妻子Phyllis以及我们的孩子Justine和Jason，他们总是我无尽快乐的源泉。同时我不胜感激Nora Moran，感谢她在我写作本书期间给予的特别关怀和鼓励(和鸡汤)。

George C. Verghese

我的父母George Sr. 和Mary，分别是在印度喀拉拉邦距离仅有15英里(1英里=1609.344米)的两个小城镇长大的，但是他们却是在2500英里之外的埃塞俄比亚的亚的斯亚贝巴第一次相遇，在20世纪50年代早期，年轻、自信并富有冒险精神的他们到那里旅游，他们也都是教师。后来在更远的两个大洲，他们继续为我做出了优雅生活的榜样。我要感谢他们给予的一切，包括他们带给我的兄弟。

从小在家里啃着书籍长大，这必定与我能够进入马德拉斯的印度理工学院学习有很大的关系。那里有我最喜欢的教授V. G. K. Murti(教授网络理论课程)和K. Radhakrishna Rao(教授电路课程)。他们尊重学生，更是通过他们清晰、完整的思维和教学，以及平易近人的态度，赢得了学生对他们的无数尊重。他们可能也让我觉得成为教授是一个很有魅力的职业。

在纽约州立大学石溪分校，很幸运，Chi-Tsong Chen介绍我去学习线性系统理论，我

现在仍然记得当时上第一堂课的激动心情，这门课是由所用教材的作者讲授的，非常优雅。几个月以后，我开车横跨全美国到斯坦福大学跟随 Thomas Kailath 工作，这之后的时期是我的人生转变期。那是一段非常美好的时光，尤其是在 Thomas Kailath 完成他的“线性系统”书稿的时候向他学习，同时还可以和他的学生们互动交流。40 年前他毫无疑问只是我的博士论文导师，然而 15 年后他已经成为我家庭的一部分。我继续在其他方面向他学习，仍然敬畏于他的敏锐、渊博、活力和宽宏大量。

当我加入 MIT 时，我想用两年的时间来看我是否会喜欢它。然而，我已经在这里待了 35 年多了。非常幸运能够在如此卓越的研究团队中工作，以及与造就这样团队的学生和教职员工一起共事。与 Alan Oppenheim 一起工作更是一大亮点。

我的朋友和大家庭帮助我专心于书稿写作工作，我非常感激他们。如果下次他们问我的时候，听到我不再是写作上一次提到的书，毫无疑问他们会大大地松一口气。在完成这本书过程中，我亲爱的妻子 Ann 给予我非常大的耐心和理解，这远远超过我的预期。不过一旦触碰到她的底限，她就拖着我去休假，而我总是发现我比她更需要这样的放松。没有她的宽容，我是无法顺利完成这项任务的。我们的女儿 Deia 和 Amaya 已经开始了自己设计的人生，她们是我最大的幸福。

开场白

信号、系统及推理

就本书所指的概念而言，至少人类从记录和分析数值数据开始就对信号感兴趣了，比如，跟踪气候、贸易、人口、疾病和天体运动。我们一直沉浸在信号之中，通过感官感受它们，通过仪器测量它们以及分析、改变和关联它们。

系统和信号是紧密联系在一起的。在许多情况下，理解那些产生令人感兴趣的信号的系统的行为是很重要的。而且，收集、解释、建模、变换和利用信号所带来的挑战，促使我们设计和实现系统，并产生新的信号来控制和操纵系统。

本书用到的推理，指的是结合先验知识和可用的信号量测值来归纳不确定性的存在性。先验知识可能是量测信号的部分指定模型。推理可能与这种模型的结构和改进有关系。推理算法的实现也需要设计系统来处理这些量测的信号。

涉及信号、系统及推理的概念和方法的应用，在自然科学、工程、医学和社会科学领域无处不在。然而，数学、算法和计算基础往往会演变成在很大程度上独立于特定的应用程序。这些常见的基础知识也是本书关注的重点。

一小段历史

星盘[1]可以视为信号、系统及推理在几个世纪前的一个复杂实例，它是中世纪最受欢迎的天文仪器，除了用来绘制天体位置之外，还可以导航和记录时间。大概在公元150年，Alexandria的Ptolemy就详细描述了球面投影，这也是形成星盘术的基础；由Phodes的Hipparchus提出的三角框架甚至发展得更早，大概是公元前180年。而仪器本身大概是在公元400年出现的，广泛使用则是在17世纪前十年。正如在关于封面中提到的，表面镶刻星盘的Prague Orloj建造于1410年。

信号、系统及推理的相互影响也在Carl Friedrich Gauss关于谷神星(Ceres)位置的著名预言中很好地诠释过[2]，几乎在整整一年后这颗小行星又再次消失。现在都知道谷神星是小行星带中最大的行星，和冥王星一起，被划分为矮行星。Plaermo的天文学家Giuseppe Piazzi在1801年的新年第一天发现了这颗行星，但是只能在它消失于耀眼阳光下的六周前跟踪它在太空中只有几度弧线的运动轨迹。那时引起大家主要兴趣的是在火星和木星之间是否可能存在一个新的行星。24岁的Gauss仅仅用了Piazzi的3次观测结果，并基于天体运动轨迹的开普勒模型衍生出的决策组合和简化方程，以及许多天的手工计算，就生成了对谷神星轨道的估计。其他天文学者(通常假设圆形而不是椭圆的运动轨迹)的预测是无法找到被目击到的这颗行星。然而，根据Gauss操作规范的成功观测已记录于那年的12月初和新年前夜。正如Gauss所说的，他是“还原瞬变来观测”。他把后期改进的观测方法归因于Piazzi的全部19次观测而不是只有3次，并把它应用于其他天体的运动中。Guass还用到了最小二乘法，这也是他在几年前就推导过的。本书第8章主要讨论与随机变量最小均方误差估计相关的主题，第12章将这部分内容扩展到随机信号的估计。

直到1805年，仍然受小行星轨道插值测量问题的启发，Gauss开发了用于计算有限三角级数的有效算法[3]。遗憾的是，他从来没有发表他的算法，尽管这个算法出现在了他去世60年以后的作品集里。后来这个算法的变体被其他人独立地重新发现，用于解决在不同设置环境下调和级数的拟合问题，如表示气压或地下温度的变化，计算修正轮船上的

罗盘，从晶体中建立X射线衍射数据的模型。这些算法变体中最广为人知的，就是通常所说的快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform，FFT)，由James Cooley和John Turkey[4]在1965年发表。当可编程数字计算机普遍应用于科学和工程领域的时代到来时，FFT很快得到广泛应用，并产生了深远影响。

本书讨论的许多基本概念和分析工具既有确定性系统也有随机系统，如在第1章和第7章中所概述的，而这些都可以追溯到大概Gauss时代的数学家和科学家的工作，包括Pierre-Simon Laplace和Jean-Baptiste Joseph Fourier，当然在他们之后也有很多杰出的贡献。现今Laplace通常是和拉普拉斯变换联系在一起的，其实他对概率论有更重要的贡献，这是因为他在1812年发表了该学科的专著并且是中心极限定理的“发现者”。本书其他部分内容直接源于1800年后工程和应用科学领域取得的进展。

19世纪30年代电报的发明引发了一场通信领域的技术变革[5]，这场变革对本书所有主题相关的理论和实践都有重大影响。同时也引领了其他领域的发展，如交通运输和天气预报，部分原因是现今消息的传播速度比起马、火车和风暴快多了。几年之内由点和线构成的摩尔斯密码可以通过电缆跨大洲传输了。紧接着是19世纪70年代的电话、20世纪前10年的无线电报和AM无线电、20世纪30年代的FM无线电和电视，以及20世纪40年代的雷达。今天我们已经拥有了卫星通信、无线互联网和GPS导航。

这些变革技术促使和加强了我们在信号、系统及推理方面的研究，是电子工程领域各种技术创造性发展的重要催化剂。这需要有效地产生电子信号或者电磁波、表征传输介质(使得这些信号以可预测的方式传播)、设计各种中间阶段必需的滤波器和放大器，以及在嵌入信息的发射机和提取目标信息的接收机中开发适当的信号处理电路和系统。现今对工程学位课程中信号与系统的研究，以电路系统为系统的基本例子，开始于20世纪30年代和40年代。本书第2章描述的部分概念主要来自于通信电路和传输线。

与通信技术并行发展的有控制系统的分析和设计。其中包括模拟计算，其目的在于对建模不同系统的微分方程进行仿真。尽管这些概念在50多年前就已描述，但第一次实用的机械实现大概是在1930年由Vannevar Bush和其他工程师研制的微分分析仪。利用了运算放大器的更灵活和功能更强大的电子版本(也就是模拟计算机)从20世纪50年代开始广泛使用，直到它们被20世纪80年代出现的数字计算机取代。

借助反馈能够自动调整的仪器设计至少可以追溯到大约公元前250年，如Alexandria的Ctesibius的水时钟。工业时代最早也最重要的反馈应用是1788年瓦特(James Watt)用来调整蒸汽发动机速度的离心调速器，但是直到1868年，麦克斯韦(James Clerk Maxwell)[6]才揭示了如何用这样的离心调速器来分析动态稳定性。反馈控制在20世纪初期开始普遍应用于工业系统。与此相关联的许多数学理论广泛应用于今天——相关的研究学者有20世纪20年代和30年代贝尔实验室的Harold Black、Harry Nyquist和Hendrik Bode等，而这些理论其实在设计通信和信号处理领域中稳定的、鲁棒的电子放大器和振荡器时就得以发展了。关于反馈控制其他方面的研究，受到工业生产、化学过程、发电技术、交通运输以及相似场景规范中伺服机制设计的启发。19世纪90年代李雅普诺夫(Aleksandr Lyapunov)在线性和非线性系统稳定性方面的研究利用状态空间的形式加以描述，不过这项工作在20世纪60年代前并不广为人知，而现今这已经成为系统和控制理论中的重要部分。这些状态空间模型和方法包括平衡状态、稳定性、状态估计的量测驱动仿真和反馈控制，分别在第4～6章中讨论。

反馈机制在生命系统中也扮演着重要角色，正如1865年生理学家Claud Bernard明确描述的那样。20世纪早期，随着通信和控制领域中数学研究的发展，Norbert Wiener和他的同事认识到反馈在心理学、生理学、生物学和社会科学等学科中的共性和重要性。随着有关动物和机器的控制和通信研究[7]，最终在20世纪40年代有了Wiener对控制论的定义和详细阐述(1948年)。

对于通信、控制及信号处理中的信号、系统及推理问题，不可避免地要处理由非理想和低性能器件引起的失真和误差。反馈通常正好用来克服这类不足。相关联的一个问题是随机干扰，它能给系统行为带来不确定性。这些随机干扰能够破坏通信信道或接收机中的信号，影响反馈控制系统的性能，也能影响推断结果的可靠性。通过展示如何以概率方式建立随机干扰模型，并在时域和频域表征它们，数学理论在这些应用中发挥了重要作用。从20世纪20年代开始，Wiener[8]的研究工作奠定了在这些领域以及相关领域中工程应用的基础。在他的一篇关于时间级数[9]的外插、内插和平滑处理的著名报告中，将傅里叶分析和随机过程的概念带入信号处理和推理的实践运用中，这是一个重大进步。在第8～11章的基础上，第12章讨论了一类与Wiener的名字相关的滤波问题，展示了如何通过随机过程的模型为滤波和预测提供基础。

1948年香农(Claude Shannon)发表了引发技术革命的论文[10]，本质上产生了信息论。他把信息源本身看作一个离散的随机过程，引入了信息、熵、信道容量和编码的概念，而至今这些概念仍然是该领域的参考框架。正如在前言中提到的，信息论已经超出了本书讨论的范畴。然而，香农的工作开启了数字通信时代。第3章关于脉冲幅度调制的素材内容涉及奈奎斯特(Nyquist)的主要贡献，这些贡献在数字通信中具有重要的实际意义。第9～13章所讨论的噪声中的信号检测也是数字通信及其他许多应用中的基本知识点。

如本开场白开始所指出的，有着悠久历史并与本书内容有关系的另一个研究领域是时间级数，这不仅体现在自然科学(如天文学、气象学)和工程领域，还体现在经济学和无处不在的社会科学领域。时间级数分析的一个典型目标是利用量测的噪声数据去构建因果动态的模型，然后去推知这些信号将来的值。其中一个特别关注点是检测和利用数据中可能潜在的任何趋势或周期性。这里所考虑的问题类似于那些激励Wiener和其他研究者的问题，需要的数学工具部分重叠，不过时间级数的研究文献更趋向于应用驱动型和以数据为中心。比如，第11章介绍的周期图的概念，首次出现在这类文献中的应用就是作为随机过程中检测潜在周期性的工具[11]。

在过去的半个世纪中出现的实时数字计算能力对信号、系统及推理产生了重大影响，也由此产生了新的理论公式。实时计算的一个早期示例是彻底地改变信号处理和控制中核心问题的卡尔曼滤波器，这将卡尔曼滤波推广到多个领域，大大拓展了它的应用。开创性的状态方程公式[12]由Rudolf Kalman在1960年引入，用于研究信号滤波中利用递推最小二乘法对输出目标信号的系统进行状态估计。滤波器的计算算法与系统的操作并行运行，计算结果也可以纳入反馈控制律。卡尔曼滤波器最初应用于空间导航，而今已广泛使用了。卡尔曼滤波器和第6章讨论的状态观测器有联系，而与维纳滤波器的关系将在第12章阐述。

一点展望

21世纪以来，信号、系统及推理中最引人注目的发展，当属巨大的分布式网络计算能力，包括小型、廉价和移动的运算终端。计算、通信、控制和信号处理领域的进步使得它们在很大程度上相互连接和作用，这在互联网之初的20世纪60年代仅有少数人能够预见，其中就有J. C. R. Licklider[13]。让这份憧憬变为现实的一个转变事件是Tim Berners-Lee在1989年发明的万维网。

连续和离散时间技术的紧密耦合变得越来越重要。数字信号、通信和计算通常相互作用于模拟物理对象之间，如汽车系统、娱乐活动、机器人学、人机接口、航空电子学、智能电网、医疗器械等。这也越来越难把一个给定的工程设备或组件划分给通信、控制、信号处理或者其他专用领域。这些领域会在不同的时间以不同的组合方式协同合作。“信息物理系统”一词通常描述用于联合监测与控制的嵌入式计算机和分布式物理过程之间的网络互联结合体[14]。

无论是最小的微观层面还是最大的宏观角度，我们对宇宙的不断探索在许多方面都依赖于如何处理信号、系统及推理。16 世纪末显微镜的发明对细胞级甚至更微小的科学世界的发展有着深远影响。几年之后也就是在 17 世纪之初望远镜的发明，同样放大了我们对太空的视野，这具有同样革命性的影响。1990 年发射的哈勃望远镜使得我们现在能够观测几亿光年之外的宇宙，如原书封底上的图像所描绘的。处理哈勃望远镜传回来的图像的技术也是本书基本概念的延伸。例如，第 12 章讨论的反卷积技术在处理哈勃望远镜图像中扮演着重要角色，最关键的是在初始阶段帮助图像校正球面像差引起的失真，直到修正成功。在 2003 年和 2004 年，哈勃望远镜捕捉到了有趣的谷神星图像。2015 年 3 月，NASA(美国宇航局)的“曙光号”飞船在长达 8 年的飞行旅程后，进入谷神星的轨道，获得了这颗矮行星最详细和激动人心的图像。可以想象 Gauss 一定会非常高兴。

本书希望把所讨论的基本内容应用于当今世界广泛领域的信号、系统及推理中。这些应用深深植入生活中每天能看到和用到的许多系统中，但几乎看不见，甚至被观测者或者使用者视为理所当然。比如，汽车和娱乐系统是当前专业化的信号处理系统应用的最大市场。毫无疑问，本书内容将在许多年里都是基础。

对未来的憧憬总是充满惊喜。然而，可以肯定的是，新的技术平台将随着众多学科的发展进步继续出现，如量子物理学、材料科学、光子学和生物学。同时新的数学方法和工具也将出现，并影响信号、系统及推理的研究和应用。这些发展将开创新的研究方向，无疑其中部分也会是本书基本概念的推导，因为今天用到的许多知识都根植于过去若干世纪中的各种成就。本书的基本原理和概念不仅有重要的历史意义，还会有更丰富的未来！

参考文献

[1] J. E. Morrison, *The Astrolabe*, Janus 2007.

[2] D. Teets and K. Whitehead, “The discover of Ceres: How Gauss became famous,” *Mathematics Magazine*, vol. 72, no. 2, pp. 83-93, April 1999.

[3] M. T. Heideman, D. H. Johnson, and C. S. Burrus, “Gauss and the history of he Fast Fourier Transform, ” *IEEE Acoustics Speech and Signal Processing Magazine*, pp. 14-21, October 1984.

[4] J. W. Cooley and J. W. Turkey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, ” *Mathematics of Computation*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.

[5] J. Gleick, *The Information*: *A History*, *A Theory*, *A Flood*, Vintage Books 2012.

[6] O. Mayr, “Maxwell and the origins of cybernetics, ”*Isis*, vol. 62, no. 4, pp. 424-444, 1971.

[7] N. Wiener, *Cybernetics*: *or Control and Communication in the Animal and the machine*, MIT Press 1948; 2nd edition 1961.

[8] F. Conway and J. Siegelman, *Dark Hero of the Information Age*: *In Search of Norbert Wiener*, *the Father of Cybernetics*, Basic Books 2005.

[9] N. Wiener, *Extrapolation*, *Interpolation*, *and Smoothing of Stationary Time Series*, *with Engineering Applications*, MIT Press 1949.

[10] Ç. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press 1949.

[11] A. Schuster, “On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena, ”*Terrestrial Magnetism*, vol. 3, no. 1, pp. 13-41, 1898.

[12] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems, ”

Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, vol. 82 (series D), pp. 35-45, 1960.

[13] J. C. R. Licklider, "Man-computer symbiosis," *IRE Transactions on Human Factors in Electronics*, vol. HFE-1, pp. 4-11, 1960.

[14] E. A. Lee and S. A. Seshia, *Introduction to Embedded Systems: A Cyber-Physical Systems Approach*, edition 1.5, LeeSeshia. org, 2014.

推荐阅读







数字信号处理及MATLAB仿真

作者：Dick Blandford 等 译者：陈后金 等 书号：978-7-111-48388-5 定价：95.00元

本书是美国伊凡斯维尔大学电子与计算机工程专业的DSP课程教材，注重理论与应用相结合，前7章重点讲述数字信号处理基础理论和知识，包括DSP的概述、线性信号和系统概念、频率响应、抽样和重建、数字滤波器的分析和设计、多速率DSP系统；后4章侧重于DSP应用，包括数字滤波器的实现、数字音频系统、二维数字信号处理和小波分析。本书可作为电子信息、通信、控制、仪器仪表等相关专业本科生的DSP课程教材，对初级DSP工程师也是一本实用的参考书。

数字信号处理及应用

作者：Richard Newbold 等 译者：李玉柏 等 书号：978-7-111-51340-7 定价：119.00元

本书基于真实设备与系统，研究如何进行数字信号处理的软硬件设计与实现，详细阐述了模拟和数字信号调谐、复数到实数的变换、数字信道化器的设计以及数字频率合成技术，并重点讨论了多相滤波器（PPF）、级联的积分梳状（CIC）滤波器、数字信道器等业界常用的一些的信号处理应用。本书适合即将进入信号处理领域的大学毕业生，也适合有一定DSP设计经验的业界工程师阅读。

数字信号处理：系统分析与设计（原书第2版）

作者：Paulo S. R. Diniz 等 译者：张太镒 等 ISBN：978-7-111-41475-9 定价：85.00元

英文版 ISBN：978-7-111-38253-9 定价：79.00元

本书全面、系统地阐述了数字信号处理的基本理论和分析方法，详细介绍了离散时间信号及系统、傅里叶变换、z变换、小波分析和数字滤波器设计的确定性数字信号处理，以及多重速率数字信号处理系统、线性预测、时频分析和谱估计等随机数字信号处理，使读者深刻理解数字信号处理的理论和设计方法。本书不仅可以作为高等院校电子、通信、电气工程与自动化、机械电子工程和机电一体化等专业本科生或研究生教材，还可作为工程技术人员DSP设计方面的参考书。

Pearson　HZ BOOKS 华章科技

尊敬的老师：

为了确保您及时有效地获得培生整体教学资源，请您务必完整填写如下表格，加盖学院的公章后以电子扫描件等形式发给我们，我们将会在2-3个工作日内为您处理。

请填写所需教辅的信息：

采用教材			□中文版 □英文版 □双语版
作　者		出版社	
版　次		ISBN	
课程时间	始于　年　月　日	学生人数	
	止于　年　月　日	学生年级	□专 科　□本科 1/2 年级 □研究生　□本科 3/4 年级

请填写您的个人信息：

学　校			
院系/专业			
姓　名		职　称	□助教 □讲师 □副教授 □教授
通信地址/邮编			
手　机		电　话	
传　真			
official email(必填) (eg:XXX@ruc.edu.cn)		email (eg:XXX@163.com)	
是否愿意接受我们定期的新书讯息通知：　□是　□否			

系 / 院主任：__________（签字）

（系 / 院办公室章）

____年____月____日

资源介绍：

--教材、常规教辅（PPT、教师手册、题库等）资源：请访问 www.pearson.com/us/higher-education　（免费）

--MyLabs/Mastering 系列在线平台：适合老师和学生共同使用；访问需要 Access Code；　（付费）

地址：中国北京市东城区北三环东路 36 号环球贸易中心 D 座 1208 室 100013

请将该表格同时发送到： copub.hed@pearson.com ; ldq@hzbook.com (010-88379061)

网址：www.pearson.com

目 录

出版者的话
译者序
前言
关于封面
致谢
开场白

第 1 章 信号与系统 …… 1
1.1 信号、系统、模型及性质 …… 1
1.2 线性时不变系统 …… 3
1.2.1 LTI 系统的冲激响应表示 …… 3
1.2.2 LTI 系统的特征函数和变换表示 …… 4
1.2.3 傅里叶变换 …… 6
1.3 确定性信号及其傅里叶变换 …… 7
1.3.1 信号种类及其傅里叶变换 …… 7
1.3.2 Parseval 恒等式、能量谱密度以及确定性自相关 …… 9
1.4 双边 z 变换和双边拉普拉斯变换 …… 10
1.4.1 双边 z 变换 …… 10
1.4.2 双边拉普拉斯变换 …… 13
1.5 连续时间信号的离散时间处理 …… 14
1.5.1 CT 信号的 DT 处理过程的基本结构 …… 14
1.5.2 DT 滤波以及全局 CT 响应 …… 15
1.5.3 非理想的 D/C 转换器 …… 17
1.6 延伸阅读 …… 18
习题 …… 19
第 2 章 幅度、相位和群延迟 …… 35
2.1 傅里叶变换的幅度和相位 …… 35
2.2 群延迟和非线性相位的影响 …… 37
2.2.1 窄带输入信号 …… 37
2.2.2 宽带输入信号 …… 39
2.3 全通系统与最小相位系统 …… 43
2.3.1 全通系统 …… 43
2.3.2 最小相位系统 …… 44
2.4 谱因式分解 …… 45
2.5 延伸阅读 …… 46
习题 …… 46
第 3 章 脉冲幅度调制 …… 56
3.1 基带脉冲幅度调制 …… 56
3.1.1 发送信号 …… 56
3.1.2 接收信号 …… 57
3.1.3 频域特性 …… 57
3.1.4 接收机处的码间干扰 …… 60
3.2 奈奎斯特脉冲 …… 61
3.3 通带脉冲幅度调制 …… 63
3.3.1 频移键控 …… 63
3.3.2 相移键控 …… 64
3.3.3 正交幅度调制 …… 65
3.4 延伸阅读 …… 66
习题 …… 66
第 4 章 状态空间模型 …… 74
4.1 系统记忆性 …… 74
4.2 举例说明 …… 74
4.3 状态空间模型 …… 83
4.3.1 DT 状态空间模型 …… 83
4.3.2 CT 状态空间模型 …… 85
4.3.3 状态空间模型的典型性质 …… 86
4.4 基于 LTI 输入输出模型的状态空间模型 …… 87
4.5 非线性状态空间模型的平衡状态和线性化 …… 91
4.5.1 平衡状态 …… 91
4.5.2 线性化 …… 93
4.6 延伸阅读 …… 95
习题 …… 95
第 5 章 LTI 状态空间模型 …… 100
5.1 连续时间和离散时间 LTI 模型 …… 100
5.2 零输入响应和模态表示 …… 102
5.2.1 未驱动的 CT 系统 …… 102
5.2.2 未驱动的 DT 系统 …… 107

5.2.3 LTI 系统的渐进稳定性 ········ 108
5.3 模态坐标下的通用响应 ········ 110
5.3.1 被驱动的 CT 系统 ············ 111
5.3.2 被驱动的 DT 系统 ············ 112
5.3.3 相似变换和对角化 ·········· 114
5.4 传递函数、隐藏模式、可达性和可观测性 ································ 118
5.4.1 CT 系统的输入-状态-输出结构 ································ 118
5.4.2 DT 系统的输入-状态-输出结构 ································ 123
5.5 延伸阅读 ································ 129
习题 ·· 129
第 6 章 状态观测器和状态反馈 ··· 138
6.1 设备和模型 ························ 138
6.2 状态估计和观测器 ················ 139
6.2.1 实时仿真 ························ 139
6.2.2 状态观测器 ···················· 141
6.2.3 观测器设计 ···················· 142
6.3 状态反馈控制 ······················ 148
6.3.1 开环控制 ························ 148
6.3.2 经由 LIT 状态反馈的闭环控制 ································ 149
6.3.3 LTI 状态反馈设计 ·········· 149
6.4 基于观测器的反馈控制 ·········· 155
6.5 延伸阅读 ··························· 157
习题 ·· 157
第 7 章 概率模型 ······················ 165
7.1 基本概率模型 ······················ 165
7.2 条件概率、贝叶斯法则和事件的独立性 ····························· 165
7.3 随机变量 ··························· 167
7.4 概率分布 ··························· 167
7.5 联合分布的随机变量 ············ 168
7.6 期望、矩和方差 ···················· 170
7.7 二元随机变量的相关性和协方差 ································ 172
7.8 向量空间中的相关性质 ·········· 174
7.9 延伸阅读 ··························· 175
习题 ·· 176
第 8 章 估计算法 ······················ 181
8.1 单个连续随机变量的估计 ······ 181
8.2 从估计到估计器 ··················· 184
8.3 线性最小均方误差估计 ········· 187
8.3.1 从一个随机变量的单次量测中线性估计另一个随机变量 ······ 187
8.3.2 多重量测 ························ 191
8.4 延伸阅读 ···························· 193
习题 ·· 194
第 9 章 假设检验 ······················ 202
9.1 噪声中的二进制脉冲幅度调制 ································ 202
9.2 最小错误概率下的假设检验 ··· 203
9.2.1 最小错误条件概率的判决 ··· 203
9.2.2 最小化总体错误概率的 MAP 判决准则 ·················· 204
9.2.3 编码数字通信中的假设检验 ································ 206
9.3 二元假设检验 ······················ 208
9.3.1 虚警、漏警和检测 ············ 208
9.3.2 似然比检验 ···················· 210
9.3.3 纽曼-皮尔逊判决准则和接收者操作特性 ·············· 210
9.4 最小风险判决 ······················ 213
9.5 延伸阅读 ···························· 214
习题 ·· 214
第 10 章 随机过程 ···················· 224
10.1 随机过程的定义和举例 ········ 224
10.2 随机过程的一阶矩和二阶矩特性 ································ 226
10.3 平稳性 ···························· 227
10.3.1 严格平稳性 ················· 227
10.3.2 广义平稳性 ················· 228
10.3.3 WSS 相关函数和协方差函数的性质 ························ 229
10.4 各态历经性 ······················· 230
10.5 随机过程的线性估计 ············ 231
10.5.1 线性预测 ···················· 231
10.5.2 线性 FIR 滤波 ·············· 232
10.6 WSS 过程的 LTI 滤波 ·········· 233
10.7 延伸阅读 ·························· 236
习题 ·· 236
第 11 章 功率谱密度 ················· 247
11.1 瞬时功率期望的频谱分布 ······ 247
11.1.1 功率谱密度 ················· 248
11.1.2 波动谱密度 ················· 250
11.1.3 互谱密度 ···················· 253

11.2 时间平均的功率谱期望和爱因斯坦-维纳-辛钦理论 …… 255
11.3 应用 …… 258
11.3.1 揭示循环分量 …… 258
11.3.2 模型滤波器 …… 260
11.3.3 白化滤波器 …… 262
11.3.4 带限随机过程的采样 …… 263
11.4 延伸阅读 …… 264
习题 …… 264
第12章 信号估计 …… 275
12.1 随机变量的LMMSE估计 …… 275
12.2 FIR维纳滤波器 …… 276
12.3 无约束的离散时间维纳滤波 …… 280
12.4 离散时间的因果维纳滤波 …… 285
12.5 最佳观测器和卡尔曼滤波 …… 290
12.5.1 受加性噪声干扰的信号的因果维纳滤波 …… 290
12.5.2 维纳滤波器的观测器实现 … 291
12.5.3 最佳状态估计和卡尔曼滤波 …… 293
12.6 CT信号的估计 …… 293
12.7 延伸阅读 …… 293
习题 …… 294
第13章 信号检测 …… 303
13.1 基于多重量测的假设检验 …… 303
13.2 独立同分布高斯噪声中已知信号的检测 …… 305
13.2.1 最佳检测方案 …… 305
13.2.2 性能描述 …… 306
13.2.3 匹配滤波 …… 308
13.3 匹配滤波器检测的推广 …… 309
13.3.1 无限长度的有限能量信号 …… 310
13.3.2 白噪声中信号检测的SNR最大化 …… 310
13.3.3 有色噪声中的检测 …… 312
13.3.4 CT匹配滤波器 …… 313
13.3.5 匹配滤波和奈奎斯特脉冲设计 …… 314
13.3.6 未知的到达时间和脉冲压缩 …… 315
13.4 独立同分布高斯噪声中的信号识别 …… 316
13.5 延伸阅读 …… 320
习题 …… 320
参考文献 …… 330
索引 …… 335

第1章 信号与系统

本章将给出信号处理的一些基础的背景知识，主要是通过卷积(convolution)、傅里叶分析(Fourier analysis)、拉普拉斯变换(Laplace transform)和 z 变换(z transform)，对线性时不变系统(LTI system)以及与之相关的连续时间和离散时间信号进行描述。本章通过简要总结和回顾这些背景知识，建立将会在全文中使用的标记法，这种标记法也会为后续章节中的讨论提供参考。

1.1 信号、系统、模型及性质

本书将探讨各种类型的信号(signal)与系统(system)，为它们建立模型(model)，并学习它们的性质(property)。

信号可以表示为由一个或多个独立变量(independent variable)组成的实值或者复值函数。它们可能是一维的，也就是说，函数只有一个独立变量，也可能是多维的。独立变量可以是连续的，也可以是离散的。对于许多一维信号，它的独立变量自然要与时间相关，尽管它不太可能对应实时(real time)。当独立变量是连续的时候，将其放入圆括号(curved parenthese)中表示，而当它是离散的时候，将其放入方括号(square parenthese)中表示为一个整数型变量(integer variable)。举例来说，$x(t)$表示一个连续时间(Continuous-Time，CT)信号，而 $x[n]$表示离散时间(Discrete-Time，DT)信号。这里$x(\cdot)$和 $x[\cdot]$的标记法将用来表示整个信号，而不必用特定的变量 t 或者 n 来表示时间。

前 6 章将集中研究确定性信号(deterministic signal)。从第 7 章开始，将引入随机信号(stochastic signal)，也就是说，信号是从一个信号集合(ensemble)中提取出来的，是信号集合中的任意一个给定的随机过程中可能的输出信号。为了将表示随机过程的信号集合与确定性信号区分开来，通常使用大写字母(uppercase)表示信号集合。举例来说，$X(t)$表示一个 CT 随机过程，而 $x(t)$表示这个集合中的一个特定信号。类似地，$X[n]$表示一个 DT 随机过程。

系统是由软件或硬件元件(element)、部件(component)或子系统(subsystem)组成的。一个系统可以看成一系列输入信号到输出信号或响应信号的映射。更普遍的一种看法(本节没有采用这种说法)是指向一系列指定信号施加约束的实体，而且不必对这些特定信号进行输入或输出的区分。任意满足约束条件的信号都被称为系统的行为(behavior)。

模型(通常来说)是一个系统对一系列特定信号施加的约束的一种表示，这种表示可以是数学的、软件的、硬件的、语言上的或者其他形式的。一个模型本身就是一个系统，因为它给这个模型中描述的一系列信号施加了约束，所以在使用系统和模型这两个词时经常可以进行互换。然而在某些时候，模型对于保留真实的物理量及其数学或计算机仿真表示之间的差别非常重要。

通过映射或者行为方式对系统描述的差异，可以由表达式描述出来。比如，电阻的欧姆定律(Ohm's law for a resistor)。当表达式为 $v(t)=Ri(t)$的时候，它表示将电流 $i(t)$作为输入信号，把电压 $v(t)$作为响应信号，反过来也可以表示为

$$Ri(t)/v(t) = 1 \tag{1.1}$$

这种表达式更能体现出两个相关信号的约束条件。相似地，如图 1.1 所示，基尔霍夫

定律(Kirchhoff's law)对电阻-电容(RC)电路的信号 $v(t)$、$i_R(\mathrm{t})$和 $v_C(t)$进行了约束，但是不必区分哪个变量是输入，哪个是输出。更广泛地来看，一个行为描述包含了信号必须满足的一系列约束条件。例如某个特定系统在两个信号之间施加时移约束，且并没有明确指定这两个信号哪一个对应于输入或输出，那么在这种情况下，行为解释就会更加合适。不过在本书中，通常把系统表示为输入到输出的映射。

2

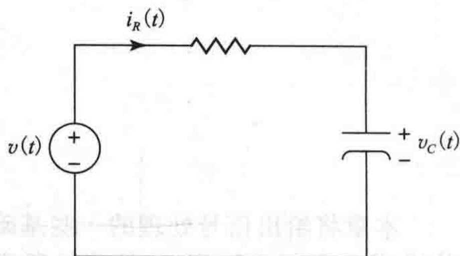


图 1.1 电阻-电容电路

这种以映射表示系统或模型的方法包含以下内容：一组输入信号$\{x(\cdot)\}$，它们中的每一个都可能在某个特定范围内变化；相似地，一组输出信号$\{y(\cdot)\}$，它们中的每一个也可能变化；一个唯一地定义了输入信号和输出信号的函数关系的映射描述。

对于 CT 情况下的单输入单输出系统，图 1.2 表示了将系统作为一种映射来描述的方法，它表明对于每个输入集的信号，$T\{\cdot\}$表示信号在输出集上的映射。如果给定输入 $x(\cdot)$和映射 $T\{\cdot\}$，那么输出 $y(\cdot)$就是唯一的。更一般地说，图 1.3 中的表示法用来表示任意时刻 t 的输入和输出信号。在图 1.3 的标记法中，更重要的是理解映射 $T\{\cdot\}$是信号集之间的映射，而不是在某一特定时刻的信号值 $x(t)$与某一特定时刻的信号值 $y(t)$之间的无记忆映射。举例来说，如果一个系统对输入延时 t_0，那么

$$y(t)=x(t-t_0) \tag{1.2}$$

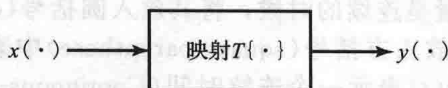


图 1.2 把系统作为输入输出映射的表示法

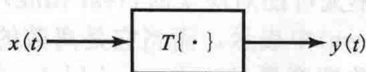


图 1.3 系统输入输出映射的替代表示法

系统性质

一个由映射描述的系统，有如下定义的多种性质，假定大家对于这些性质都很熟悉。这里给出的是 DT 情况，这些性质也很容易推广到 CT 情况中。为了表达方便，假设接下来定义的数学表达式所表示的是单输入单输出系统。

无记忆性：任意时刻的输出与其他时刻的输入无关。式(1.2)中描述的延时 t_0 的 CT 系统就不具有无记忆性。一个简单的 DT 无记忆性的例子是

$$y[n]=x^2[n] \tag{1.3}$$

对于所有的 n 都成立。

线性：输入信号的任意线性组合(叠加)的响应与这些输入信号中单个信号的响应的线性组合是相同的。

3

时不变性：任一输入集合在时间上移位的响应，总是原集合响应的移位，且移位量相同。

线性时不变性(LTI)：系统既是线性的也是时不变的。

因果性：任一时刻的输出都与该时刻以后的输入无关，即对于所有的 n_0，$y[n_0]$不取决于那些 $n>n_0$ 的 $x[n]$。换一种说法，定义$\hat{x}[n]$、$\hat{y}[n]$表示系统的一对输入与输出，其中当 $n\leqslant n_0$ 时，$\hat{x}[n]=x[n]$，这里 n_0 是一个固定的但是可以任意取值的数，那么一定有当 $n\leqslant n_0$ 时，$\hat{y}[n]=y[n]$。

输入有界、输出有界(BIBO)稳定性：当输入有界时，其输出响应也总是有界的，即对于所有的 n，都有$|x[n]|\leqslant M_x<\infty$，也就意味着对所有的 n，都有$|y[n]|\leqslant M_y<\infty$。

例 1.1 系统性质

举例说明这些系统性质。考虑一个系统，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的关系由下式定义：

$$y[n]=x[4n+1] \tag{1.4}$$

其中，n 取任意值。下面确定这个系统是否具有无记忆性、线性、时不变性、因果性和BIBO稳定性。

无记忆性：一个简单的反例就能证明这个系统不是无记忆的。考虑当 $n=0$ 时的 $y[n]$。从表达式(1.4)可知 $y[0]=x[1]$，因此 $y[0]$ 取决于一个 $n\neq0$ 时刻的输入值，所以它不是无记忆的。

线性：为了检验线性，考虑两个任意的输入信号 $x_A[n]$ 和 $x_B[n]$，并且把它们的线性组合的输出和各自单独输出的线性组合进行比较。从式(1.4)可知，$y_A[n]$ 是对 $x_A[n]$ 的响应，$y_B[n]$ 是 $x_B[n]$ 的响应(对于所有的 n 都成立)：

$$y_A[n]=x_A[4n+1] \tag{1.5}$$

$$y_B[n]=x_B[4n+1] \tag{1.6}$$

如果 $x_C[n]=ax_A[n]+bx_B[n]$，其中 a、b 为任意值，有 $y_C[n]=ay_A[n]+by_B[n]$，那么系统就是线性的。将式(1.4)应用到 $x_C[n]$，可知这条性质是满足的。

时不变性：为了检验时不变性，需要比较一个经过时移的 $x[n]$ 的输出和一个 $x[n]$ 的输出的时移。任意特定的输入 $x[n]$ 的输出 $y[n]$ 都可以由式(1.4)得到。由信号 $x[n]$ 时移 n_0 得到输入信号 $\hat{x}[n]$，对应的输出为 $\hat{y}[n]$。于是

$$\hat{y}[n]=\hat{x}[4n+1]=x[4n+1+n_0] \tag{1.7}$$

如果系统是时不变的，那么根据式(1.4)，将 $y[n]$ 时移 n_0 所得到的 $\hat{y}[n]$ 就应该和用 $(n+n_0)$ 代替 n 所得到的结果相等，可得

$$y[n+n_0]=x[4n+4n_0+1] \tag{1.8}$$

由于式(1.7)和式(1.8)是不相等的，所以该系统不是时不变的。再说明一种特殊的输入情况，假设 $x[n]$ 是单位脉冲信号 $\delta[n]$，当 $n=0$ 时，其值为1，其他时候都是0。由式(1.4)可知，系统的输出是 $\delta[4n+1]$，那么对于所有的 n 来说，输出是0，当然 $y[n+n_0]$ 也全部是0。然而，如果考虑 $x[n+n_0]=\delta[n+n_0]$，那么输出就是 $\delta[4n+1+n_0]$。这样当 $n_0=3$，$n=-1$ 时，输出为1，其余时刻也都为0。

因果性：由于当 $n=0$ 时的输出取决于 $n=1$ 时的输入，所以系统不是因果的。

BIBO稳定性：因为 $|y[n]|=|x[4n+1]|$，如果 $|x[n]|$ 有界，那么 $|x[4n+1]|$ 有界，所以系统一定是BIBO稳定的。◀

1.2 线性时不变系统

正如许多文献所描述，线性时不变(LTI)系统是工程设计的基础。这种经典系统为分析与设计提供了丰富的理论基础，这是一个优势。更重要的是，在很多非线性系统中，那些看似稳定的操作所带来的微小偏差，是可以用LTI模型来控制的，所以LTI系统分析和设计工具可以用于近似稳定操作情况下的增量描述。

1.2.1 LTI系统的冲激响应表示

一种常用的表示输入信号到输出信号的LTI映射的方法就是通过输入与系统冲激响应的卷积来表示。在CT中的关系式如下：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.9}$$

式中，$x(t)$ 是输入，$y(t)$ 是输出，$h(t)$ 是系统的单位冲激响应。在DT中相应的关系式如下：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \tag{1.10}$$

式中，$h[n]$ 是单位采样(或者单位“冲激”)响应。

式(1.9)中的卷积积分和式(1.10)中的卷积和通常简化为

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{1.11}$$

4

$$y[n]=x[n]*h[n] \tag{1.12}$$

虽然这种简化标记法很方便，但是如果理解不充分的话，就容易引起误解。如另一种等效的标记法

5

$$y(t)=(x*h)(t) \tag{1.13}$$

它们各有优缺点。只有理解了式(1.9)和式(1.10)的正确含义，才能用式(1.11)和式(1.12)来作为式(1.9)和式(1.10)的简化式。

由卷积获得的 LTI 系统特性是通过把输入信号表示为不同加权冲激信号的叠加而获得的。在 DT 情况下，给定了 LTI 映射，其中冲激响应为 $h[n]$，也就是说，当输入为单位采样信号或者单位“冲激”函数 $\delta[n]$时，它的输出就是 $h[n]$。通常情况下的输入 $x[n]$就可以表示为经过缩放和时移的冲激信号之和，具体如下：

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k] \tag{1.14}$$

由于结果具有线性和时不变性，输入对应的响应 $y[n]$就是类似的经过缩放(尺度变换)和时移的冲激响应之和，由式(1.10)给出。线性和时不变性使得一个特殊输入的响应可以用通用输入形式的响应来表示。类似的推导在 CT 情况下依然成立。

上述的推论看起来似乎表明，所有从输入信号到输出信号的 LTI 映射都能够通过卷积和表示。但是，对于像式(1.9)、式(1.10)和式(1.14)的无限积分或者无限求和，在实际使用时会考虑这些映射有一些假设条件。在这里，不会尝试详细说明这些假设条件。虽然要找到“有问题”(pathological)的 LTI 映射的例子并不困难——但是在这里并没有太大的意义，或者在大多数的工程模型中并没有必要——但由于违背了这些假设，所以在这些情况下卷积关系不成立。

由式(1.9)和式(1.10)可推断出，一个 LTI 系统满足 BIBO 稳定性的充分必要条件是冲激响应绝对可积(CT)或者绝对可和(DT)：

$$\text{BIBO 稳定(CT)}\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,\mathrm{d}t<\infty \tag{1.15}$$

$$\text{BIBO 稳定(DT)}\Leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty \tag{1.16}$$

由式(1.9)和式(1.10)还可以推断出，一个 LTI 系统满足因果性的充分必要条件是当 $t<0$(CT)或者当 $n<0$(DT)时，冲激响应为 0。

1.2.2 LTI 系统的特征函数和变换表示

指数函数(exponential)是 LTI 映射的特征函数，也就是说，当所有时刻的输入是指数形式时，就可以将其看成是“永久的”(everlasting)指数形式，这时输出就仅仅是输入的缩放形式。因此，计算这样一个指数形式的响应就可简化为一个简单的有适当缩放因子的乘法运算。具体来说，在 CT 情况下，令

6

$$x(t)=\mathrm{e}^{s_0 t} \tag{1.17}$$

对于某些可能的复数值 s_0 成立(s_0 称为复频率)。那么从式(1.9)可得到

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{s_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=H(s_0)\mathrm{e}^{s_0 t} \tag{1.18}$$

此处

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{1.19}$$

假设当 $s=s_0$ 时，上述的积分有一个有限值(否则，该指数响应就不满足严格定义)。式(1.18)中，$x(t)$具有式(1.17)的形式，就是具有 $H(s_0)$给出的特征值的一个特征函数。注意到式(1.19)正好是冲激响应的双边拉普拉斯变换，或者说是系统的传递函数，还注意到复平面上 s 值的集合(使得上述积分取有限值)构成了该变换的收敛域(ROC)。在 1.4 节

中，将深入讨论拉普拉斯变换。

永久指数函数(everlasting exponential)是 LTI 系统的特征函数，这一事实可以直接从另一事实中推导出来，即时移一个永久指数函数所得到的结果与用一个常数因子缩放这个指数函数所得到的结果是相同的。相反，单边指数函数 $e^{s_0 t}u(t)$(其中 $u(t)$是单位阶跃信号)通常来说不是 LTI 映射的特征函数：把一个单边指数函数进行时移并不会得到与把这个指数函数进行缩放的相同结果，正如例 1.2 描述的一样。

例 1.2 LTI 系统的特征函数

如上所述，式(1.19)的积分在 $s=j\omega$ 时收敛，永久复指数 $e^{j\omega t}$ 是任何 LTI 系统的特征函数，但是 $e^{j\omega t}u(t)$不是特征函数。考虑一个简单的例子，其时延为

$$y(t) = x(t-t_0) \tag{1.20}$$

那么输入为 $e^{j\omega t}u(t)$的输出就是

$$e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}u(t-t_0)$$

这并不是输入的一个简单缩放，所以通常情况下，$e^{j\omega t}u(t)$不是 LTI 系统的特征函数。◀

7

当 $x(t)=e^{j\omega t}$时，对应于式(1.17)中的 s_0 取了纯虚数 $j\omega$，对于所有的正时刻和负时刻来说，输入都是有界的，且对应的输出形式是

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{1.21}$$

假设式(1.19)中的 $H(s)$在 $s=j\omega$ 时收敛。这里，ω(实数)是输入的频率。根据式(1.19)，$H(j\omega)$由下式给出：

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.22}$$

表达式(1.22)中的函数 $H(j\omega)$被看作是系统的频率响应，同时也是冲激响应的连续时间傅里叶变换(CTFT)。如果 $h(t)$是绝对可积的，那么对于每个 ω 来说，定义了 CTFT 的积分就有一个有限值(该值也能被表示为 ω 的连续函数)，换句话说，如果有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \tag{1.23}$$

那么这个条件就能保证 $s=j\omega$ 在 $H(s)$的收敛域内。比较式(1.23)和式(1.15)，注意到这个条件和系统满足 BIBO 稳定性的条件是等价的。CTFT 信号也能定义某些不能绝对可积的信号，比如 $h(t)=(\sin t)/t$，它的 CTFT 在频域上是矩形，而对于 CTFT 存在的验证条件，将会推迟到 1.3 节介绍。

知道了 $e^{j\omega t}$的响应也能确定一个通常的(实值)正弦形式的输入响应，形式如下：

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) = \frac{A}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] \tag{1.24}$$

使用叠加原理并且做一些代数上的变化，能得到相应的输出

$$y(t) = |H(jw)|A\cos(\omega t+\theta+\angle H(jw)) \tag{1.25}$$

于是，输出还是同频率的正弦信号，只是在输入频率所对应频率响应的幅度上进行了幅度缩放，且在输入频率上所对应的频率响应的角度上进行了相位移动。

对于 DT 情况来说，可以类似地检验其特征函数的性质。一个 DT 永久指数函数是一个几何序列或信号，具有如下的形式：

$$x[n] = z_0^n \tag{1.26}$$

对某些可能的复值 z_0，它表示复频率。当输入为 DT 指数函数时，卷积映射的输出就会遵循和上述的 CT 例子相似的简单运算。具体来说，

$$y[n] = h[n]*x[n] = H(z_0)z_0^n \tag{1.27}$$

此处

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \tag{1.28}$$

8

假设当 $z=z_0$ 的时候，上述的求和有一个有限值。注意到求和正好是冲激响应的 z 变换，且复平面上使得上述求和取有限值的 z 的取值构成了 z 变换的收敛域。就像 CT 的例子一样，通常来说，单边指数 $z_0^n u[n]$ 也不是特征函数。在 1.4 节中，将深入讨论 z 变换。

另外，当 $x[n]=(e^{j\Omega})^n=e^{j\Omega n}$ 时，有一个重要的例子，对应于式(1.26)中 z_0 取大小为 $e^{j\Omega}$ 的单位幅度，在这里 Ω——(实)“频率”——表示 z 平面上单位圆圆周的角度位置(使用弧度来表示)。这样一个 $x[n]$ 在正时间和负时间上都是有界的。虽然使用不同的符号 Ω 来表示 DT 情况下的频率，以此来区分 CT 情况下的频率 ω，但是在很多文献中仍然会为了方便标记，在 CT 和 DT 两种情况下都用 ω 来表示。输出表示为

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \tag{1.29}$$

假设 $e^{j\Omega}$ 是在 $H(z)$ 的 ROC 内。从式(1.28)可知，$H(e^{j\Omega})$ 可由下式给出：

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \tag{1.30}$$

表达式(1.30)中的函数 $H(e^{j\Omega})$ 是 DT 系统的频率响应，同样也是冲激响应的离散时间傅里叶变换(DTFT)。如果 $h[n]$ 是绝对可和的，那么定义了 DTFT 的求和就有一个有限值(该值能被表示为 Ω 的连续函数)。换句话说，如果有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{1.31}$$

那么这个条件就保证了 $e^{j\Omega}$ 在 $H(z)$ 的 ROC 内。正如在连续时间中一样，这个条件和系统满足 BIBO 稳定性的条件是等价的。和 CTFT 一样，DTFT 也能定义某些不绝对可和的信号。这将在 1.3 节中详细讨论。

利用式(1.30)并且对比连续时间的讨论，可得到一个正弦输入响应的表达形式：

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \theta) \tag{1.32}$$

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})|A\cos(\Omega n + \theta + \angle H(e^{j\Omega})) \tag{1.33}$$

从式(1.30)可知，离散时间系统的频率响应总是周期性的，且周期为 2π。“低频”响应发生在 $\Omega=0$ 附近，对所有的 n，其对应的输入信号都是一个常数。“高频”响应发生在 $\Omega=\pm\pi$ 附近，对应的输入信号是 $e^{\pm j\pi n}=(-1)^n$，这是 DT 信号可能的最快变化。

9

当 LTI 系统的输入能够被表示为一个特征函数的线性组合的时候，比如(以连续时间为例)

$$x(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} e^{j\omega_{\ell} t} \tag{1.34}$$

那么根据线性性质，输出也是这些独立指数函数响应的线性组合。根据 LTI 系统指数函数的特征函数性质，每一个指数函数的响应仅仅涉及这些指数函数频率上的系统频率响应的缩放运算。因此有

$$y(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} H(j\omega_{\ell}) e^{j\omega_{\ell} t} \tag{1.35}$$

对于离散时间，可以得到相似的表达式。

1.2.3 傅里叶变换

通过傅里叶变换，大多数输入信号都能表示为有界指数函数的线性组合。连续时间傅里叶变换(CTFT)的综合/解析(synthesis/analysis)方程如下

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad (综合) \tag{1.36}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \quad (解析) \tag{1.37}$$

注意到式(1.36)把 $x(t)$ 表示为一个指数函数的线性组合，但这种不同权重的线性组合涉及连续的指数函数，而不是有限个数的指数函数。如果信号 $x(t)$ 是频率响应为 $H(j\omega)$ 的 LTI 系统的输入，那么根据线性性质和指数函数的特征函数的性质，输出就是这些指数函数响应的加权组合，即

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.38}$$

通过把上式看作一个 CTFT 的综合方程，能得到 $y(t)$的 CTFT 如下：

$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega) \tag{1.39}$$

在表达式(1.9)中在时域上的卷积关系于是就变成了在频域上的乘法关系。所以，要确定任意特定频率 ω_0 上的 $Y(\mathrm{j}\omega)$，只需知道在那个单频点上的输入的傅里叶变换以及系统在那个频率的频率响应。在很大程度上，这个事实可以解释为什么在 LTI 系统的分析中频域分析是必不可少的。

相应的 DTFT 综合/解析方程组定义如下：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega\quad(综合) \tag{1.40}$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\quad(解析) \tag{1.41}$$

10

上面的综合方程中，积分符号上的$\langle 2\pi\rangle$表示在任意间隔长度为 2π 的范围内进行积分。这是因为 DTFT 的 Ω 是以 2π 为周期的，这个事实的简单结果就是 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$也是以 2π 为周期的。注意到式(1.40)将 $x[n]$表示为连续的指数函数的加权组合。

就像在 CT 情况下一样，如果 LTI 映射的输入是 $x[n]$，那么可以直接得出输出$y[n]$一定会有如下的 DTFT：

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \tag{1.42}$$

1.3 确定性信号及其傅里叶变换

这一节将详细地回顾确定的离散时间信号的 DTFT，还会重点关注那些能够保证严格定义 DTFT 的信号。同时也会关注那些具有 DTFT 的信号的能量密度谱。本节还会引出一些在之前的信号与系统课程中可能没有强调过的 DTFT 方面的内容。类似的分析也会用于 CTFT。

1.3.1 信号种类及其傅里叶变换

式(1.40)和式(1.41)中的 DTFT 综合和解析方程对至少对于下面描述的三大类 DT 信号是成立的。

有限行为信号

有限行为信号(finite-action signal)，也称为绝对可和信号或者 ℓ^1(译者注：DT 情况下用小写“ℓ”，CT 情况下用大写“L”)信号，由如下条件定义：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|<\infty \tag{1.43}$$

左边的求和式通常被称为信号行为。对于这些信号，定义了 DTFT 的有限和是满足要求的，且对于所有的 Ω 来说，DTFT 都能表示为一个连续函数。特别是，$\Omega=+\pi$ 和 $\Omega=-\pi$的值符合定义且相等，但当信号不是 ℓ^1 信号时，就不必满足上述情况。

有限能量信号

有限能量信号(finite-energy signal)，也称为平方可和信号或者 ℓ^2 信号，由如下条件定义：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2<\infty \tag{1.44}$$

左边的求和式称为信号的能量。

11

对于离散时间，一个绝对可和的(即 ℓ^1)信号总是平方可和的(即 ℓ^2)。然而反之却不成立。例如，考虑信号 $\sin(\Omega_c n)/\pi n$，其中$-\pi<\Omega_c<\pi$，且当 $\Omega_c=0$ 时信号取值为 Ω_c/π，或者考虑信号$(1/n)u[n-1]$，它们两个都是 ℓ^2 信号但都不是 ℓ^1 信号。如果 $x[n]$是这样的信

号，它的 DTFT $X(e^{j\Omega})$就是下列表达式在 $N\to\infty$时的极限值：

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-N}^{N} x[k]e^{-j\Omega k} \tag{1.45}$$

通常该极限值在 Ω 的某些取值处不连续。比如，$\sin(\Omega_c n)/\pi n$ 的变换在 $\Omega = \pm\Omega_c$ 时是不连续的。

慢增长信号

慢增长信号(signal of slow growth)指那些信号幅度增长不快于多项式时间指数的信号，如对所有的 n，$x[n]=n$。在这个例子中，式(1.45)的 $X_N(e^{j\Omega})$在一般意义下并没有收敛，但是它的 DTFT 仍然作为一个广义(或者奇异)函数而存在。比如对所有的 n 都有 $x[n]=1$，那么对于$|\Omega|\leqslant\pi$，就有 $X(e^{j\Omega})=2\pi\delta(\Omega)$。

对于慢增长类信号，最感兴趣的是有界(或者 ℓ^{∞})信号，其定义为

$$|x[k]| \leqslant M < \infty \tag{1.46}$$

换句话说，在所有时间范围上，信号的幅度都是固定且有界的。比如，形如 $e^{j\Omega_0 n}$ 的有界永久指数函数在傅里叶变换理论中扮演着关键的角色。这样的信号不必能量有限，但在任意时间段都必有一个有限的平均功率，这里的平均功率定义为总能量除以总时间。

对于连续时间，信号也有类似的定义。有限行为(或者 L^1)信号包含那些绝对可积的信号，也就是说，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \tag{1.47}$$

有限能量(或者 L^2)信号由那些平方可积的信号组成，也就是说，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty \tag{1.48}$$

对于连续时间来说，一个绝对可积的信号(即 L^1)可能不是平方可积的(即 L^2)。举例来说，信号

$$x(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t}, & 0 < t \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1.49}$$

但是，有界的 L^1 信号也是 L^2 信号。就像离散时间一样，连续时间的 L^2 信号不一定是 L^1 信号，例如信号

12

$$x(t) = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \tag{1.50}$$

对于连续时间和离散时间，信号与系统的相关书籍都推导了大量重要的傅里叶变换对和傅里叶变换的性质，并且把它们制成了表格。为了方便，这里总结了一个简单的 DTFT 变换对的表格(见表 1.1)和一个 CTFT 变换对的表格(见表 1.2)，其他变换对可以很容易

表 1.1 DTFT 变换对简表

DT 信号 $\longleftrightarrow$ DTFT，$-\pi<\Omega\leqslant\pi$
$\delta[n] \longleftrightarrow 1$
$\delta[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0}$
1(对于所有的 n) $\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$e^{-j\Omega n_0}\ (-\pi<\Omega_0\leqslant\pi) \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1 \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$u[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta(\Omega)$
$\dfrac{\sin\Omega_c n}{\pi n} \longleftrightarrow \begin{cases}1, & -\Omega_c<\Omega<\Omega_c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
$\left.\begin{matrix}1, & -M\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \dfrac{\sin[\Omega(2M+1)/2]}{\sin(\Omega/2)}$

表 1.2 CTFT 变换对简表

CT 信号 $\longleftrightarrow$ CTFT
$\delta[t] \longleftrightarrow 1$
$\delta[t-t_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$
1(对于所有的 t) $\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$e^{-at}u(t),\ \mathrm{Re}\{a\}>0 \longleftrightarrow \dfrac{1}{a+j\omega}$
$u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases}1, & -\omega_c<\omega<\omega_c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
$\left.\begin{matrix}1, & -M\leqslant t\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \dfrac{\sin\omega M}{\omega/2}$

地通过使用多种傅里叶变换性质从这些已有的变换对中推导出来。注意到表 1.1 左列的 $\delta[\cdot]$表示单位采样函数，而右列的 $\delta(\cdot)$表示单位冲激。另外，表 1.1 的 DTFT 变换在 $-\pi<\Omega\leqslant\pi$区间外具有周期性的重复。

通常来说，熟练地推导和使用主要的变换对和性质是重要且非常有用的。在下面的小节中，将讨论 Parseval 恒等式，它是一个在以后讨论中非常重要的变换性质。

当然，还有感兴趣的其他种类的信号，比如单边增长指数函数。为了处理这样的信号，对于离散时间，会使用 z 变换；而对于连续时间，则会使用拉普拉斯变换。 13

1.3.2 Parseval 恒等式、能量谱密度以及确定性自相关

对 L^2 信号而言，傅里叶变换的一个重要性质就是 Parseval 恒等式。对于离散时间信号，该等式的通用形式如下：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})Y^*(e^{j\Omega})d\Omega \tag{1.51}$$

对于连续时间信号，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)d\omega \tag{1.52}$$

上面两个式子中，符号 $*$ 表示复共轭。特别地，若有 $y[n]=x[n]$或者 $y(t)=x(t)$，则可得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \tag{1.53}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \tag{1.54}$$

Parseval 恒等式允许通过一个信号变换的幅度平方的积分来估计它的能量。事实上，等式表明的是，信号的能量等于信号变换的能量(这里有一个 $1/2\pi$ 的缩放)。

式(1.53)和式(1.54)的右边是对$|X(e^{j\Omega})|^2$ 和$|X(j\omega)|^2$ 这两个量的积分，用$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})$和$\overline{S}_{xx}(j\omega)$来表示这两个量：

$$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 \tag{1.55}$$

或

$$\overline{S}_{xx}(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \tag{1.56}$$

因为它们描述了信号的能量在频率上的分布情况，所以可以看作是相关信号的能量谱密度(Energy Spectral Density，ESD)。为了更具体地证明这个说法，对于离散时间信号，考虑把 $x[n]$作为一个频率响应为 $H(e^{j\Omega})$ 的理想带通滤波器的输入，该滤波器的频率响应是一个单位增益的窄带通带，带宽为 Δ，且中心频率为$\pm\Omega_0$，如图 1.4 所示。

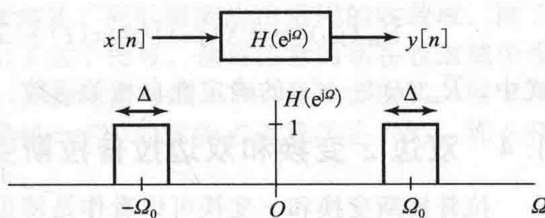


图 1.4　理想带通滤波器

那么输出信号的能量一定是 $x[n]$包含在滤波器通带里的能量。为了计算输出信号的能量，注意到输出信号有一个如下的变换：

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \tag{1.57}$$

因此，根据 Parseval 恒等式，输出的能量就是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |Y(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |H(e^{j\Omega})|^2\ |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \tag{1.58}$$ 14

由于$|H(e^{j\Omega})|$在通带上值为 1，在其余地方为 0，式(1.58)可简化为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{通带} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{通带} \overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})d\Omega \tag{1.59}$$

因此，$x[n]$在任何频带的能量可以通过$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})$在那个通带上的积分得到(有一个$1/2\pi$的缩放)。换句话说，$x[n]$的能量密度是$\Omega$的函数，每弧度大小为$\overline{S}_{xx}(\Omega)(e^{j\Omega})/(2\pi)$。对连续时间信号来说，可以进行完全相似的讨论。

由于ESD $\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})$是$\Omega$的实函数，可以用$\mathcal{E}_{xx}(\Omega)$来替代表示。然而，这里使用$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})$这个符号是为了清楚地表明它是$X(e^{j\Omega})$幅度的平方，还能说明DT信号的ESD周期为$2\pi$。

ESD在时域上还有一个重要的解释。例如，对于离散时间信号有

$$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 = X(e^{j\Omega})X(e^{-j\Omega}) \tag{1.60}$$

注意到$X(e^{-j\Omega})$是时间反转信号$\overleftarrow{x}[k]=x[-k]$的傅里叶变换。因为频域中的乘法运算对应于时域中的卷积运算，则有

$$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 \Leftrightarrow x[k] * \overleftarrow{x}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]x[n] = \overline{R}_{xx}[k] \tag{1.61}$$

函数$\overline{R}_{xx}[k]$指的是信号$x[n]$的确定性自相关(deterministic autocorrelation)函数，而且通过刚才建立的变换关系可知确定性自相关函数的变换就是能量谱密度$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})$。由傅里叶变换的基本性质可知，$\overline{R}_{xx}[0]$即信号能量$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$是$\overline{R}_{xx}[k]$的傅里叶变换缩放$1/2\pi$后的面积。换句话说，是在$\overline{S}_{xx}(e^{j\Omega})=|X(e^{j\Omega})|^2$条件下缩放后的面积，这当然也和式(1.53)相对应。

确定性自相关函数在误差平方和的意义上与一个信号以及该信号的时移形式非常相似。更具体一点，对于离散时间信号来说，信号和它经过时移后的误差平方和由下式给出：

15

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n+k]-x[n])^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n+k] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] - 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]x[n] \\ &= 2(\overline{R}_{xx}[0]-\overline{R}_{xx}[k])\end{aligned} \tag{1.62}$$

由于误差平方和总是非负的，那么就有$\overline{R}_{xx}[k] \leqslant \overline{R}_{xx}[0]$，并且确定性自相关$\overline{R}_{xx}[k]$越大，信号$x[n]$和它时移后的形式$x[n+k]$越相近。

对于连续时间信号来说，相应的结论也是成立的，特别地，

$$\overline{S}_{xx}(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \Leftrightarrow x(\tau) * \overleftarrow{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt = \overline{R}_{xx}(\tau) \tag{1.63}$$

式中，$\overline{R}_{xx}(t)$是$x(t)$的确定性自相关函数。

1.4 双边 z 变换和双边拉普拉斯变换

拉普拉斯变换和z变换可以看作是傅里叶变换的扩展，而且基于各种原因，它们是很有用的。它们能够对某些傅里叶变换并不收敛的信号进行变换处理。通过引入复平面、复函数的理论就能够应用这两种变换，这样也增强了对傅里叶变换的理解。1.4.1节将详细回顾双边z变换；1.4.2节会简短地回顾双边拉普拉斯变换，讨论方式与1.4.1节类似。

1.4.1 双边 z 变换

双边z变换定义如下：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{1.64}$$

这里z是一个复变量，也能用极坐标的形式将其表示为

$$z = re^{j\Omega}, \quad r \geqslant 0, \quad -\pi < \Omega \leqslant \pi \tag{1.65}$$

所以

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \tag{1.66}$$

DTFT 就是把对应的 r 设为 1，这样 z 就只在单位圆上取值。但是，就算把 z 限制在单位圆上，还是有很多有用信号的无限求和并不收敛(甚至在广义函数的意义下)。z 变换概念中的 z^{-n} 这个表达式把因子 r^{-n} 引入了无限求和中，这样就让许多有用但没有 DTFT 的信号的无限求和收敛了(如果 r 是合理约束的)。

16

更具体地说，注意到式(1.66)中 $X(z)$ 可以看作是 $x[n]r^{-n}$ 的 DTFT。如果 $r>1$，那么 r^{-n} 对取正值的 n 呈几何级衰减，对取负值的 n 呈几何级增长。当 $0<r<1$ 时，则情况相反。于是，尽管有许多 $x[n]$ 不是绝对可和的序列，但是对于一些范围内的 r 值，$x[n]r^{-n}$ 却是绝对可和的。

比如，考虑 $x_1[n]=a^n u[n]$。如果 $|a|>1$，那么这个序列就没有 DTFT。但是，对于任意的 a，只要 $r>|a|$，$x[n]r^{-n}$ 就是绝对可和的。特别地，例如

$$X_1(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \tag{1.67}$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|=r>|a| \tag{1.68}$$

第二个例子，考虑 $x_2[n]=-a^n u[-n-1]$。如果 $|a|<1$，这个信号没有 DTFT。但是，如果有 $r<|a|$，

$$X_2(z)=-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\cdots \tag{1.69}$$

$$=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z},\quad |z|=r<|a| \tag{1.70}$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|=r<|a| \tag{1.71}$$

上述两个不同信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 z 变换能够化简到相同的有理表达式，但是对应不同的收敛域。因此，收敛域是变换参数中的关键部分。

如果 $x[n]$ 可以表达为一个左边和右边 DT 指数函数的和的形式，其中的每一项都如上面例子所描述的那样，那么 $X(z)$ 能够写成 z 的有理式(或者等价地，写成 z^{-1} 的有理式)：

$$X(z)=\frac{Q(z)}{P(z)} \tag{1.72}$$

式中，$Q(z)$ 和 $P(z)$ 是 z 的多项式，或者等价地，是 z^{-1} 的多项式。

有理的 z 变换通常由 z 平面上的零极点图来描述，同时需要指出适用的收敛域。除了一个常数幅度因子之外，这些信息就唯一地表示了这个信号。值得注意的是在收敛域中没有极点，这是因为变换要求在收敛域中有限。z 变换经常写成 z^{-1} 的分数多项式，而 z 平面的零极点图表示 z 的多项式的根。另外，如果将 $z=\infty$ 的零极点也算进去的话，那么任何分数多项式总是正好有相同数量的零点和极点。

17

收敛域

为了理解 z 变换的复函数性质，可以分别定义在非负时间部分和负时间部分的无限求和。非负时间或者单边 z 变换定义如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \tag{1.73}$$

且它的幂级数是 z^{-1}。当 $N\to\infty$ 时，有限求和 $\sum_{n=0}^{N}x[n]z^{-n}$ 的收敛性是由幂级数的收敛半径 $R_1\geqslant 0$ 决定的。对于 $|z|>R_1$ 的 z，这个级数是(绝对)收敛的。在这个区域内，关于 z 的结果函数是一个解析函数，也就是说，在这个区域的每一点，它都有一个关于复变量 z 严格定义的导数，这是该函数的一个很好性质。当 $|z|<R_1$ 时，该级数发散。而对于圆 $|z|=R_1$ 上的求和运算的收敛性需要更严格的检查，且依赖于这个级数在圆上的特殊性。

该级数可能在圆的所有点、某些点上收敛(但可能并非绝对收敛)，甚至在任何一个点上都不收敛。$|z|>R_1$这个区域被看作幂级数在非负时间部分的ROC。

接下来考虑负时间部分：

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n}=\sum_{m=1}^{\infty} x[-m]z^{m} \tag{1.74}$$

上式是z的幂级数，收敛半径为R_2。该级数在$|z|<R_2$范围内收敛(绝对)，这个区域组成了它的ROC。在这个区域内，该级数是个解析函数。当$|z|>R_2$时，该级数发散。而对于圆$|z|=R_2$上的求和运算的收敛性需要更严格的检查，且依赖于这个级数在圆上的特殊性，该级数可能在圆的所有点、某些点上收敛(但可能并非绝对收敛)，甚至在任何一个点上都不收敛。如果$R_1<R_2$，那么$x[n]$的z变换在$R_1<|z|<R_2$范围内收敛(绝对)，这个环形区域就是它的ROC。这个变换在该区域上是解析的，而定义这个变换的级数在$|z|<R_1$和$|z|>R_2$的区域内是发散的。如果$R_1>R_2$，那么z变换不存在(例如，$x[n]=0.5^n u[-n-1]+2^n u[n]$)。如果$R_1=R_2$，那么变换在技术意义的层面上是存在的，但是作为$z$变换没有什么用处，因为它并没有收敛域。然而，如果$R_1=R_2=1$的话，那么应该还是能够计算和使用DTFT。比如，对所有n，都有$x[n]=3$，或者$x[n]=(\sin\Omega_0 N)/(\pi n)$，通过引入广义函数，如频域上的冲激和阶跃函数，其DTFT是可以使用的。

与收敛域相关的信号性质

对于一个绝对可和的序列(比如一个BIBO稳定系统的冲激响应)，即ℓ^1信号，单位圆一定包含在收敛域内，或者说单位圆一定是ROC的一个边界。类似地，能得到这样一个结论：如果ROC包含了单位圆，那么这个信号就是ℓ^1信号。这是因为这个变换在收敛域里绝对收敛。如果单位圆构成了收敛域的一个边界，那么，通常来说，需要进行更深入的分析才能确定信号是不是ℓ^1信号。正如下面会详细说明的那样，有理变换式在ROC的边界上总是有一个极点，由此可知，如果单位圆在一个有理变换的ROC的边界上，那么单位圆上有极点，对应的信号不可能是ℓ^1信号。

18

对于一个右边信号，它会有$R_2=\infty$的情况，也就是说，ROC从半径为R_1的圆上向外延伸到复平面上任何一处，直至(甚至包括)∞。如果信号在负时间为零，那么ROC就包含∞。

这里可以说明一种相反的结果，例如，知道信号仅仅由单边指数函数的求和形式组成，该形式在反变换时能得到一个有理变换。在这种情况下，如果$R_2=\infty$，那么信号一定是右边的；如果收敛域包含∞，那么信号是因果的，也就是说，当$n<0$时，信号为零。

对于一个左边信号，$R_1=0$，也就是说，收敛域从半径为R_2的圆上向内延伸，直至(甚至包括)零点。如果信号在正时间都为零，那么收敛域就包含$z=0$。

对于单边指数函数求和形式的信号，有类似的结论：如果$R_1=0$，那么信号是左边的；如果收敛域包含$z=0$，那么信号一定是反因果的，也就是说，当$n>0$时，信号为零。就像前面所说的，ROC不可能包含z变换的极点，因为极点上z的取值会使变换有无限的幅度，而ROC是由那些变换收敛的z构成的。对那些有理变换的信号，能利用这类信号是单边指数函数求和形式这一事实，来表明ROC可能的边界实际上正好是由极点的位置决定的。具体来说：

(1)在有理变换式的情况中，收敛域的外边界圆包含一个极点，且它的半径是∞。如果外边界圆在无限远处，那么(如上文提到过的)这个信号是右边信号，如果在∞处没有极点，那么信号就是因果的。

(2)在有理变换式的情况中，收敛域的内边界圆包含一个极点，且它的半径是0。如果内边界圆收缩至0点，那么(如上文提到过的)信号是左边的，如果在零点没有极点，那么信号就是反因果的。

逆 z 变换

一种将有理 z 变换进行逆变换的方法是利用部分分式展开式，然后要么直接求出每个部分分式表达式的逆变换，要么是令表达式在特定的 ROC 内按照 z 收敛的幂级数的形式展开，如下：

$$\frac{1}{1-az^{-1}} \tag{1.75}$$

如果对于 ROC 中的 z 有 $|a|<|z|$，那么就能以 az^{-1} 的幂级数展开；如果对于 ROC 中的 z 有 $|a|>|z|$，则能以 $a^{-1}z$ 的幂级数展开。在部分分式展开式中，对每个表达式都进行这个过程，就能发现信号 $x[n]$ 是左边和右边指数函数的求和。对于无理的变换式，就可能不能用部分分式展开法来简单处理，但通过把表达式展开成一个具有同样 ROC 的幂级数的方法，仍然可以合理地求出逆变换。

[19]

虽然通常会使用部分分式或者幂级数的方法来进行逆 z 变换，但是这里有个和逆 DTFT 类似的显式公式(explicit formula)，具体来说，

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(z)z^{n}\mathrm{d}\Omega\Big|_{z=\bar{r}e^{j\Omega}} \tag{1.76}$$

式中，通过选择常数 $\bar{r}$ 来使得 z 在 ROC 中。这不是最普遍的逆变换公式，但是对使用来说已经足够了，而且上式还表明了 $x[n]$ 可以表达成离散时间指数函数的加权组合的形式。

和傅里叶变换一样，在基础的信号与系统课本中，许多有用的 z 变换对和变换性质都已完成推导且制成表。合理地运用这些变换对和变换性质，经常能得到许多其他信号的 z 变换和逆 z 变换。

1.4.2 双边拉普拉斯变换

和 z 变换一样，在某种程度上，引入拉普拉斯变换是为了解决某些没有 CTFT 变换的重要信号。它也增强了对 CTFT 的理解，拉普拉斯变换的定义如下：

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{1.77}$$

式中，s 是个复变量，且 $s=\sigma+j\omega$。因此，拉普拉斯变换可看作 $x(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的 CTFT。只要 σ 选择合理，甚至对于那些没有 CTFT 的信号来说，式(1.77)的积分都是存在的。

拉普拉斯变换的推导和前一节中 z 变换的推导非常类似，只是 e^{σ} 扮演着 r 在 1.4.1 节中扮演的角色。随着积分上下限趋近于 $\pm\infty$，用来定义积分收敛的 s 的取值集合组成了拉普拉斯变换 $X(s)$ 的 ROC。现在，收敛域由允许的最小和最大的 σ 决定，分别表示为 σ_1 和 σ_2。σ_1 和 σ_2 可以看作收敛域的横坐标。相应的收敛域是在复平面上的 σ_1 和 σ_2 之间的垂直带，其中 $\sigma_1<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_2$。式(1.77)在收敛域内绝对收敛，垂直带左右两边的边界垂直线的收敛性，则必须要各自验证。而且，这个变换在整个收敛域上是解析的(也就是说，作为一个复函数是可微分的)。这个带向左可延伸到 $\sigma_1=-\infty$，向右可延伸到 $\sigma_2=\infty$。如果收敛域收缩成一条线(如果这样，收敛域就消失了)，那么拉普拉斯变换就没有作用了(除非这条线恰好是 $j\omega$ 轴，在这种情况下，CTFT 分析有可能被恢复)。

比如，考虑 $x_1(t)=\mathrm{e}^{at}u(t)$。如果 $\mathrm{Re}\{s\}>a$，式(1.77)的积分求值为 $X_1(s)=1/(s-a)$。另一方面，对于 $x_2(t)=-\mathrm{e}^{at}u(-t)$，如果 $\mathrm{Re}\{s\}<a$，式(1.77)的积分求值为 $X_2(s)=1/(s-a)$。和 z 变换一样，注意到上述变换的表达式是完全相同的，而仅仅通过不同的收敛域来区分。

[20]

ROC 可能和信号的性质相关。比如，对于绝对可积的信号，也称为 L^1 信号，在 $j\omega$ 轴上，拉普拉斯变换定义中的被积函数是绝对可积的，所以 $j\omega$ 轴在 ROC 中或者在边界上。从另一角度来说，如果 $j\omega$ 轴严格地在收敛域中，那么信号是 L^1 信号，因为积分在 ROC 中绝对收敛。回想一下，当且仅当系统是 BIBO 稳定的，系统有一个 L^1 冲激响应，所以这里的结果和稳定性的讨论有关：如果 $j\omega$ 轴严格地在系统函数的 ROC 中，那么系统就是

BIBO稳定的。

对于右边信号，收敛域是某个右半平面(即对所有的 s 都有 $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_1$)，因此因果系统的系统函数会有一个某右半平面的ROC。对于左边信号，收敛域是某个左半平面。对于有理变换式的信号，收敛域不包含极点，收敛域的边界有极点。由于和虚轴有关的传递函数ROC的位置与BIBO稳定性是有关系的，又由于极点表示了收敛域的边界，所以极点和稳定性相关。特别地，当且仅当所有的极点都是有限的，而且都在左半平面内，一个右边冲激响应的系统(比如，一个因果系统)是稳定的，因为这恰恰是允许ROC包括整个虚轴的条件。还会注意到，当且仅当它是右边信号，具有有理变化式且在无穷远处没有极点的信号是因果的。

一个值得回顾的更深层次的性质与指数函数是LTI系统特征函数这一事实相关。用 $H(s)$ 表示一个LTI系统冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换，那么，如果 s_0 在传递函数的收敛域中，系统的输入为 $e^{s_0 t}$，产生的输出是 $H(s_0)e^{s_0 t}$。

1.5　连续时间信号的离散时间处理

许多现代应用系统，如通信、娱乐、导航和控制，都是利用CT子系统和DT子系统各自内在的性质和优点，并将其组合起来而实现的。尤其是CT信号的DT处理在这些应用中都很常见，这里将描述在这些处理过程背后的基本理念。和前面的章节一样，主要讨论的是对相似内容的回顾，包括建立相关的标记法，以便为后面章节提供参考。在本节中，包括在全书中，会经常把CT信号的CTFT和DT信号的DTFT联系起来，其中DT信号是由CT信号采样得到的。为了清楚地分辨哪个是CT信号，哪个是DT信号，如果需要的话，将使用下标c和d来区分。

21

1.5.1　CT信号的DT处理过程的基本结构

图1.5描绘的是这个处理过程的基本结构。其中包括能得到输入的CT信号的采样序列的连续/离散(C/D)转换器；后面连接一个DT滤波器，目的是产生想要的CT输出的采样序列；然后接一个离散/连续(D/C)转换器，作用是从采样序列中重构这个想要的CT输出信号。这里通常会有一些限制条件，使得在满足这些条件的情况下图1.5中的整个系统和LTI CT系统等价。这种必要的限制条件通常包括将这个DT滤波器约束在一个系统频率响应为 $H_d(e^{j\Omega})$ 的LTI处理过程中，也要求输入 $x_c(t)$ 是一个合适的带限信号。为了满足后一个要求，典型的做法是，在图中所示结构前面放置一个滤波器，该滤波器的目的就是保证 $x_c(t)$ 受到实质上的带宽限制。虽然这个滤波器通常被看作抗混叠滤波器，但如果DT系统能去除掉混叠部分，通常也可以允许在C/D转换器里存在一些混叠，这样整个系统还是一个CT LTI系统。

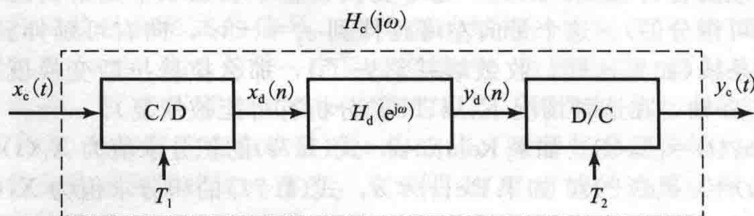


图1.5　CT信号的DT处理过程

图1.5中理想的C/D转换器的输出是 $x_c(t)$ 的采样序列，采样间隔为 T_1，于是DT信号就是 $x_d[n]=x_c(nT_1)$。因此，从概念上来说，理想的C/D转换器的理念简单明了。一个实际的模拟/数字(A/D)转换器同样会把信号量化到一系列有限的输出电平上去。但是在本书中，不考虑量化的附加影响。

在频域，$x_c(t)$的 CTFT 和 $x_d[n]$的 DTFT 之间的关系可以用下式来表示：

$$X_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T_1}=\frac{1}{T_1}\sum_k X_c\left(j\omega-jk\frac{2\pi}{T_1}\right) \tag{1.78}$$

当 $x_c(t)$带宽充分受限时，有

22

$$X_c(j\omega)=0,\quad |\omega|\geqslant\frac{\pi}{T_1} \tag{1.79}$$

也就是说，当采样率等于或者高于奈奎斯特速率时，式(1.78)可以写为

$$X_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T_1}=\frac{1}{T_1}X_c(j\omega),\quad |\omega|<\pi/T_1 \tag{1.80a}$$

或者，等价地，

$$X_d(e^{j\Omega})=\frac{1}{T_1}X_c\left(j\frac{\Omega}{T_1}\right),\quad |\Omega|<\pi \tag{1.80b}$$

注意到 $X_d(e^{j\Omega})$在$|\Omega|<\pi$ 的区间范围以外周期性重复。

图 1.5 中的理想 D/C 转换器通过插值关系定义如下：

$$y_c(t)=\sum_n y_d[n]\frac{\sin(\pi(t-nT_2)/T_2)}{\pi(t-nT_2)/T_2} \tag{1.81}$$

上式表示 $y_c(nT_2)=y_d[n]$。由于上述求和的每个式子的带宽都被限制在$|\omega|<\pi/T_2$，CT 信号 $y_c(t)$同样也在这个频率范围内带宽受限，所以 D/C 转换器能被更彻底地看作理想带限插值转换器。在式(1.79)的假设下，图 1.5 的 C/D 转换器也具有类似的特征，这主要是因为 CT 信号 $x_c(t)$也是 DT 序列 $x_d[n]$的理想带限插值。

因为 $y_c(t)$是带宽受限的，而且 $y_c(nT_2)=y_d[n]$，与式(1.80)表示的关系相似，在 $y_d[n]$的 DTFT 和 $y_c(t)$的 CTFT 之间有

$$Y_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T_2}=\frac{1}{T_2}Y_c(j\omega),\quad |\omega|<\pi/T_2 \tag{1.82a}$$

或者，等价地，

$$Y_d(e^{j\Omega})=\frac{1}{T_2}Y_c\left(j\frac{\Omega}{T_2}\right),\quad |\Omega|<\pi \tag{1.82b}$$

图 1.6 表示的是理想 D/C 转换器的一种概念。此图把式(1.81)表示为均匀分布的间隔为 T_2 冲激序列的结果，其中 T_2 是重构间隔，冲激强度由 $y_d[n]$给出，然后把上面的结果通过一个增益为 T_2、通带为$|\omega|<\pi/T_2$ 的理想低通滤波器 $L(j\omega)$。这个操作产生带限 CT 信号 $y_c(t)$，该信号是在 $t=nT_2$ 时刻，对特定序列 $y_d[n]$进行插值得到的，也就是说，$y_c(nT_2)=y_d[n]$。

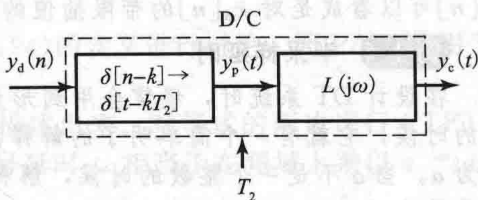


图 1.6　一个理想 D/C 转换器的处理过程。使用重构间隔 T_2 对 DT 序列进行插值，使它成为一个 CT 信号

23

1.5.2　DT 滤波以及全局 CT 响应

除非另外声明，现在假设 $T_1=T_2=T$。如果在图 1.5 中，满足式(1.79)的带宽限制条件，且令 $y_d[n]=x_d[n]$，那么有 $y_c(t)=x_c(t)$。更一般来说，当图 1.5 中的 DT 系统是一个频率响应为 $H_d(e^{j\Omega})$的 LTI DT 滤波器时，有

$$Y_d(e^{j\Omega})=H_d(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega}) \tag{1.83}$$

而且如果 $x_c(t)$的任何混叠分量被 $H_d(e^{j\Omega})$消除，那么联合式(1.80)、式(1.82)和式(1.83)，可以得到

$$Y_c(j\omega)=H_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}X_c(j\omega),\quad |\omega|<\pi/T \tag{1.84}$$

于是，整个系统的行为和有如下频率响应的 CT 滤波器是等价的：

$$H_c(j\omega)=H_d(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\omega T},\quad |\omega|<\pi/T \tag{1.85}$$

换句话说，在上面提到的带宽限制和采样率约束的条件下，整个系统特性和 LTI CT

滤波器一样，而且这个滤波器的响应和通过一个简单频率缩放的嵌入式 DT 滤波器有关。如果这个 DT 滤波器消除了其他混叠分量，那么其采样率就能够低于奈奎斯特速率。

如果希望使用图 1.5 中的系统来实现一个频率响应为 $H_c(j\omega)$的 CT LTI 滤波器，要根据式(1.85)来选择 $H_d(e^{j\Omega})$，并假设 $x_c(t)$是带宽受限的。如果定义 $H_c(j\omega)=0$ 对于所有 $|\omega|\geqslant\pi/T$ 都成立，那么式(1.85)也对应于下面 DT 和 CT 冲激响应之间的关系：

$$h_d[n]=Th_c(nT) \tag{1.86}$$

因此，该 DT 滤波器是 CT 滤波器的采样版本。当 $x_c(t)$和 $H_d(e^{j\Omega})$带宽限制不够充分时，不能避免在 $y_d[n]$中有混叠分量，那么图 1.5 中的整个系统就不再是时不变的。但是，由于它是线性子系统的级联，所以它仍然是线性的。

接下来的两个例子说明了式(1.85)和图 1.5 的用处，两个例子都是为了说明 CT 信号的 DT 处理过程和两个重要的 DT 系统的插值。

例 1.3 数字微分器

在这个例子中，希望用一个图 1.5 所示结构的 DT 系统实现一个 CT 微分器。需要选择$H_d(e^{j\Omega})$，从而使得 $y_c(t)=\dfrac{dx_c(t)}{dt}$，假设 $x_c(t)$带宽受限于 π/T。因此，想得到的全局 CT 频率响应就是

$$H_c(j\omega)=\frac{Y_c(j\omega)}{X_c(j\omega)}=j\omega \tag{1.87}$$

于是，利用式(1.85)，选择的 $H_d(e^{j\Omega})$为

$$H_d(e^{j\Omega})\,|_{\Omega=\omega T}=j\omega,\quad |\omega|<\frac{\pi}{T} \tag{1.88a}$$

或者，等价地，

$$H_d(e^{j\Omega})=j\Omega/T,\quad |\Omega|<\pi \tag{1.88b}$$

一个频率响应为式(1.88b)的 DT 系统通常被看作数字微分器。为了理解该数字微分器的输入 $x_d[n]$和输出 $y_d[n]$的关系，注意到 $y_c(t)$——它是 $y_d[n]$的带限插值——是求导 $x_c(t)$得到的，而 $x_c(t)$反过来又是 $x_d[n]$的带限插值。接下来顺理成章，实际上也是这样，$y_d[n]$可以看成是对 $x_d[n]$的带限插值的导数进行采样的结果。◀

例 1.4 半采样延时

在设计 DT 系统时，经常会用到形如 $e^{-j\alpha\Omega}$ 的相位因子，其中$|\Omega|<\pi$。当α是一个整数的时候，它就有一个简单明了的解释：它仅仅对应于一个时间序列的整数时移，时移长度为 α。当 α 不是一个整数的时候，解释就不那么明显了，因为一个 DT 序列的时移只能是整数的。

在这个例子中，考虑$\alpha=\dfrac{1}{2}$的情况，也就是半采样延时。为了提出一种解释，考虑选择图 1.5 中 DT 系统的可能结果，该系统的频率响应为

$$H_d(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega/2},\quad |\Omega|<\pi \tag{1.89}$$

通过对CT 信号采样，不管能不能明确地得到 $x_d[n]$，都可以把 $x_d[n]$和它的带限插值式 $x_c(t)$联系起来，其中规定的采样间隔或者重构间隔都是 T。相似地，也能够通过重构间隔 T 把 $y_d[n]$和它的带限插值式 $y_c(t)$联系起来。由式(1.89)给出的 $H_d(e^{j\Omega})$，与 $y_c(t)$和 $x_c(t)$相关的等价 CT 频率响应就是

$$H_c(j\omega)=e^{-j\omega T/2} \tag{1.90}$$

上式表示延时是 $T/2$，也是采样间隔的一半。于是，$y_c(t)=x_c(t-T/2)$。因此可得到结论，对于一个由式(1.89)给出频率响应的 DT 系统，DT 输出 $y_d[n]$对应于输入序列 $x_d[n]$的带限插值的半采样延时的样点值。注意，在这个插值过程中，T 值的选择是不重要的。

24
25

前述的插值过程可以通过一个简单的论证来找到半采样系统的单位采样(或者冲激)响应。如果 $x_d[n]=\delta[n]$，那么 $x_c(t)$一定是它的带限插值(其中，可以指定某些 T 取任意特定的值)，所以

$$x_c(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \tag{1.91}$$

于是

$$y_c(t)=\frac{\sin(\pi(t-(T/2))/T)}{\pi(t-(T/2))/T} \tag{1.92}$$

上式给出了期望的单位采样响应，即

$$y_d[n]=h_d[n]=\frac{\sin(\pi(n-(1/2)))}{\pi(n-(1/2))} \tag{1.93}$$

这样的半采样延时的讨论也可以直接推广到 α 取任意整数或者非整数的情况。◀

1.5.3 非理想的D/C转换器

在1.5.1节中，通过式(1.81)的带限插值方程，定义了理想的D/C转换器，也在图1.6中进行了描述，这相当于通过一个理想的低通滤波器来处理一系列冲激信号，其中冲激信号的强度等于 $y_d[n]$的值。在一种更普遍形式的D/C转换器中，理想转换器作为它的一个特例，可根据下式从DT信号 $y_d[n]$中产生出一个CT信号 $y_c(t)$：

$$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_d[n]p(t-nT) \tag{1.94}$$

式中，$p(t)$是某个经过选择的基本冲激，T 是重构的间隔或者说是冲激重复的间隔。这也可以看作通过一个滤波器处理一连串冲激序列值的结果，只是这个滤波器的冲激响应是 $p(t)$，而不是一个理想的低通滤波器。于是，通过把这些基本的冲激的时移和缩放的版本相加，CT信号 $y_c(t)$就能够被重构出来；数字 $y_d[n]$对 $p(t-nT)$进行缩放，$p(t-nT)$是由基本冲激延时 nT 得到的。应注意，式(1.81)中的理想带限插值转换器可以通过下式得到：

$$p(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \tag{1.95}$$

在第3章中，将会利用脉冲幅度调制(PAM)对式(1.94)的含义进行讨论，而PAM是用于在CT信道上对DT信息进行通信的。

在频域上，式(1.94)中的关系也能够很简单地描述出来。对等式的两边进行CTFT，用 $P(\mathrm{j}\omega)$来表示 $p(t)$的CTFT，并利用在时域上信号延时 t_0 相当于在频域上乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 这一事实，得到 [26]

$$Y_c(\mathrm{j}\omega)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_d[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T}\right)P(\mathrm{j}\omega)=Y_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}P(\mathrm{j}\omega) \tag{1.96}$$

在这个特殊的例子中，$p(t)$就是式(1.95)中的sinc脉冲，它的变换 $P(\mathrm{j}\omega)$在 $|\omega|<\pi/T$ 的区域内是常数 T，而在其他区域为0，这里恢复出了式(1.82)中对应的关系。

事实上，理想的频率特性只能被近似，而且近似的精度和实现的代价相关。一个常用的简单近似就是(中心)零阶保持(ZOH)，这里选择的基本脉冲是

$$p_z(t)=\begin{cases}1, & |t|<T/2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.97}$$

这个D/C转换器保持信号在 n 时刻的值，也就是值 $y_d[n]$，保持时长为 T，其中心点在CT域的 nT，正如图1.7所示。当然，这种中心的ZOH是非因果的，但是很容易用非中心的因果ZOH来代替，这里的基本脉冲是

$$p_{z'}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.98}$$

这种 ZOH 转换器应用很广泛。

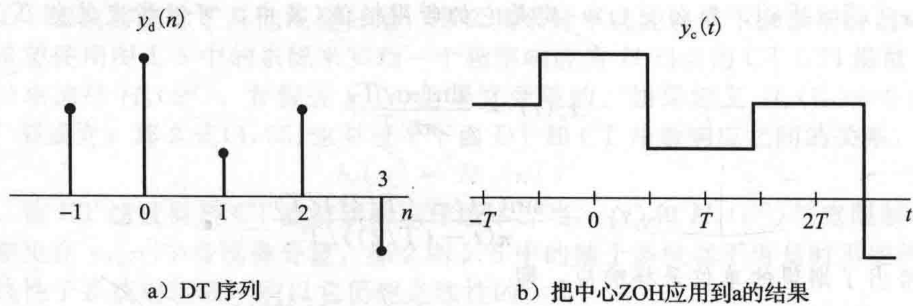


图 1.7 中心零阶保持

另外一种常见的选择是中心一阶保持(FOH)，如图 1.8 所示，这里的基本脉冲 $p_f(t)$是三角形的。FOH 表示在序列值之间的线性插值。当然，根据奈奎斯特采样定理的要求，ZOH 和 FOH 的应用都不能等价于精确的带宽受限的内插。中心 ZOH 脉冲的变换是

$$P_z(j\omega) = T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \tag{1.99}$$

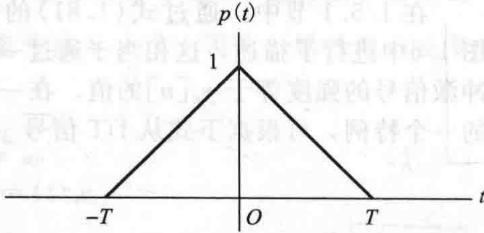


图 1.8 中心一阶保持基本脉冲 $P_f(t)$

27

中心 FOH 脉冲的变换是

$$P_f(j\omega) = T\left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right)^2 \tag{1.100}$$

图 1.9 展示了理想带限插值、ZOH 和 FOH 的傅里叶变换幅度。

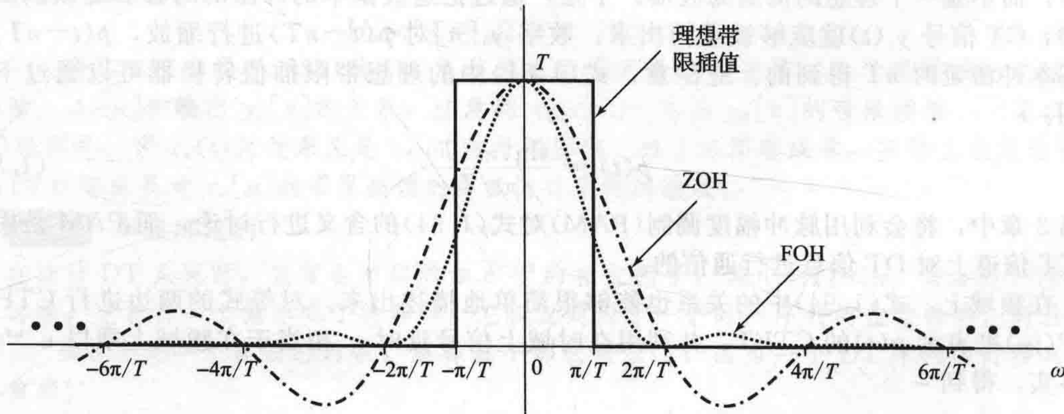


图 1.9 理想带限插值、ZOH 和 FOH 的傅里叶变换幅度

1.6 延伸阅读

正如在前言中提到的，本书假定读者具有连续和离散时间的信号与系统分析的知识基础。第 1 章和第 2 章紧随[Op1]所述的发展，主要在于回顾和总结基本概念和建立标记法。相关内容中对于计算的探讨可以在[Buc]和[McC]中找到。关于基础信号与系统的其他内容包括[Ch1][Ha1][Kwa][La1][Phi]和[Rob]。大量的观点能够在[Sie]中找到，它强调的是连续时间信号与系统。关于离散时间信号与系统的更进一步讲解可参考[Op2]，也可以在[Mit][Mal][Pra]和[Pr1]中找到。[Vet]中的几何处理采用了希尔伯特空间向量信号的观点。有关信号与系统和傅里叶变换的经典且高级的书籍是[Bra][Gui][Pa1][Pa2]和[Pa3]，它们都提供了有用的观点。[Cha]中的傅里叶理论的处理方法是简明而又具有启发性的。

28

习题

基础习题

1.1 确定以下系统是否满足这些系统性质：线性、时不变性、因果性、BIBO稳定性。

(a) 系统输入为 $x(t)$，输出为 $y(t)$，输入输出关系是

$$y(t)=x^4(t),\quad -\infty<t<\infty$$

(b) 系统输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$，输入输出关系是

$$y[n]=\begin{cases}0, & n\leqslant 0\\ y[n-1]+x[n], & n>0\end{cases}$$

(c) 系统输入为 $x(t)$，输出为 $y(t)$，输入输出关系是

$$y(t)=x(4t+3),\quad -\infty<t<\infty$$

(d) 系统输入为 $x(t)$，输出为 $y(t)$，输入输出关系是

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad -\infty<t<\infty$$

1.2 给定一个特定的 LTI 系统，其冲激响应为 $h_0(t)$，而且已知当输入为 $x_0(t)$ 时，输出 $y_0(t)$ 的波形如图 P1.2 所示。

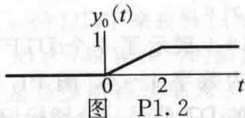


图 P1.2

下面给出一系列输入 $x(t)$ 和对应的 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$。

	输入 $x(t)$	冲激响应 $h(t)$
(a)	$x(t)=2x_0(t)$	$h(t)=h_0(t)$
(b)	$x(t)=x_0(t)-x_0(t-2)$	$h(t)=h_0(t)$
(c)	$x(t)=x_0(t-2)$	$h(t)=h_0(t+1)$
(d)	$x(t)=x_0(-t)$	$h(t)=h_0(t)$
(e)	$x(t)=x_0(-t)$	$h(t)=h_0(-t)$
(f)	$x(t)=\dfrac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t}$	$h(t)=\dfrac{\mathrm{d}h_0(t)}{\mathrm{d}t}$

在每种情况下，确定是否有足够的有用信息来唯一地确定输出 $y(t)$。如果能唯一确定 $y(t)$，就给出它的解析表达式并把它画出来；对那些你认为不能找出唯一的 $y(t)$ 的情况，请试着对“不能找出”进行证明。

1.3 对于下面每对信号，输入为 $x(t)$，冲激响应为 $h(t)$，使用卷积求出这个 LTI 系统的响应 $y(t)$，并画出你的结果。

(a) $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，$h(t)=u(t-1)$

(b) 这对信号如图 P1.3 所示

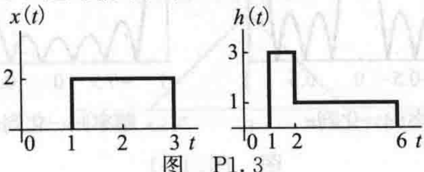


图 P1.3

1.4 (a) 考虑一个输入为 $x(t)$，输出为 $y(t)$ 的 LTI 系统，输入输出关系由下面方程确定：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\mathrm{d}\tau$$

这个系统的冲激响应 $h(t)$ 是什么？

(b) 当输入 $x(t)$ 如图 P1.4-1 所示时，确定系统的响应。

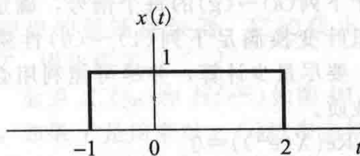


图 P1.4-1

(c) 考虑图 P1.4-2 所示的 LTI 系统的互联，这里 $h(t)$ 和(a)问中是一样的。当输入 $x(t)$ 和(b)问是一样的时候，确定输出 $w(t)$。利用(b)中的结果和卷积的性质来完成此题。不要直接使用卷积积分。

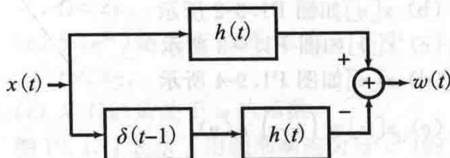


图 P1.4-2

1.5 (a) 假设对于所有的时间 t，一个系统函数为 $H(s)$ 的稳定 LTI 系统的输入信号是某个常数 α。在每个 t 处对应的输出是什么？

(b) 当对所有时刻输入都是 $x(t)=t$ 时，用 $y(t)$ 来表示经过(a)系统的输出。现在，当输入为 $t-\alpha$，α 是任意值，求出对应的输出的两种不同表达式。提示：调用系统的线性性质和时不变性，利用(a)的结果。通过合理地选择 α，使得对某些常数 b，有 $y(t)=bt+y(0)$，用 $H(s)$ 来表示 $y(t)$。

1.6 计算下列信号的 CTFT：

(a) $x(t)=\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)$

(b) $x(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$

(c) $x(t)=[\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$

1.7 在 $-\pi<\Omega\leqslant\pi$ 的范围上，计算下列信号的 DTFT：

(a) $x[n]=\begin{cases}n, & -3\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & 其他\end{cases}$

(b) $x[n]=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)+\cos(n)$

(c) $x[n]=\mathrm{e}^{-2|n|}$

(d) $x[n]=u[n-2]-u[n-6]$

(e) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}u[n+2]$

(f) $x[n]=(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

1.8 考虑一个 DT LTI 系统，它的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=e^{-j3\Omega/2},\quad -\pi<\Omega<\pi$$

如果输入是 $x[n]=\cos\left(\frac{4\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$，求输出 $y[n]$。

1.9 对于下列(a)～(g)的每个信号，确定它们的傅里叶变换满足下列(1)～(6)性质中的哪些。要尽量少计算，并尽可能利用必要的变换性质。

(1) $\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}=0$

(2) $\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\}=0$

(3) 存在 α 使得 $e^{j\alpha\Omega}X(e^{j\Omega})$是实值

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})d\Omega=0$

(5) $X(e^{j\Omega})$是周期性的

(6) $X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=0}=0$

(a) $x[n]$如图 P1.9-1 所示

(b) $x[n]$如图 P1.9-2 所示

(c) $x[n]$如图 P1.9-3 所示

(d) $x[n]$如图 P1.9-4 所示

(e) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$

(f) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+2]$

(g) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$

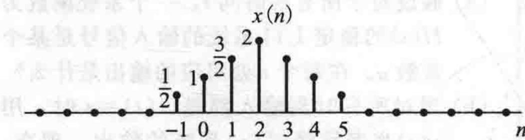


图　P1.9-1

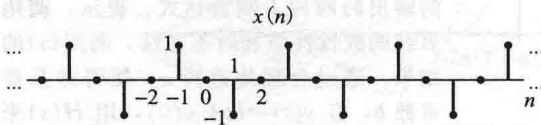


图　P1.9-2

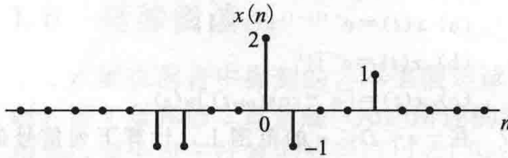


图　P1.9-3

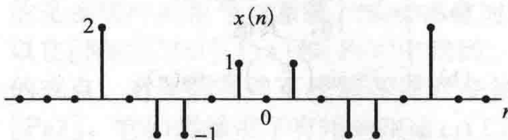


图　P1.9-4

1.10 $X(e^{j\Omega})$是 DT 信号 $x[n]$的傅里叶变换，在 $|\Omega|<\pi$ 的区间上，$X(e^{j\Omega})$的幅度和相位如图 P1.10 所示。

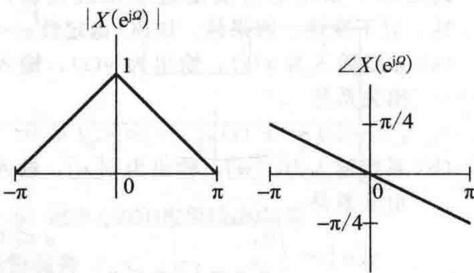


图　P1.10

(a) 在$-2\pi<\Omega<2\pi$ 的范围内，请画出的 $x[-n]$的 DTFT 幅度和相位，要求所画图形具有完整的标记。

(b) 在$-2\pi<\Omega<2\pi$ 的范围内，请画出 $x[n-1]$的 DTFT 幅度和相位，要求所画图形具有完整的标记。

1.11 一个 DT 信号 $x[n]$的傅里叶变换如下：

$$X(e^{j\Omega})=e^{j2\Omega}(1-e^{-j3\Omega})$$

请求出 $x[n]$。

1.12 图 P1.12-1 展示了 4 个 DTFT 的幅度，分别标记为数字 1～4。图 P1.12-2 展示了 4 个关联的 DT 信号，分别标记为 A～D，但它们是按随机顺序排列的。

(a) 将 DTFT 与对应的信号进行配对。解释为什么要选择这个组合。

(b) 1 和 4 的 DTFT 的刻度没有标上去。图上的刻度或者最大的幅度应该是多少？为什么？

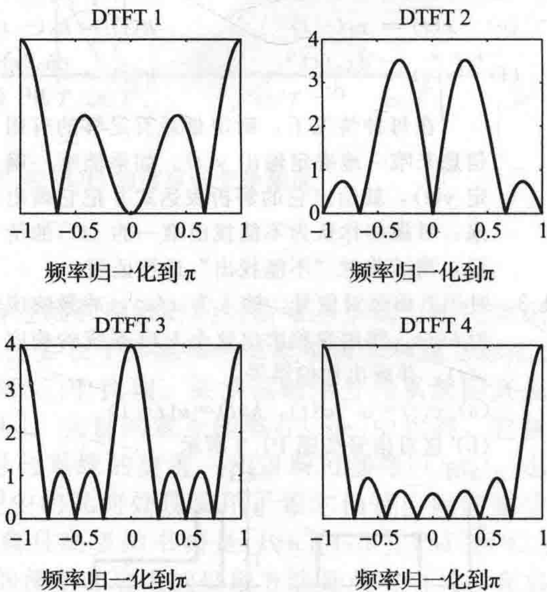


图　P1.12-1

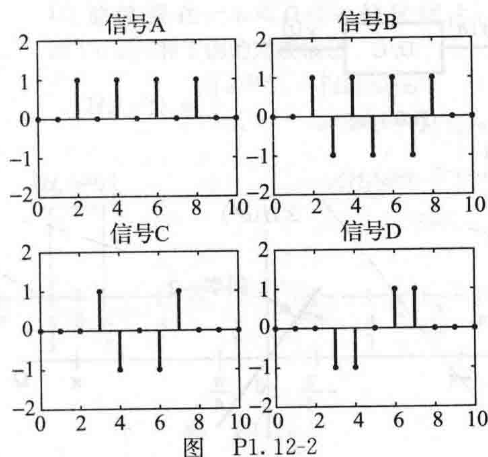


图 P1. 12-2

1.13 (a) 确定下面这个序列的傅里叶变换：

$$r[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

注意其中的 M 可能不是偶数。

(b) 考虑序列

$$w[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi n}{M}\right), & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

用 $r[n]$ 的 DTFT 来表示 $w[n]$ 的 DTFT。

(c) 画出 $R(e^{j\Omega})$ 和 $W(e^{j\Omega})$ 的幅度。

1.14 (a) $x(t)$ 是奈奎斯特速率为 ω_c 的信号，确定下列信号的奈奎斯特速率。

(i) $x(t)+3x(t-4)$

(ii) $x(t)*\frac{\sin(3000\pi t)}{\pi t}$

(iii) $x^2(t)$

(b) 信号 $x(t)$ 是由一个带宽受限信号 $x_1(t)$ 和另一个带宽受限信号 $x_2(t)$ 通过卷积产生的，也就是说，

$$x(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

此处

$$X_1(j\omega)=0,\quad |\omega|>1000\pi$$
$$X_2(j\omega)=0,\quad |\omega|>2000\pi$$

$x(t)$ 的脉冲序列采样为

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

求出采样间隔 T 的范围，保证 $x(t)$ 能够利用 $x_p(t)$ 通过一个理想低通滤波器恢复出来。

1.15 考虑图 P1.15-1 表示的系统，用一个 DT 滤波器来处理一个 CT 信号。这里 $x[n]=x_c(nT)$，$y[n]=y_c(nT)$，而且 $L_T(j\omega)$ 是一个理想的低通滤波器，它的截止频率是 π/T，增益是 T。

如果 $X_c(j\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$ 如图 P1.15-2 所示，如果 T 是用来对 $x_c(t)$ 以奈奎斯特频率进行采样的话，那么请画出 $X_p(j\omega)$、$X(e^{j\Omega})$、$Y(e^{j\Omega})$、$Y_c(j\omega)$ 和 $Y_p(j\omega)$。

1.16 系统如图 P1.16-1 所示，$X_c(j\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$ 的幅度和相位如图 P1.16-2 所示。平滑地画出下列函数的幅度和相位，图中需要标明相关的振幅和斜率。

(a) $X(e^{j\Omega})$ 是关于 Ω 的函数，其中 $-2\pi<\Omega<2\pi$。

(b) $Y(e^{j\Omega})$ 是关于 Ω 的函数，其中 $-2\pi<\Omega<2\pi$。

(c) $X_c(j\omega)$ 是关于 ω 的函数。

1.17 图 P1.17-1 表示了用频率响应为 $H(e^{j\Omega})$ 的 LTI DT 滤波器实现一个 CT 滤波器。

(a) 如果 $x_c(t)$ 的 CTFT，即 $X_c(j\omega)$ 如图 P1.17-2 所示，且 $\Omega_c=\frac{\pi}{5}$，对于下列情况，画出并标记 $X(e^{j\Omega})$、$Y(e^{j\Omega})$ 和 $Y_c(j\omega)$。

(i) $\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2}=2\times10^4$

(ii) $\frac{1}{T_1}=4\times10^4$，$\frac{1}{T_2}=10^4$

(iii) $\frac{1}{T_1}=10^4$，$\frac{1}{T_2}=3\times10^4$

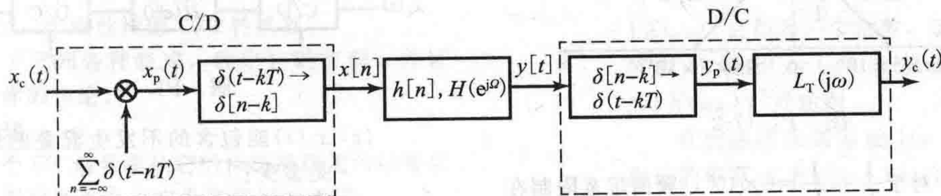
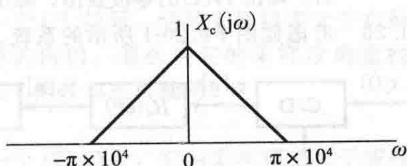


图 P1.15-1



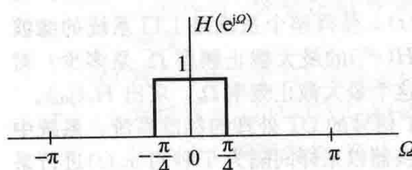


图 P1.15-2

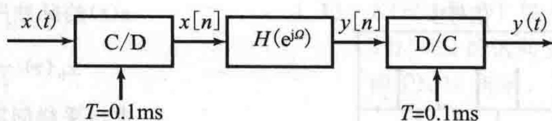
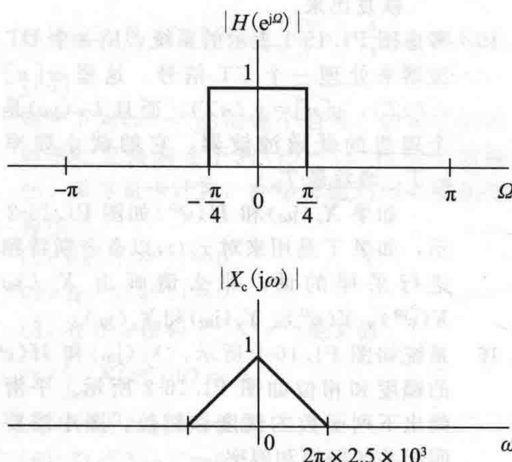


图 P1.16-1



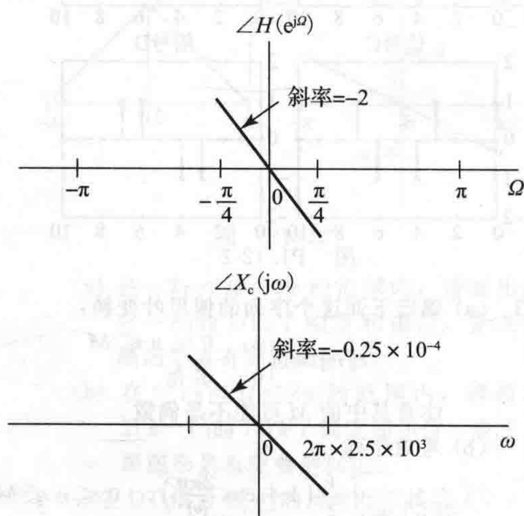


图 P1.16-2

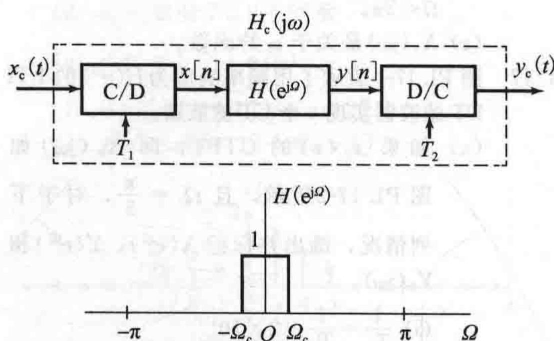


图 P1.17-1

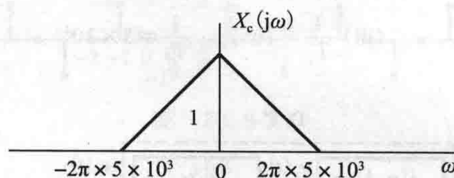


图 P1.17-2

(b) 对于 $\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2}=6\times10^3$，频谱带宽限制在 $|\omega|<2\pi\times5\times10^3$（其他频带无限制）的 $x_c(t)$，使得整个系统是 LTI 系统的滤波器 $H(e^{j\Omega})$ 的最大截止频率 Ω_c 是多少？对于这个最大截止频率 Ω_c，求出 $H_c(j\omega)$。

1.18 考虑 CT 信号的 DT 处理的标准系统，系统中 C/D 转换器以采样间隔为 T 秒对 $x_c(t)$ 进行采样，但理想 D/C 转换器在输出端使用间隔为 T 秒进行重构，产生一个对采样值 $y[n]$ 的带限插值。令在两个转换器之间的 LTI 系统是一个陷波滤波器，即在 $\Omega=\pm\Omega_0$ 的地方（这里的 $\Omega_0>0$ 称为陷波频率），频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 值为 0，而在 $|\Omega|<\pi$ 的其他地方，频率响应都不是 0。令输入信号有如下的形式：

$$x_c(t)=\cos(\omega_{in}t+\theta)$$

对所有的 ω_{in}，确定哪些取值会使输出 $y_c(t)$ 恒等于 0。

1.19 带限 CT 信号 $x_c(t)$ 包含 60Hz 的分量，我们希望用图 P1.19 所示的系统来消除该频率分量。令 $T=2\times10^{-4}\,s$ 且

$$H(e^{j\Omega})=\frac{(1-e^{-j(\Omega-\Omega_0)})(1-e^{-j(\Omega+\Omega_0)})}{(1-0.5e^{-j(\Omega-\Omega_0)})(1-0.5e^{-j(\Omega+\Omega_0)})}$$

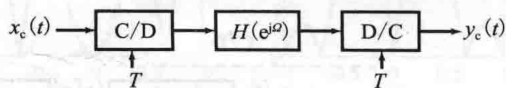


图 P1.19

(a) $x_c(t)$ 能包含的不发生混叠的最高频率是多少？

(b) Ω_0 的取值应该是多少？

(c) 画出 $H(z)$ 的零极点图，画出 $|H(e^{j\Omega})|$。

1.20 考虑如图 P1.20-1 所示的系统。

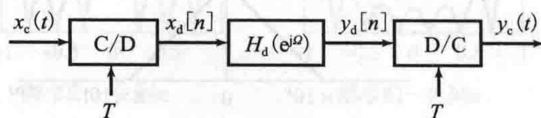


图 P1.20-1

DT滤波器在$-\pi<\Omega<\pi$的区间上，由图P1.20-2和下面的方程描述

$$H_d(e^{j\Omega})=\begin{cases}e^{-j\Omega/3}, & |\Omega|\leqslant\pi/3\\ 0, & \pi/3<|\Omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

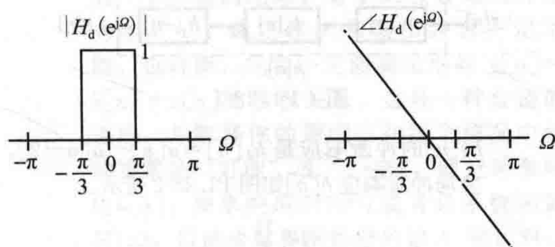


图　P1.20-2

(a) 假设用周期$T=\frac{1}{2}\times10^{-6}\,s$来进行采样。假设系统的输入是$x_c(t)=\cos(\omega_0 t)$，求出下列每种情况的输出：

(i) $\omega_0=\frac{\pi}{2}\times10^6\,\text{rad/s}$

(ii) $\omega_0=\pi\times10^6\,\text{rad/s}$

(iii) $\omega_0=\frac{7}{2}\pi\times10^6\,\text{rad/s}$

现在假设输入$x_c(t)$是带限的，当$|\omega_0|\geqslant 2\pi\times10^6\,\text{rad/s}$时，$X_c(j\omega)=0$。

(b) 求最大的采样周期T，使得输出恒等于输入(除可能的时移t_0以外)，即$y_c(t)=x_c(t-t_0)$。

(c) 求最大的采样周期T，该周期使得给定系统(频率响应为$H_d(e^{j\Omega})$)从输入到输出的表现得和一个LTI CT系统一样。

1.21　考虑一个如1.5.3节中描述的通用D/C转换器，令

$$y_d[n]=\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

对于下列情况，画出并标记出$y_c(t)$和$Y_c(j\omega)$：

(a) 一个理想的带限插值D/C转换器。

(b) 一个中心零阶保持D/C转换器。

(c) 一个线性插值D/C转换器。

1.22　对于下列各种叙述，确定它的真假，并证明你的结论。

叙述：

一个CT信号能从它的采样准确重构的要求是采样频率大于它最高频率的两倍。

叙述：

如果一个CT信号，它的采样频率大于它最高频率的两倍，那么从它的采样准确重构出该CT信号总是可能的。

叙述：

如果一个CT信号，它的采样频率大于或等于它最高频率的两倍，那么从它的采样准确重构出该CT信号总是可能的。

1.23　一个电动车在轨道上运动的简单物理模型由下面的微分方程给出，其中$y(t)$用来表示电动车的位置：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-\left(\frac{c_f}{m}\right)\frac{dy(t)}{dt}-\left(\frac{c_b}{m}\right)\frac{dy(t)}{dt}x_b(t)+x_a(t)$$

式中，$x_b(t)$是施加在轮胎上的刹车的力量；$x_a(t)$是由电动机提供的加速度；m是车的质量；c_f和c_b分别是车和刹车的摩擦系数。假设$x_b(t)\geqslant0$，但是$x_a(t)$可以为正，也可以为负。

(a) 这个模型是线性的吗？也就是说，它的非零解满足叠加原理吗？这个模型是时不变的吗？

(b) 如果刹车的力量$x_b(t)$恒等于零，上面问题的答案又会怎样改变呢？

1.24　CT信号的帕斯瓦尔定理的表述如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$$

它意味着信号的总能量能够通过对$|X(j\omega)|^2$在全部频率上的积分得到。现在考虑一个实值信号$x(t)$经过一个如图P1.24所示的理想带通滤波器$H(j\omega)$。

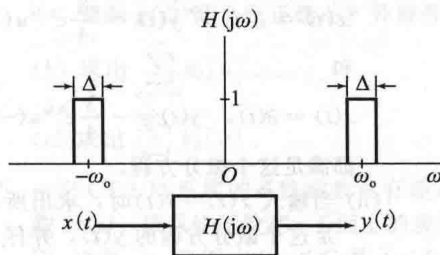


图　P1.24

(a) 把输出信号$y(t)$的能量表示为$|X(j\omega)|^2$在频率上的积分。

(b) 当Δ足够小，以至于在频率Δ区间上，$|X(j\omega)|$近似为一个常数，证明带通滤波器的输出$y(t)$的能量近似与$\Delta|X(j\omega_0)|^2$成比例。

在前述结果的基础上，在频率ω_0附近的带宽Δ上，$\Delta|X(j\omega)|^2$和信号的能量成比例。基于这个原因，$|X(j\omega)|^2$被看作信号$x(t)$的能量谱密度。

(c) 现在考虑一个DT信号$x[n]$。假设已知确定信号$x[n]$的DTFT $X(e^{j\Omega})$，在$|\Omega|<0.4\pi$上，幅度为2，在$0.4\pi\leqslant|\Omega|<\pi$上幅度未知。将该信号作为一个频率响应为

$H(e^{j\Omega})$的低通滤波器的输入，该低通滤波器的频率响应在$|\Omega|<0.25\pi$上，幅度为3，在$0.25\pi\leqslant|\Omega|<\pi$上，幅度为0。输出信号$y[n]$的能量$\sum y^2[n]$是多少？

高级习题

1.25 如果一个单位阶跃信号$u(t)$通过一个CT LTI系统的响应是$g(t)$，那么对于一个普通信号$x(t)$，它的响应是什么？如果系统是BIBO稳定的，那$g(t)$需要满足的充要条件是什么？

1.26 考虑一个由下列微分方程描述的因果LTI系统：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

该系统的逆系统也能由一个微分方程描述。求出这个描述逆系统的微分方程。还有，求出原系统和因果逆系统的冲激响应$h(t)$和$g(t)$。

1.27 (a) 输入为$x(t)$，输出为$y(t)$的LTI系统满足下面的微分方程：

$$4\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=3x(t)$$

(i) 证明输入-输出对

$$x(t)=\delta(t),\quad y(t)=\frac{3}{4}e^{0.5t}u(t)$$

和

$$x(t)=\delta(t),\quad y(t)=-\frac{3}{4}e^{0.5t}u(-t)$$

都满足这个微分方程。

(ii) 当输入$x(t)=\delta(t)$时，求出所有满足这个微分方程的$y(t)$，并仔细核实(i)中两种情况包括在你的答案中。提示：一个线性微分方程的通解就是一个特解加上一个齐次解。还注意到，一般来说，解$y(t)$不一定有拉普拉斯变换；事实上，这个问题仅有的两种有拉普拉斯变换的解就是(i)中提到的这两个。

(iii) 如果系统是因果的，它的冲激响应是多少？

(iv) 如果系统是稳定的，它的冲激响应是多少？

(b) LTI系统的输入输出满足下面的微分方程

$$y[n]-3y[n-1]=2x[n]$$

(i) 假设系统是因果的，确定它的冲激响应，也就是说，它的单位采样响应。这个系统是BIBO稳定的吗？

(ii) 反过来，假设这个系统是BIBO稳定的，确定它的冲激响应。这个系统是因果的吗？

1.28 考虑图P1.28-1所示的3个LTI系统的因果级联。

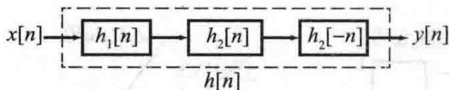


图 P1.28-1

$h_2[n]$的冲激响应是$h_2[n]=u[n]-u[n-2]$，全局冲激响应$h[n]$如图P1.28-2所示。

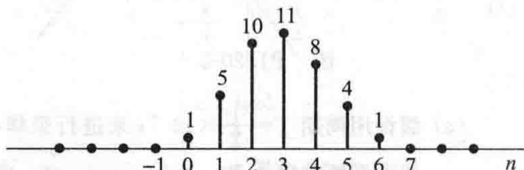


图 P1.28-2

(a) 求出$h_1[n]$的冲激响应。

(b) 求出有下面输入的全局系统响应：

$$x[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$$

1.29 注意：这道题要求使用合适的计算方法。考虑一个简单的DT差分方程

$$x[n+1]=rx[n](1-x[n]),\quad n\geqslant 0$$

假设$0<x[0]<1$和$r\geqslant 0$。

(a) 这个系统是线性的吗？是时不变的吗？

(b) 如果$x[0]=1/2$，那么要使得$x[n]$有界，r应取什么值？

(c) 选择合适的计算方法，计算并画出在r的不同取值下的$x[n]$。包括$r=k/4$，$k=1, 2, \cdots, 15$。画出图来证明你在(b)中的答案。

1.30 (a) 一个特殊的DT系统将它的输入$x[n]$映射到它的输出$y[n]$。当输入是

$$x[n]=(-1)^n,\quad 对于所有\ n$$

输出是

$$y[n]=1,\quad 对于所有\ n$$

当输入是

$$x[n]=(-1)^{n+1},\quad 对于所有\ n$$

输出还是

$$y[n]=1,\quad 对于所有\ n$$

(i) 这个系统是线性的吗？解释一下。

(ii) 这个系统是时不变的吗？解释一下。

(b) 一个特殊的DT系统将它的输入$x[n]$映射到它的输出$y[n]$。当输入是

$$x[n]=(-1)^n,\quad 对于所有\ n$$

输出是

$$y[n]=1,\quad 对于所有\ n$$

当输入是

$$x[n]=(-1)^{n+1}\quad 对于所有\ n$$

输出是

$y[n]=-1$ 对于所有 n

回答与上面(a)中(i)和(ii)同样的问题。

1.31 对于图1.31中展示的DT系统 S_1、S_2、S_3 和 S_4，标明的输入-输出对表示了对应系统的一个实验的结果。对于某些合适的冲激响应 $h[n]$，确定输入和输出是否一定不能、也许能，或者一定能满足形如 $y[n]=h[n]*x[n]$ 的卷积关系。选择一种合适的说法，并解释你的原因。在每个情况中你的答案是"可能"或"一定"，确定冲激响应 $h[n]$、频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 或者是系统函数 $H(z)$，以此来解释所给定的输入-输出对。

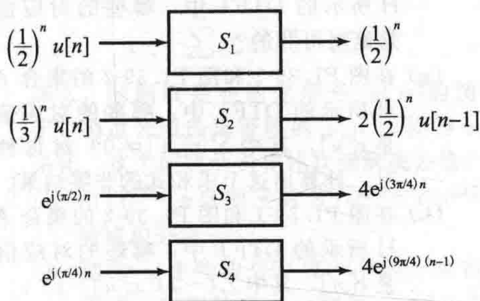


图 P1.31

1.32 确定下列说法的真假性，并给出简单的证明(对于一个假的说法，举出一个反例就可以了)

(i) 如果 $e^{jt}+e^{j3t}$ 是一个CT系统的特征函数，那么系统不是LTI系统。

(ii) 如果 $h(t)$ 是一个稳定LTI系统的非零冲激响应，那么 $h(t)$ 可以是周期性的。

(iii) 一个因果稳定的LTI系统，总是存在一个因果的逆系统，虽然这个逆系统可能不是稳定的。

1.33 考虑一个有如下频率响应的实值DT LTI系统：

$$H(e^{j\Omega})=\frac{1+ae^{-j2\Omega}+2e^{-j4\Omega}}{1+be^{-j2\Omega}}$$

确定常数 a 和 b，给出的输入-输出对如图P1.33所示。

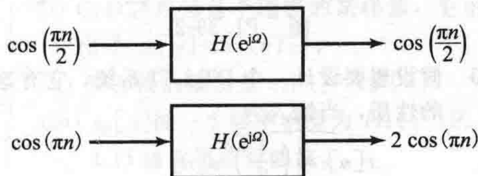


图 P1.33

1.34 考虑一个LTI系统，它的冲激响应 $h(t)$ 是实的，相关的系统函数是 $H(s)$。在整道题目中，假设输入对所有 t 时刻都有 $x(t)=e^{-3t}\cos t$，而且它对应的输出 $y(t)$ 对于这个输入是严格定义的。

(a) 如果允许你对一个单一的 s 值确定 $H(s)$ 的值，那么为了获得上述输入对应的输出 $y(t)$ 在时域上的显式表达式，你将选择 s 的哪个值呢？在你选择的 s 情况下估计出 $H(s)$，并用 $H(s)$ 的关系式写出 $y(t)$ 的表达式。

(b) 假设 $y(0)=0$ 和 $\dot{y}(0)=1$。将你在(a)中得到的 $y(t)$ 简化为如下形式 $y(t)=e^{-3t}(A\cos t+B\sin t)$，确定常数 A 和 B。

1.35 一个DT LTI系统有如下的频率响应：

$$H(e^{j\Omega})=\begin{cases}e^{-j\Omega 3}, & |\Omega|<\frac{\pi}{5}\\ 0, & \frac{\pi}{5}\leqslant|\Omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

系统的输入是周期单位采样"串(train)"，它的周期是 $N=12$：

$$x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n+12k]$$

求出系统的输出 $y[n]$。

1.36 考虑一个DT LTI系统，它的频率响应由下面的式子定义

$$H_d(e^{j\Omega})=|\Omega|e^{-jg(\Omega)},\quad |\Omega|<\pi$$

已知函数 $g(\Omega)=\Omega^2$，或是 $g(\Omega)=\Omega^3$。

(a) 已知系统的单位采样响应 $h_d[n]$ 是实的。利用这个事实来推导，上面两种可能的 $g(\Omega)$ 哪个是正确的？并解释。

(b) 求出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d[n]$。

(c) 求出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d^2[n]$。

1.37 一个CT LTI系统的系统函数是有理系统函数 $H(s)$，该系统函数在 s 平面上的表示如图P1.37所示，且图中的ROC是 $1<\mathrm{Re}\{s\}<5$。极点为1和5，且零点为0和6。还知道 $H(3)=9$。我们想要找出一个逆系统 $G(s)$，使得当 $H(s)$ 和 $G(s)$ 级联的时候，整个系统的输出 $y(t)$ 等于输入 $x(t)$。

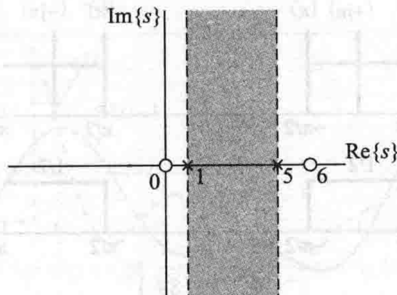


图 P1.37

(a) 写出这个系统的有理系统函数 $H(s)$。

(b) 它的一个因果逆系统存在吗？如果存在，写出它的系统函数 $G(s)$，并标出

它的 ROC。如果不存在，为什么？

(c) 它的一个 BIBO 稳定逆系统存在吗？如果存在，写出它的系统函数 $G(s)$，并标出它的 ROC。如果不存在，为什么？

(d) 它的一个双边逆系统存在吗？如果存在，写出它的系统函数 $G(s)$，并标出它的 ROC。如果不存在，为什么？

1.38 一个 DT LTI 系统，它的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=\frac{4-9e^{-j\Omega}}{4\cos\Omega+2e^{-j\Omega}-9}$$

(a) 与上面的系统响应对应的有理系统函数 $H(z)$ 可以写成下面的形式：

$$H(z)=\frac{\alpha_1}{z-\dfrac{1}{2}}+\frac{\alpha_2}{z-4}$$

求出 α_1 和 α_2，并指明 ROC。

(b) 这个系统是因果的吗？

(c) 这个系统的冲激响应 $h[n]$ 是多少？

(d) 假设这个系统的输入是对所有的 n 都有 $x[n]=3^n$。那么对应的输出 $y[n]$ 是多少？

(e) 假设这个系统的输入是对所有的 n 都有 $x[n]=3^n u[n]$，这里的 $u[n]$ 是单位阶跃函数。当 $n\to\infty$，$y[n]\to\beta z_0^n$。那 z_0 是多少？

1.39 (a) 如图 P1.39-1 的 A 所示，这是 $|\Omega|\leqslant\pi$ 的范围上 $x[n]$ 的 DTFT，那么在 $n=0$ 时，$x[n]$ 的值是多少？

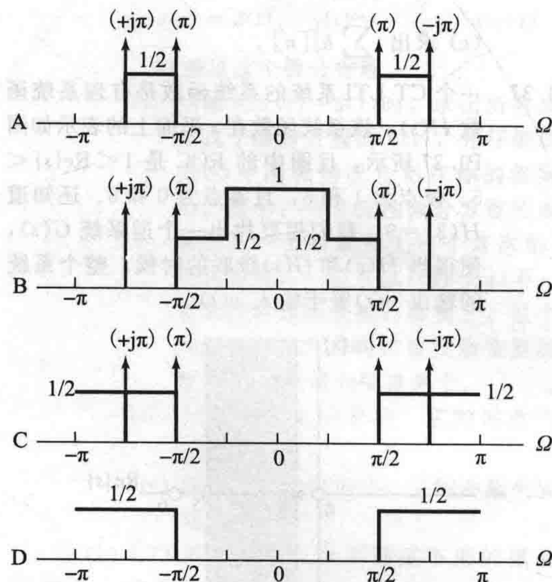


图 P1.39-1

(b) 对于一个信号 $x[n]$，有 $\sum x[n]=0$（求和式是对所有的 n 而言的），列出在图 P1.39-1 和图 P1.39-2 中 A～H 符合前述条件的 DTFT，并解释。

(c) 一个信号的 DTFT 如图 P1.39-2 所示，那么对应的 $\sum(x[n])^2$ 是多少？并解释。（求和式是对所有的 n 而言的。）

(d) 如图 P1.39-1 和图 P1.39-2（A～H）所示，确定并解释它们中的哪一个是下面信号的 DTFT

$$x[n]=\frac{\cos(3\pi n/4)\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

(e) 在图 P1.39-1 和图 P1.39-2 的集合 A～H 所示的 DTFT 中，哪些的对应信号在时间上是偶函数？

(f) 在图 P1.39-1 和图 P1.39-2 的集合 A～H 所示的 DTFT 中，哪些的对应信号是绝对可和的？

(g) 在图 P1.39-1 和图 P1.39-2 的集合 A～H 所示的 DTFT 中，哪些的对应信号是 $x[n]$，其中 $\sum x[n]\neq 0$？对每种情况，计算出这个求和式的非零结果。

(h) 在图 P1.39-1 和图 P1.39-2 的集合 A～H 所示的 DTFT 中，哪些的对应信号是 $x[n]$，其中 $\sum(-1)^n x[n]=1$？

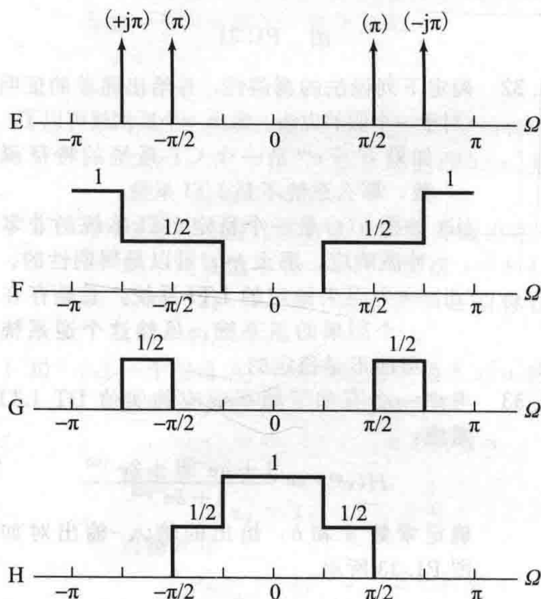


图 P1.39-2

1.40 假设想要设计一个 DT LTI 系统，它有这样的性质，当输入为

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}u[n-1]$$

它的输出是

$$y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(a) 求出满足这个性质的 DT LTI 系统的冲激响应和频率响应。

(b) 求出标识这个系统输入和输出关系的差分方程。

1.41 假设给定一个实值且能量有限(但是在其他情况下任意)的 DT 信号 $w[n]$及与它相关的 DTFT $W(e^{j\Omega})$。想要用另外一个实值、能量有限的 DT 信号 $y[n]$来近似估算$w[n]$，$y[n]$是带限的，其频率范围是$|\Omega|<\pi/4$，所以在$|\Omega|\geqslant\pi/4$ 的范围上，$Y(e^{j\Omega})$为零。除了在它的带宽限制之外，为了得到最好的近似，可以按照需要选择 $y[n]$。

假设用下列的平方误差和的标准来测量近似的精度：

$$\varepsilon=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(w[n]-y[n])^2$$

那么，问题就是在给定信号 $w[n]$的情况下，通过合理选择带限的 $y[n]$，使得 ε 最小化。这个问题会引导你找到解决办法。

(a) 用$|\Omega|<\pi$ 区间上的 $W(e^{j\Omega})-Y(e^{j\Omega})$的频域积分表示 ε。

(b) 把在(a)中的积分写成一个积分求和的形式，它们的区间分别是$-\pi/4\leqslant\Omega\leqslant\pi/4$，$\pi/4\leqslant\Omega<\pi$ 和$-\pi\leqslant\Omega<-\pi/4$。利用这个形式推导出需要怎样选择 $Y(e^{j\Omega})$，才能使 ε 最小化，最小的 ε 是多少。(提示：不要把$|a-b|^2$ 展开，对于复数 a 和 b，展开式为$|a|^2+|b|^2-ab^*-a^*b$。)

(c) 利用在(b)中的结果，写出使得 ε 最小化的 $y[n]$显式表达式，把 $y[n]$表示成一个合理的包含 $W(e^{j\Omega})$的积分。

1.42 图 P1.42-1 表示的是一个 CT 信号的 DT 处理系统。

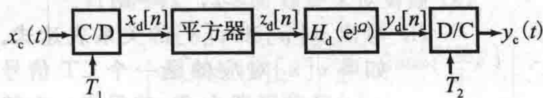


图　P1.42-1

(i) C/D 转换器是个理想的采样器，它的输出是 $x_d[n]=x_c(nT_1)$；

(ii) 平方器的输出是 $z_d[n]=x_d{}^2[n]$；

(iii) $z_d[n]$被一个频率响应为 $H_d(e^{j\Omega})$的 DT LTI 滤波器进行滤波。

(iv) D/C 转换器是一个理想带限插值器，它的输出是

$$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_d[n]\frac{\sin[\pi(t-nT_2)/T_2]}{\pi(t-nT_2)/T_2}$$

(v) 可能会(可能不会)用到的方程：

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$$
$$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$
$$\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

假设 $x_c(t)=\cos(\pi t/3T)$，$T_1=T_2/2=T$，且 $H_d(e^{j\Omega})$在$|\Omega|\leqslant\pi$ 上如图 P1.42-2 所示。求出 $y_c(t)$。

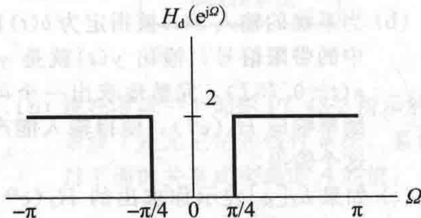


图　P1.42-2

1.43 如图 P1.43-1 所示，这是正在使用的通过一个 DT LTI 系统来对一个 CT 信号进行 DT 处理的标准图。C/D 转换器以间隔 T 进行采样，所以 $x_d[n]=x(nT)$。D/C 转换器是一个重构(或者插值)间隔为 T 的理想带限插值器，于是 $y_c(t)$的频带被限制在$|\omega|<\frac{\pi}{T}$，且 $y(nT)=y_d[n]$；$H_d(e^{j\Omega})$是这个指定 DT LTI 系统的频率响应。对于这道题目，假设 $T=10^{-3}s$。

现在考虑两个信号 $b(t)$和 $c(t)$，它们在 $0<t<6\times10^{-3}s$ 中的波形如图 P1.43-2 所示，且它们有如下的性质：

$$c(nT)=b(nT)$$

对所有的 n 都成立，不仅仅是图中画出来的取值而已。这些信号将会被用作图 P1.43-1的系统的输入。

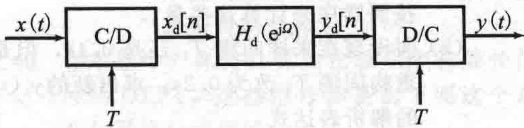


图　P1.43-1

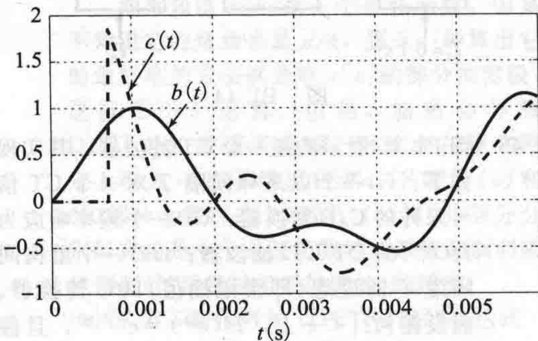


图　P1.43-2

(a) $b(t)$和 $c(t)$中有一个一定不是带宽受限

的，是哪一个？给出简要的证明。

假设接下来的另外一个信号不是你在(a)中指定的信号，该信号是在$|\omega|<\pi/T$上带宽受限的。这道题剩下的两个小问题就是$b(t)$和$c(t)$在哪道题中使用，不一定是按照这个顺序，信号输入的系统如图 P1.43-2 所示。

(b) 当系统的输入$x(t)$被指定为$b(t)$和$c(t)$中的带限信号，输出$y(t)$就是$y(t)=x(t-0.75T)$。完整地求出一个可能的频率响应$H_d(e^{j\Omega})$，使得输入能产生出这个输出。

(c) 如果$h_d[n]$表示你求出的$H_d(e^{j\Omega})$对应的单位响应，计算

$$h_d[0],\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]\quad 和\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(h_d[n])^2$$

(d) 对于在(b)中相同的系统，当输入$x(t)$为非带限信号$b(t)$或$c(t)$时，系统的输出$y(t)$又是什么？

1.44 在图 P1.44 所示的系统中，C/D 转换器以采样间隔$T_1=0.1$s 对一个 CT 信号$x_c(t)$进行采样，而在输出端的理想 D/C 转换器用重构间隔T_2对这个采样$y[n]$产生一个带限插值。两个转换器之间的 DT LTI 系统的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega/2},\quad |\Omega|<\pi$$

而且输入信号是

$$x_c(t)=\cos\left(22\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

(a) 假设 D/C 转换器的重构时间间隔是$T_2=T_1=0.1$s。求出$x[n]$、$y[n]$和$y_c(t)$的解析表达式。(不要认为一定要按照顺序来计算这些量。)

(b) 假设现在采样间隔T_1还是 0.1s，但是重构间隔T_2改为 0.2s。求出新的$y_c(t)$的解析表达式。

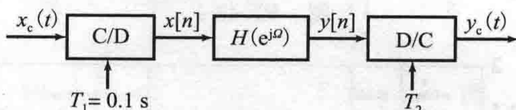


图 P1.44

1.45 图 P1.45 展示的是一个 CT 滤波器，其实现如下：(i)一个以采样间隔T对一个 CT 信号采样的 C/D 转换器；(ii)一个频率响应为$H(e^{j\Omega})$的 DT LTI 滤波器；(iii)一个重构间隔为T的理想(即带限插值)D/C 转换器。假设在$|\Omega|<\pi$上，$H(e^{j\Omega})=e^{-j0.4\Omega}$，且假设输出$y_c(t)$为

$$y_c(t)=2\frac{\sin(\pi(t-0.7T)/T)}{(\pi(t-0.7T)/T)}$$

(a) 写出能够产生上述输出且频率限制在π/T以内的输入$x_c(t)$的显式表达式。

(b) (a)中的答案是唯一能产生这个输出的信号吗？如果是的话，为什么？如果不是，描述所有其他能够产生同样输出的输入。

(c) 求出$x[n]$和$y[n]$的显式表达式，在每种情况下，说出与给定的输出$y_c(t)$相符合的$x[n]$和$y[n]$是否只有一种可能。

(d) 上述的频率响应为$H(e^{j\Omega})$的 DT 系统的单位采样响应$h[n]$是多少？

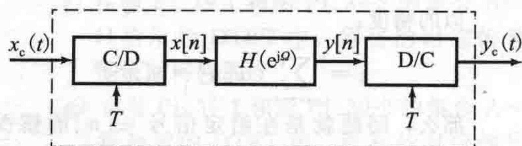


图 P1.45

1.46 考虑图 P1.46-1 所示的系统，图中的 D/C 转换器是标准理想带限插值转换器。假设$v[n]$的 DTFT 如图 P1.46-2 所示。

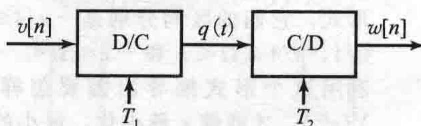


图 P1.46-1

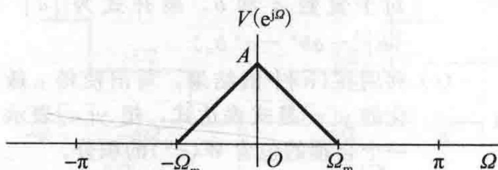


图 P1.46-2

(a) 假设对于整数$M\geqslant 2$，$T_2=MT_1$。

(i) 写出$w[n]$和$v[n]$的关系表达式。如果$v[n]$对应的是一个 CT 信号$v_c(t)$经过周期为T_0的采样，也就是说，如果$v[n]=v_c(nT_0)$，那么$w[n]$和另一个(可能的)具有新采样周期的$v_c(t)$相对应吗？

(ii) 利用你所知道的(理想)D/C 和 C/D 转换器的行为，画出完整标记的$Q(j\omega)$和$W(e^{j\phi})$。它们两者之间有什么关系？

(b) 假设对于整数$M\geqslant 2$，$T_2=T_1/M$。

(i) 写出把$w[n]$和$v[n]$联系起来的表达式。$w[n]$是$v[n]$的上采样版本、下采样版本，还是两种都不是？

(ii) 利用你所知道的(理想)D/C 和 C/D 转换器的行为，画出完整标记的$Q(j\omega)$和$W(e^{j\phi})$。它们有什么关系？

扩展习题

1.47 考虑一个由下面一系列的约束方程描述的系统模型，由矩阵形式给出

$$\begin{pmatrix} q_1[k+1] \\ q_1[k+2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1[k] \\ q_1[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x[k]$$

$$y[k] = [1 \quad 1] \begin{pmatrix} q_1[k] \\ q_1[k] \end{pmatrix}$$

这称为状态空间模型，即两个分量，或者两个维度。信号 $\boldsymbol{q}[k] \equiv \begin{pmatrix} q_1[k] \\ q_1[k] \end{pmatrix}$ 称为这个模型在时间 k 处的状态，其中 $x[k]$ 是输入，$y[k]$ 是输出。状态空间模型值得注意的特点是(i)下个时刻($k+1$)的状态是当前时刻 k 的状态和输入的函数；(ii)当前时刻的输出是当前时刻的状态和输入的函数(虽然在上述的例子中，时刻 k 处的输入恰好不会影响时刻 k 的输出)。

(a) 考虑四个信号 q_1、q_2、x 和 y，这个系统是线性的吗？是时不变的吗？是无记忆的吗？

(b) 假设系统是因果的。如果输入是单位采样信号 $x[n]=\delta[n]$，且它的初始状态是 $\boldsymbol{q}[0]=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，求出当 $n\geqslant 0$ 时的输出 $y[n]$。这能在时域上实现，或者通过使用 z 变换实现。

(c) 假设(a)中的第一个方程被下面的方程替换：

$$\begin{pmatrix} q_1[k+1] \\ q_1[k+2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1[k] \\ q_1[k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x[k]$$

而第二个方程保持不变，那这个系统是线性的吗？是无记忆的吗？是时不变的吗？

(d) 证明在(c)中周期变换的模型有自然意义，并求出它的周期。这个周期性是否意味着同时满足模型约束的信号 q_1、q_2、x 和 y 必须是周期的？

1.48 (a) 考虑一个时不变非线性的确定系统，如图 P1.48-1 所示，它的输出是常数 A，A 的值由所有时间上的输入信号 $x[n]$ 决定。考虑形式如 $x[n]=e^{j\Omega n}$ 这种类型的输入，Ω 是有限实数。改变输入端的 Ω 值，将使得 A 也发生变化，即 A 是 Ω 的函数。说明 A 关于 Ω 是否是周期性的，如果是，那么周期是多少，并解释。

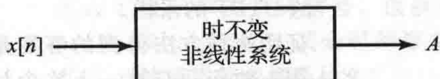


图 P1.48-1

(b) 现在考虑一个如图 P1.48-2 所示的系统。系统 1 是无记忆非线性系统，系统 2 通过下面的关系式来确定 A 的值：

$$A = \sum_{n=0}^{100} |y[n]|$$



图 P1.48-2

同样，考虑形式如 $x[n]=e^{j\Omega n}$ 这种类型的输入，Ω 是有限实数。改变输入端的 Ω 的值，将使得 A 也发生变化，即 A 是 Ω 的函数。

(i) 如果图中的 LTI 系统是一个恒等系统，系统 1 由 $w[n]=x^2[n]$ 定义，那么 A 关于 Ω 是否是周期性的？

(ii) 更一般来说，如果系统 1 是一个无记忆非线性系统，且 LTI 稳定系统不必是个恒等系统，那么 A 关于 Ω 是否是周期性的，如果是的话，周期是多少？

(iii) 用文字说明，为什么 DT LTI 稳定系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 在频率上总是周期性的？

1.49 在本题中，你将计算和比较几个有限长信号的 DTFT，这些信号都是由下面这个永久信号推导得到的：

$$x[n] = \cos(\pi n/4)$$

如果知道 $x[n]$ 是一个正弦函数，但是不知道它的角频率是 $\pi/4$，那么一种算出它的角频率的方法就是取 $x[n]$ 的部分加窗段，进行 DTFT 运算。但是，加窗会导致 DTFT 的扩展或者模糊，因此会在频率测定上引入一些不确定因素。下面的(a)和(b)部分会探讨这个问题。(c)和(d)部分分别研究的是一个正弦函数经过系统调制和随机调制(然后经过矩形加窗的)的频谱。

(a) 求出下面信号的 DTFT 幅度的表达式

$$y_1[n] = x[n]r[n]$$

式中，

$$r[n] = (u[n]-u[n-101])/101$$

式中的 $u[n]$ 是单位阶跃信号。用下面的两种方法，计算并画出其DTFT：

(i) 通过计算所得到的表达式；

(ii) 利用合适的计算包进行计算，这个计算包能够计算一个有限长序列的DTFT的采样。

证明两种方法得到的答案是一样的。用一两句话总结一下这个计算中矩形窗是怎么影响一个余弦信号的频谱的。

(b) 如果 $x[n]$ 不是一个单频的余弦信号，而是两个非常接近的频率的余弦信号之和，那会怎么样呢？大约要这两个频率要多近，对于每个单独的余弦信号，它们加窗信号的DTFT就不能够得到一个明显的尖峰吗？提示：你也许会发现，首先检查长度为101采样的矩形窗的DTFT是很有用的，这个采样是用来计算 $x[n]$ 的 $y_1[n]$ 片段的。

(c) 现在考虑信号

$$y_2[n] = x[n]t[n]$$

式中，

$$t[n] = \begin{cases} (n+1)/101^2, & 0 \leqslant n < 100 \\ (201-n)/101^2, & 100 \leqslant n \leqslant 200 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算并画出 $y_2[n]$ 的DTFT的幅度。这幅图是怎么和(a)中的DTFT联系起来的？用一两句话来说总结一下这个计算中三角窗是怎样影响一个余弦信号的？与矩形窗比较一下。当信号是频率很接近的两个信号的和的时候，与矩形窗比起来，三角窗又如何？

(d) 现在考虑信号

$$y_3[n] = y_1[n](-1)^n$$

计算并画出 $y_3[n]$ 的DTFT的幅度。这幅图和(a)中的DTFT有什么联系？现在，信号的能量聚集在哪个频率？与预期是一样的吗？

(e) 现在开始挖掘对于随机(或者可能，或者任意)信号的感觉，考虑

$$y_4[n] = y_1[n]b[n]$$

式中，$b[n]$ 的值被设置为 -1 或者 1，但是它是独立的，当 $0 \leqslant n < 100$ 时，它们的概率都是1/2。你可以用能产生随机数的计算包来生成 $b[n]$。用(a)中的要求，计算并画出 $y_4[n]$ 的DTFT的幅度。对序列 $b[n]$ 进行四次不同的设置("实现")。在这个情况下，你的DTFT有一个特定的结构吗？还是它们看起来不规则？信号的能量是否聚集在频谱的某些位置，或者是展开的？在 $y_4[n]$ 的频谱上，你有看见任何潜在的余弦信号 $x[n]$ 的线索吗？你的4种实现的结果有什么地方是相同的吗？

如果一个友军收到(也可能是被敌人截获)你的信号 $y_4[n]$，且他碰巧知道用来产生 $y_4[n]$ 的特别序列 $b[n]$，你能找到一种方式使得他(她)能确定出与 $b[n]$(在我们的例子中正好是 $y_1[n]$)相乘的信号吗？如果你不知道 $b[n]$，那么你所认为的能从 $y_4[n]$ 中恢复出 $y_1[n]$ 的前提是什么？

(f) (e)中的想法是无线通信中码分多址(CDMA)想法的基础。为了更直接地说明，假设

$$y_5[n] = 7b_1[n] + 3b_2[n] + 4b_3[n]$$

式中，码字 $b_1[n]$、$b_2[n]$ 和 $b_3[n]$ 每个是独立的，与(e)中 $b_2[n]$ 的形式是一样的。在CDMA通信环境下，$y_5[n]$ 是在它的区域内由基站传出，到达移动单元的信号。移动单元1只知道码字 $b_1[n]$，在收到 $y_5[n]$ 后，想要求出乘以 $b_1[n]$ 的缩放因子(在这里是7)。类似地，移动单元2只知道码字 $b_2[n]$，在收到 $y_5[n]$ 后，想要求出乘以 $b_2[n]$ 的缩放因子(在这里是3)。对于移动单元3也有类似的过程。在实际的系统中，这些常数表示着在一个比较码字 $b_i[n]$ 的时间间隔内，传递到各自移动单元的信息。事实上，这些常数和码字间隔相比是慢变化的。

利用在(e)中产生 $b[n]$ 的方法，独立地产生码字 $b_1[n]$、$b_2[n]$ 和 $b_3[n]$。还要根据上述的方程，利用这些来构造 $y_5[n]$。现在比较这些求和

$$\sum_n b_1[n]b_2[n]$$

$$\sum_n b_2[n]b_3[n],$$

$$\sum_n b_3[n]b_1[n]$$

它们的值是

$$\sum_n b_1^2[n], \quad \sum_n b_2^2[n], \quad \sum_n b_3^2[n]$$

这个计算是否意味着在仅仅知道 $b_i[n]$ 和 $y_5[n]$ 的情况下，且当 $i=1,2,3$ 时，这个移动单元 i 怎样才能估计出乘以 $b_i[n]$ 的常数？不管你的想法是什么，实现它，看一下能多好地估计出这个变化的参数。

1.50 在这道题中，将会研究沿着同一维度，向两个相反方向运动的DT波形的分离。这

种情况正在增加，比如在传输线上。观察到这两个波形的总和能够表示为

$$s[n,l]=f[l-c_f n]+g[l+c_g n]$$

对于某些时刻 n 和位置 l 成立。会把 f 叫作前进的波形，因为，当 n 增加时，f 上任意的定点将会在更大的 l 值的位置上找到。类似地，把 g 叫作后退的波形。那么 c_f 和 c_g 就分别是 f 和 g 的速度，假设 c_f 和 c_g 是正整数。这个条件仅仅是为了使事情变得简单。所得到的结果在不要求 c_f 和 c_g 是整数的情况下，仍然是一样的。目标是在一定范围的空间和时间上，从 $s[n,l]$ 中重构出 $f[l-c_f n]$ 和 $g[l+c_g n]$。

(a) 给定两个变量的函数 $s[n,l]$。这里得到的第一直觉就是保持一个变量不变，计算另一个变量的 DTFT，但是这并不能显示出任何特别的能够利于分离两个波形的结构。方法是做 n 和 l 的二维的 DTFT，这就包含计算一个规则的，保持一个变量不变而计算另一个变量的 DTFT，然后计算关于第二个变量的一维 DTFT。这里能解决这个问题的原因是 n 和 l 是独立变量。这个操作会产生一个包含两个频率变量的函数，Ω_n 和 Ω_l 由下式给出：

$$S(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}s[n,l]e^{-j\Omega_l l}e^{-j\Omega_n n}$$

把 $S(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$ 用 $f[n]$ 和 $g[n]$ 的(一维的)DTFT 表示出来。

(b) 把 $S(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$ 在 (Ω_n,Ω_l) 平面上画出来。你会发现，在这个域中，$f[l-c_f n]$ 和 $g[l+c_g n]$ 是完全分离的，但是只有一个单点。设计一个在频域上的二维滤波器 $H_f(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$，它将消除 g 乘以 $S(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$ 后的痕迹。现在

$$H_g(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})=1-H_f(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$$

将会从 $S(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})$ 中消除 f 的痕迹。解释一下。

(c) 在时域上实现这里的滤波器。频域上的乘法对应时域上的卷积，这与一维的滤波器是一样的。二维的综合方程由下面的方程给出：

$$h[n,l]=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Omega_l=-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_n=-\pi}^{\pi}H(e^{j\Omega_n},e^{j\Omega_l})\times e^{j\Omega_n n}e^{j\Omega_l l}\,d\Omega_n d\Omega_l$$

求出用 n 和 l 显式表示的 $h_g[n,l]$。用 $h_g[n,l]$ 怎样表示 $h_f[n,l]$？提示：让 $\delta[n,l]$ 表示单位采样信号，也就是当 $n=l=0$ 时，值为 1，其余时刻都为零。$\delta[n,l]$ 的傅里叶变换是什么？

1.51　这个问题会检测补偿 CT 传输信道的 DT 滤波器的用处。如图 P1.51 所示，一个 CT 信号 $x_c(t)$ 通过一个 CT LTI 信道传播，信道的频率响应是 $H(j\omega)$，冲激响应是

$$h(t)=e^{-3t}u(t)$$

信道的输出是 $v_c(t)$，它会经过一个采样周期是 T 的理想 C/D 转换器，并被转换成一个 DT 信号 $v_d(t)$，然后用一个频率响应是 $G(e^{j\Omega})$、冲激响应是 $g[n]$ 的 DT LTI 滤波器。DT 滤波器的输出 $y_d[n]$ 终于通过一个重构间隔是 T 的理想(带限插值)D/C 转换器转换会一个 CT 信号 $y_c(t)$。这里希望选择一个补偿器，目的是使得 $y_c(t)=x_c(t)$，对于某些带宽合适受限的输入 $x_c(t)$。

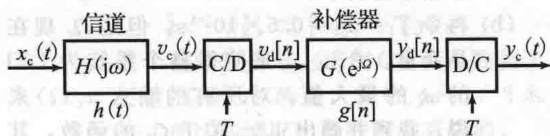


图　P1.51

(a) $H(j\omega)$ 是多少？

(b) $x_c(t)$ 能包含的最高频率是多少，也就是说，如果在 C/D 转换器中要避免混叠，到哪个频率 $X_c(j\omega)$ 必须受限？从现在开始，假设 $x_c(t)$ 满足这个条件。

(c) 求出使得 $y_c(t)=x_c(t)$ 的 $G(e^{j\Omega})$。

(d) 对于在(c)中的 $G(e^{j\Omega})$，求出：

(i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}g^2[n]$

(ii) $g[n]$

1.52　考虑如图 P1.52-1 所示的系统。抗混叠滤波器是频率响应为 $L(j\omega)$ 的 CT 滤波器，如图 P1.52-2 所示。

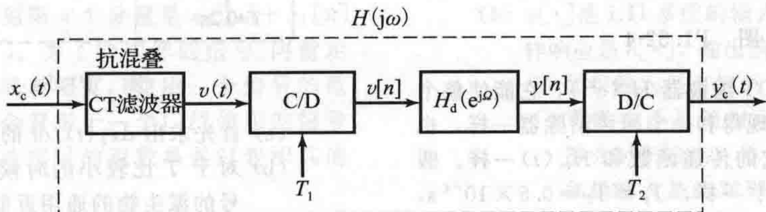


图　P1.52-1

对于(a)(b)和(c)问，$H_d(e^{j\Omega})$如图 P1.52-3所示，且 $0<\Omega_c<\pi$。

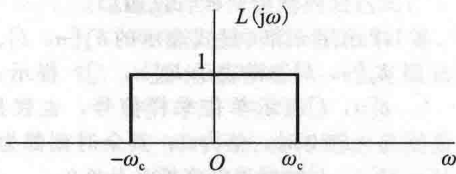


图　P1.52-2

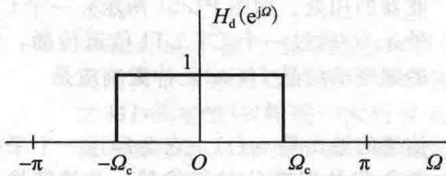


图　P1.52-3

(a) 令 $T_1=T_2=0.5\times10^{-4}$ s，$\Omega_c=\pi/4$，$\omega_c=2\pi\times10^4$ rad/s。整个处理 $x_c(t)$产生$y_c(t)$的系统是 LTI 的吗？如果不是，解释一下为什么不是。如果是，找到并画出 CT 传递函数 $H(j\omega)$。把 $H(j\omega)$降为零的频率点用赫兹标记出来。

(b) 再令 $T_1=T_2=0.5\times10^{-4}$ s，但是 Ω_c 现在是变量。令 $\omega_{c,\max}$ 是使得整个系统为 LTI 的 ω_c 的最大值，对所有的输入 $x_c(t)$来说。找到并画出 $\omega_{c,\max}$ 关于 Ω_c 的函数，其中 $0<\Omega_c<\pi$。

(c) 如果 T_2 被降低到 0.25×10^{-4} s，那么在(a)的条件下，整个系统是线性的吗？是时不变的吗？对于这两种情况，分别解释一下原因。

在这道题接下来的过程中，令 $x_c(t)$是一个音频信号 $r(t)$在一个有回声的环境下录制的，其中掺杂了 $r(t)$的时延版本。

$$x_c(t)=r(t)+\alpha r(t-T_o),$$
$$T_o>0,\quad 0<\alpha<1$$

(d) 找到 CT 传递函数 $H_{ec}(s)$，它是一个回声消除器，消除回声的作用如图 P1.52-4 所示。

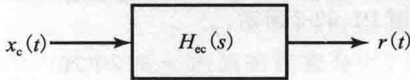


图　P1.52-4

(e) 找出一个 DT 滤波器 $H_d(e^{j\Omega})$，它能使整个 CT 系统表现得和一个回声消除器一样，也就是说，它的传递函数和 $H_{ec}(s)$一样。假设，和(a)中一样，$T_1=T_2=0.5\times10^{-4}$ s，$\Omega_c=\pi/4$，$\omega_c=2\pi\times10^4$ rad/s。还有假设 $x_c(t)$是一个在 10kHz 以上就没有能量的低通滤波器。

1.53　如图 P1.53 所示的系统，C/D 转换器以采样间隔 $T_1=0.1$s 对一个 CT 信号进行采样，而在输出端的 D/C 转换器利用时间间隔 T_2 的重构时间对采样 $y[n]$产生一个带限的插值。两个转换器之间的 DT LTI 系统的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=\frac{j\Omega}{T_1},\quad |\Omega|<\pi$$

输入信号是

$$x_c(t)=\cos\left(25\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

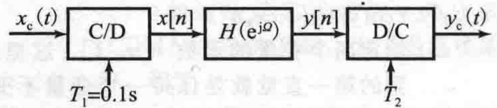


图　P1.53

(a) 令输出端的 D/C 转换器重构时间间隔为 $T_2=0.1$s。想要知道 $y_c(t)$是否为给定的 $x_c(t)$的派生物。

(i) 求出 $x[n]$、$y[n]$和 $y_c(t)$各自的解析表达式，并且完全有标记地把它们画出来，在 $0\leqslant n\leqslant6$ 和 $0\leqslant t\leqslant6$ 的范围上。

(ii) $y_c(t)$和 $x_c(t)$的派生物是相等的吗？

(iii) 整个系统是线性的吗？解释一下。

(b) 令采样间隔保持为 $T_1=0.1$s，但是重构时间间隔更改为 $T_2=0.2$s。求出这个新的 $y_c(t)$的解析的表达式，并画出图像。

1.54　图 P1.54 表示的是 DT 处理 CT 信号的系统框图。整个 CT 系统是线性和时不变的，它的频率响应是 $H_c(j\omega)$，对应于输入带宽合理受限的 $x_c(t)$。在接下来的问题中，将会使用特定的输入 $x_1(t)=\sin(9t)$来说明这个系统的性质。想要设计 $H(e^{j\Omega})$，使得整个系统 $H_c(j\omega)$是一个 CT 微分器，也就是说 $y_c(t)=\mathrm{d}x_c(t)/\mathrm{d}t$。

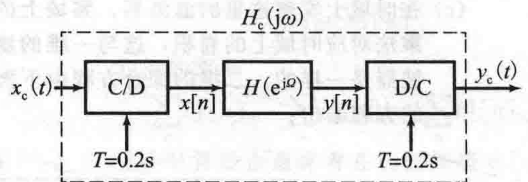


图　P1.54

(a) 首先求出 $\mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t$ 的表达式。

(b) 对于 T 比较小的时候，涉及时间的信号的派生物的通用近似是

$$y_c(t)=\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{x_c(t+T)-x_c(t-T)}{2T}$$

这里也可以使用一个有以下输入 $x[n]$ 输出 $y[n]$ 关系的 DT 系统来实现：

$$y[n]=\frac{x[n+1]-x[n-1]}{2T}$$

计算 $H(e^{j\Omega})$ 和 $h[n]$，给出联系 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的微分方程。

(c) 使用一个合理的计算包来实现并画出 $x_1(t)$ 和它在这个系统中对应的输出 $y_1(t)$（只画出信号的中部，目的是消除因为使用有限长度的 $x_1(t)$ 作为输入的影响）。结果 $y_1(t)$ 是你所期望的吗？这个幅度是如何与(a)中得到的表达式联系起来的？

(d) 另外一种可能的计算 $x_c(t)$ 派生物的方法是，利用一个 DT 系统，它的频率响应是 $H(e^{j\Omega})=j\Omega/T$，在 $|\Omega|<\pi$ 上面。在这种情况下，从例 1.3 中知道，输出 $y_c(t)$ 和一个近似带限的输入 $x_c(t)$ 的派生物是一样的。证明这个 DT 系统的冲激响应 $h[n]$ 是

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{nT}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

提示：记住如果 $x_c(t)=T\sin(\pi t/T)/\pi t$，那么 $x[n]=\delta[n]$。求出 CT 系统的对于这个输入的响应和为了得到 $y[n]$ 的采样。

(e) 现在，只使用处于 $-40\leqslant n\leqslant 40$ 中的 $h[n]$，用一个合适的计算包，再一次计算并画出 $y_1(t)$ 的近似。这个 $y_1(t)$ 和(a)中的计算结果有多么接近？（只检测一些值。）

(f) 画出两种近似。哪一个更好？和你期望的是一样的吗？你也许还想要画出你在(a)中找到的实际的派生物，以及两个近似。

1.55 一个实值（或者复值）DT 信号 $x[\cdot]$，有时候就简单地用 x 表示，能被看作一个无限维度的向量，它的相关标量是一些实数（或复数）。这样一个信号/向量能被 α 按一定比例缩放，从而得到 $\alpha x[\cdot]$，可添加两个这样的信号/向量 $x_1[\cdot]$ 和 $x_2[\cdot]$ 到分量形式，从而得到第 n 个分量是 $x_1[n]+x_2[n]$ 的信号 $x[\cdot]$。为了给这样的信号/向量定义“长度”或者幅度，使用一个信号的范数。这道题会着眼于一个广泛使用的信号范数组，这些信号的范数是通过卷积其他信号得到的。

当 $1\leqslant p<\infty$ 时，信号的 p 范数定义如下：

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\|x[\cdot]\|_p=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^p\right)^{1/p}$$

一个 p 范数有限的信号称为 ℓ^p 信号。

当 $p\to\infty$ 时，我们就得到了 ∞ 范数，形式如下：

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\sup_k\{|x[k]|\}$$

式中的“sup”表示上确界或者最小的上边界。一个 ∞ 范数有限的信号，也就是说，幅度上有界的信号，称为一个 ℓ^∞ 信号。

注意一个 ℓ^p 信号也是一个 ℓ^m 信号，对于任意的 $m>p$。这是因为 ℓ^p 信号 $x[n]$ 的值在大 $|n|$ 时，在幅度上一定会衰减到零；对于 $m>p$ 的信号，在大 $|n|$ 上的衰退甚至是更快的。

当 $1\leqslant p<\infty$ 时，p 范数满足下面范数的三个性质：(i)对于所有非零信号而言，它是非零的；(ii)根据下面的式子，当信号进行 α 缩放（正如我们看到的，通常取 $\alpha=0$，使得零信号的范数为零），它可以做缩放

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|_p$$

(iii)它满足三角不等式（也被叫作闵科夫斯基(Minkowski)不等式）

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$$

(a) 对于下面的信号，求出（或者在数值上近似）它的 ℓ^p 范数，其中 $p=1$，2 和 ∞，在这些情况中范数都是有限的。

(i) $x[n]=(-1)^n/n^2$，其中 $n>0$，还有 0 和其他地方。

(ii) 信号的定义式如下：

$$x[n]=\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$$

其中 $n\neq 0$，且 $x[0]$ 被定义为 1/5。

(iii) $x[n]=((0.2)^n-1)u[n]$，其中 $u[n]$ 是单位阶跃信号（当 $n\geqslant 0$ 时，值为 1，其余情况为零）。

可以看到，两个信号 h 和 x 的卷积 $h*x$ 满足如下不等式（称为杨氏不等式）：$\|h*x\|_r\leqslant\|h\|_p\|x\|_q$，这里 $1\leqslant p<\infty$，类似的对于 q、r，有

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$$

运用这个不等式回答下列问题。

(b) $x[\cdot]$ 是 LTI 系统的输入，且它的单位采样响应是 $h[\cdot]$，输出信号由 $y[n]$ 表示。

(i) 如果输入是有界的（比如 ℓ^∞），单位采样响应是绝对可和的（比如 ℓ^1），那么对于输出，你觉得是怎么样的？如果输入是绝对可和而单位采样响应是有界的，那么会怎么改变呢？

(ii) 如果输入和单位采样响应是平方可

和的(比如 ℓ^2)，你觉得输出是怎样的？

(iii) 如果单位采样响应是绝对可和，而输入是 ℓ^s，其中 $1\leqslant s<\infty$，你觉得输出是怎样的？

1.56 令 $x[n]$是一个已知的(实)信号，且信号可能是无限长但有限(非零)能量的。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] = \varepsilon_x < \infty$$

(a) 确定自相关定义如下：

$$\overline{R}_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-m]$$

关于式(1.62)的讨论表示了对于所有的 k 都有$\overline{R}_{xx}[0]\geqslant\overline{R}_{xx}[k]$。调整一下这个结论，证明另外还有$\overline{R}_{xx}[0]\geqslant-\overline{R}_{xx}[k]$，于是就有了

$$\overline{R}_{xx}[0]\geqslant|\overline{R}_{xx}[k]|$$

(b) 当 k 取非零值 P 的时候，在前述的方程中，有没有可能相等？(提示：如果$\overline{R}_{xx}[0]=|\overline{R}_{xx}[P]|$，证明对于一些 $P\neq0$的值，然后 $x[n]$就不得不是周期性的——周期为 P 或者 $2P$——这和能量有限相矛盾。)

假设，现在要用下面的式子测量一个关于 $x[\cdot]$的信号 $y[n]$：

$$y[n] = x[n-L]$$

式中，L 是一个固定的但是未知的延迟。由于 $x[n]$是已知的，能计算出确定性互相关函数

$$\overline{R}_{yx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-m]$$

比如，$x[n-L]$可能是一个无噪声情况下，经过目标反射以后，回到天线的雷达期望的信号，其中 L 和目标与雷达的距离成比例。假设雷达知道信号波形 $x[k]$，测量 $y[n]$，所以雷达已经处于计算名义上收到的信号的互相关函数的状态。

29
~
61

(c) 用$\overline{R}_{xx}[m]$表示$\overline{R}_{yx}[m]$。然后求出哪个 m 值使得确定性互相关$\overline{R}_{yx}[m]$取得最大值，并求出最大值(用信号 $x[\cdot]$的性质)。解释一下这里的结果是如何允许你在无噪声环境下，从$\overline{R}_{yx}[m]$求出延迟 L。

相反地，现在假设需要测量的关于 $x[\cdot]$的信号 $y[n]$通过下面的式子关联：

$$y[n] = x[n-L] + v[n]$$

式中，L 还是一个固定的但是未知的延迟，而 $v[n]$表示的是一个噪声过程，它的值在每个时间点 n 上也是未知的，除了知道它是一个零均值方差 $\sigma_v^2>0$ 的随机变量，在其他时间上噪声的值都是独立的。

(d) 能再一次计算出确定性互相关函数 $\overline{R}_{yx}[m]$，因为噪声，每个 m 上函数的值与(c)中的值会有一个随机量的差异，用 $w[m]$来表示。确定 $w[m]$的均值和标准差。

(e) 如果在(d)中有噪声的情况下，应用(c)中的方法来估算右边的 L 值，这也许会出错，因为会有噪声引起的扰动。(d)中的答案表明了当 ε_x/σ_v^2信噪比增加的时候，估计出来的 L 值能更精确吗？或者说增加信噪比并不能对这个任务有帮助？

(f) 假设 $x[n]$在时间上 D 个时刻是非零的，在这些 D 个时刻中取值只能是 1 或-1。这个条件造成了信号的能量固定在 $\varepsilon_x=D$。通常设计信号 $x[n]$，它的$\overline{R}_{xx}[0]$比其他 $m\neq0$ 的$\overline{R}_{xx}[m]$大很多，这是非常有趣的(前面的部分应该已经证实了这一点)。你也许会发现在这一点上阅读关于巴克码的东西是非常有趣的，巴克码有自己的特点。计算并画出确定性自相关和长度为 13 的巴克码能量谱密度，这里 $x[n]$会各自按照下面方式取值，当 $n=0,1,\cdots,12$(其余地方为零)：

$$+1,+1,+1,+1,+1,-1,-1,$$
$$+1,+1,-1,+1,-1,+1$$

第2章 幅度、相位和群延迟

正如在信号与系统中学习到的，以及第1章里所强调的那样，对于连续时间和离散时间的情况，变换在表征和表示信号与线性时不变系统的过程中扮演了核心的角色。本章将讨论变换表达式的一些具体内容，这些变换表达式可能并不是大家熟悉的或常见的，但是它们将在后面的章节中发挥很重要的作用。一方面，通过群延迟的概念来解释傅里叶变换的相位。另一方面，会涉及一些条件的讨论，在这些条件下傅里叶变换的相位是由幅度唯一确定的。除此之外，一种可以从幅度中恢复相位的特殊方法也会被讨论，该方法通常称为谱分解。

2.1 傅里叶变换的幅度和相位

一般来说，一个信号的傅里叶变换和一个LTI系统的频率响应都是复数值函数。傅里叶变换 $H(j\omega)$ 的模-相位(magnitude-phase)采用如下形式可表示：

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \tag{2.1}$$

在表达式(2.1)中，$|H(j\omega)|$ 表示这个变换的模(非负)，$\angle H(j\omega)$ 表示(实数值)相位。例如，如果 $|H(j\omega)|$ 是sinc函数 $\sin(\omega)/\omega$，那么 $|H(j\omega)|$ 就是这个函数的绝对值，在sinc函数取正值所对应的频率范围内，$\angle H(j\omega)$ 取值为0；在sinc函数取负值所对应的频率范围内，$\angle H(j\omega)$ 取值为 $\pm\pi$。另外一种替代的表示形式是幅度-相位形式：

$$H(j\omega) = A(\omega) e^{j\angle_A H(j\omega)} \tag{2.2}$$

该式中，$A(\omega) = \pm |H(j\omega)|$ 是实的，对于一些频率值它可以为正，而对于其他一些频率值它也可以为负。相应地，当 $A(\omega) = +|H(j\omega)|$ 时，$\angle_A H(j\omega) = \angle H(j\omega)$，当 $A(\omega) = -|H(j\omega)|$ 时，$\angle_A H(j\omega) = \angle H(j\omega) \pm \pi$。随着 $A(\omega)$ 的符号改变，这种形式可以用来消除相位在 π 处的不连续性，所以它常常会被采用。例如，对于上面提到的sinc函数而言，可以选择 $A(\omega) = \sin(\omega)/\omega$，且 $\angle_A = 0$。类似的讨论也适用于离散时间的情况。

不管是在模-相位表示式中还是在幅度-相位(amplitude-phase)表示式中，相位都可能是多值的，因为 2π 的任意整倍都可以叠加到任何频率上，且不会改变式(2.1)和式(2.2)中的 $H(j\omega)$。一种典型的相位计算方法能解决相位的歧义性，该方法是通过相位模 2π 来实现的，也就是说，相位向上穿过 $+\pi$，又"卷绕"(wrap)到 $-\pi$(或者相位下降到 $-\pi$，又卷绕到 $+\pi$)。在2.2节中可以看到，通过把相位选为一个频率的连续函数，能很方便地解决这种相位歧义的问题。这种方法称为相位解卷绕(unwrapped)，因为在 $\pm\pi$ 处的不连续性通过解卷绕，就能获得一条连续相位的曲线。这种解卷绕的相位是从 $\angle H(j\omega)$ 中获得的，其方法是通过在需要的地方加上高度为 $\pm\pi$ 或者 $\pm 2\pi$ 的梯级，以此产生一个关于 ω 的连续函数。高度为 $\pm\pi$ 的梯级被加到 $H(j\omega)$ 的过0点处，以根据需要吸收符号的变化。高度为 $\pm 2\pi$ 的梯级也被加到所需之处，这样就引入了一个实际情况，该梯级不会对 $H(j\omega)$ 产生任何影响，这一点可以由式(2.1)证明。进一步可以发现，似乎 $\angle H(j\omega)$ 在这些感兴趣的点处确实是连续可微分的，但还是要明白这种连续性实际是通过加上高度为 $\pm\pi$ 或 $\pm 2\pi$ 的合适梯级来获得的。

典型的，LTI滤波器的频率响应的模或幅度将对一个信号的时域产生影响，而这种影响在这里能够很自然地感知到。如果频率响应的模值在高频处很小，那么输出信号变化缓慢并且没有陡峭变化的间断点，甚至当输入信号具有这种快速变化的不连续特征时。另一

方面，如果一个输入信号的低频率分量被衰减，那么对应的高频率分量将使得信号快速变化，且不再有慢变化的趋势。

虽然观察一个系统频率响应的相位对信号的影响需要更细致工作，但这也同样是重要的。首先通过几个特殊的例子来讨论，这些例子对于处理更一般性的情况很有帮助。贯穿这些讨论过程的是，把系统考虑成一个具有单位增益的全通系统。也就是说，其频率响应的幅度 $A(\mathrm{j}\omega)=1$(连续时间)或者 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=1$(离散时间)，这样就能够重点观察相位的影响。在连续时间信号与离散时间信号情况下，与频率响应相关的解卷绕相位(unwrapped phase)将会分别表示为$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)$和$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$。

63

例 2.1 线性相位

考虑一个全通系统，该系统的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha\omega} \tag{2.3}$$

在幅度-相位表达式中，$A(\mathrm{j}\omega)=1$，且$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)=-\alpha\omega$。这个例子中，解卷绕相位关于 ω 是线性的，斜率是$-\alpha$。如果输入信号 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(\mathrm{j}\omega)$，则输出信号的傅里叶变换是 $Y(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha\omega}$，对应的输出信号 $y(t)$就是 $x(t-\alpha)$。换句话说，在系统的频率响应中，斜率为$-\alpha$ 的线性相位对应于时间延迟α(如果α是负的，则时间超前$|\alpha|$)。

对于一个离散时间(DT)系统，有

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha\Omega}, \quad |\Omega|<\pi \tag{2.4}$$

该相位也是线性的，斜率是$-\alpha$。当 α 是整数时，系统对输入序列 $x[n]$在时域的影响是很清晰的，就是一个简单的延迟(对正的 α)或超前(对负的 α) $|\alpha|$。当 $|\alpha|$ 不是整数时，这种影响仍然通常被看作"延迟 α"，只不过需要更细致的解释。如果认为 $x[n]$是带宽受限连续时间信号 $x(t)$按照采样周期 T 进行采样后的结果，那么输出信号 $y[n]$将会是信号 $y(t)=x(t-\alpha)$按照采样周期 T 进行采样后的结果。实际上，在第 1 章例 1.4 的半采样延时的特殊情况中，也会看到这样的结果，即 $\alpha=\frac{1}{2}$。

例 2.2 固定相位偏移

作为第二个例子，再次考虑一个全通系统，系统频率响应的幅度为 $A(\mathrm{j}\omega)=1$，且解卷绕相位是

$$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}-\phi_0, & \omega>0\\ +\phi_0, & \omega<0\end{cases} \tag{2.5}$$

64

如图 2.1 所示。

注意，由于假定了系统的冲激响应是实数值，所以相位将会是一个关于 ω 的奇函数。在这个例子中，考虑 $x(t)$具有这样的形式

$$x(t)=s(t)\cos(\omega_0 t+\theta), \quad \omega_0>0 \tag{2.6}$$

也就是一个正载波频率为 ω_0 的幅度调制信号。因此，$X(\mathrm{j}\omega)$可以被表示为

$$X(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}S(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\frac{1}{2}S(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} \tag{2.7}$$

其中 $S(\mathrm{j}\omega)$表示 $s(t)$的傅里叶变换。

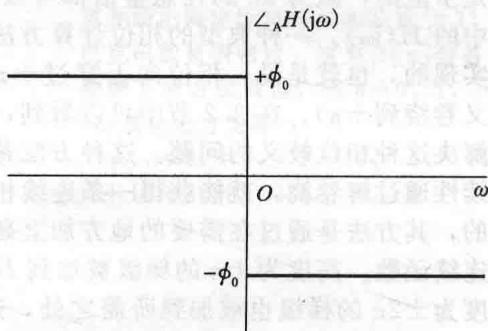


图 2.1 具有固定相移 ϕ_0 的全通系统的相位图

同时也假定 $S(\mathrm{j}\omega)$的带宽限制在$|\omega|<\Delta$ 范围内，其中 Δ 足够小，以至于当 $\omega<0$ 时，表达式 $S(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$为 0，当$\omega>0$时，表达式 $S(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$为 0，即等效于假定$(\omega_0-\Delta)>0$。因此 $x(t)$可以表征为一个相对于载波变化缓慢的调制。相应的 $x(t)$的频谱如图 2.2 所示。

在这些 $x(t)$的假定条件下，确定输出 $y(t)$相对来说是比较简单的。特别的，系统的频

率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$是

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_0}, & \omega>0\\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\phi_0}, & \omega<0\end{cases} \tag{2.8}$$

由于式(2.7)中仅当 $\omega>0$ 时，表达式 $S(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$非零，该表达式只是简单的乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$。类似的，表达式 $S(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$只是乘以 $\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\phi}$。因此，输出信号的傅里叶变换 $Y(\mathrm{j}\omega)$由下式给出：

$$Y(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}S(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_0}+\frac{1}{2}S(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\phi_0} \tag{2.9}$$

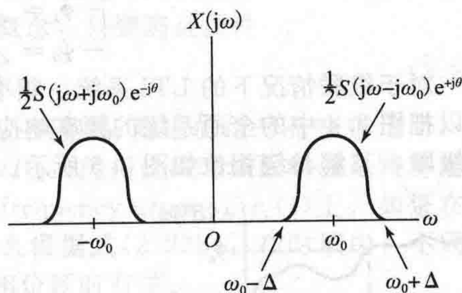


图 2.2 $x(t)$的频谱，其中 $s(t)$是窄带信号

根据这个式子，可以看到该式即是由式(2.6)中的载波简单相移 ϕ_0 所得到。换言之，也就是用 $\theta-\phi_0$ 替换式(2.7)中的 θ。因此，

$$y(t)=s(t)\cos(\omega_0 t+\theta-\phi_0) \tag{2.10}$$

这种载波相位变化也可以用载波时延的表达式来表示，式(2.10)可以重写成，

$$y(t)=s(t)\cos\left[\omega_0\left(t-\frac{\phi_0}{\omega_0}\right)+\theta\right]=s(t)\cos[\omega_0(t-\tau_{\mathrm{p}})+\theta] \tag{2.11}$$

这里，τ_{p} 是在 ω_0 处相位对于频率的负比值，例如($-\phi_0$)，它是系统在频率 ω_0 处的相位延迟：

$$\tau_{\mathrm{p}}=-\frac{\angle H(\mathrm{j}\omega_0)}{\omega_0}=\frac{\phi_0}{\omega_0} \tag{2.12}$$

65

2.2 群延迟和非线性相位的影响

从例 2.1 中可以看到，具有线性频率特征的相位是对应于时域中的时移。本节中，考虑非线性相位特性的影响。再次假设系统是一个全通系统，频率响应是

$$H(\mathrm{j}\omega)=A(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle_{\mathrm{A}}[H(\mathrm{j}\omega)]} \tag{2.13}$$

其中 $A(\mathrm{j}\omega)=1$。图 2.3 给出了一个通常情况下的非线性相位特征，它是一个关于 ω 的奇函数，且对于$|\omega|>0$ 的情况下，相位是解卷绕的。在 2.2.1 节中，首先讨论窄带信号的情况。在 2.2.2 节中，再把结果扩展到宽带信号的情况下。

2.2.1 窄带输入信号

正如在例 2.2 中一样，再次假设 $x(t)$是形如式(2.6)的窄带信号，其傅里叶变换如图 2.2所示。

接下来，假设在图 2.2 中的 Δ 足够小，以至于在$\pm\omega_0$ 附近，$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)$能足够好地逼近其零阶和一阶的泰勒级数展开式，即

$$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)\approx\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega_0)+(\omega-\omega_0)\left[\frac{d}{\mathrm{d}\omega}\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)\right]_{\omega=\omega_0} \tag{2.14}$$

定义 $\tau_{\mathrm{g}}(\omega)$为

$$\tau_{\mathrm{g}}(\omega)=-\frac{d}{\mathrm{d}\omega}\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega) \tag{2.15}$$

在 $\omega=\omega_0$ 附近的一个小区域内，$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)$可以近似表示为

$$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)\approx\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega_0)-(\omega-\omega_0)\tau_{\mathrm{g}}(\omega_0) \tag{2.16}$$

类似地，在 $\omega=-\omega_0$ 附近的一个小范围内，也可以这样近似

$$\angle_{\mathrm{A}}H(\mathrm{j}\omega)\approx\angle_{\mathrm{A}}H(-\mathrm{j}\omega_0)-(\omega+\omega_0)\tau_{\mathrm{g}}(-\omega_0) \tag{2.17}$$

正如即将看到的那样，在解释非线性相位特性对信号所产生的影响中，$\tau_{\mathrm{g}}(\omega)$扮演了

极其重要的角色。

在式(2.16)和式(2.17)的泰勒级数近似中，对于输入信号的频率，其他的近似是有效的，这样就可以用图 2.4 替换图 2.3。注意，在图 2.4 中，

$$-\phi_1 = \angle_A H(j\omega_0) \tag{2.18a}$$

$$-\phi_0 = \angle_A H(j\omega_0) + \omega_0 \tau_g(\omega_0) \tag{2.18b}$$

对于级联情况下的 LTI 系统，频率响应相乘，对应于其幅度相乘、相位相加。因此，可以把图 2.4 中的全通系统的频率响应 $H(j\omega)$ 重新表示成两个全通系统 $H_I(j\omega)$ 和 $H_{II}(j\omega)$ 的级联，其解卷绕相位如图 2.5 所示。

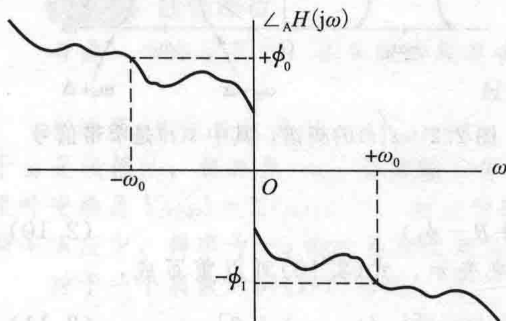


图 2.3　非线性解卷绕的相位特征

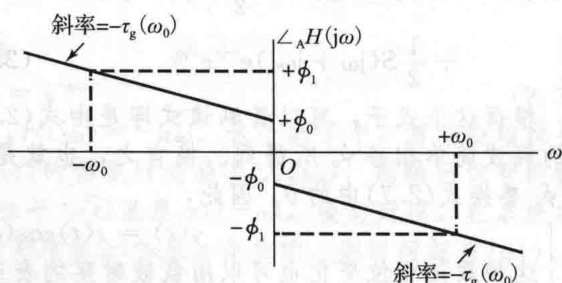


图 2.4　在 $\pm\omega_0$ 附近的非线性相位的泰勒级数展开

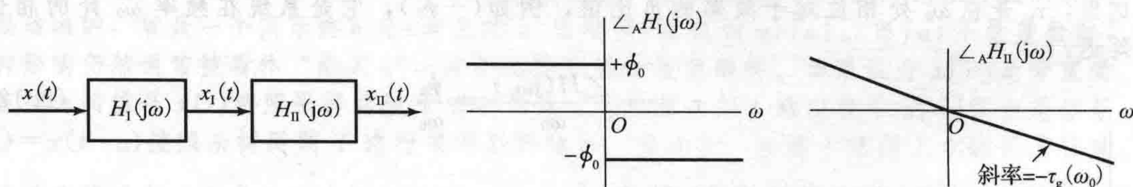


图 2.5　全通系统的频率响应 $H(j\omega)$ 重新表示成两个

66
~
67

可以看到，$H_I(j\omega)$ 对应于例 2.2。因此，基于式(2.6)中 $x(t)$ 的窄带形式，可得

$$x(t) = s(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$x_I(t) = s(t)\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\phi_0}{\omega_0}\right) + \theta\right] \tag{2.19}$$

接下来，可以把 $H_{II}(j\omega)$ 看作相当于例 2.1 中的 $\alpha = \tau_g(\omega_0)$ 时的结果。因此，

$$x_{II}(t) = x_I(t - \tau_g(\omega_0)) \tag{2.20}$$

或等效于

$$x_{II}(t) = s(t - \tau_g(\omega_0))\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\phi_0 + \omega_0\tau_g(\omega_0)}{\omega_0}\right) + \theta\right] \tag{2.21}$$

由式(2.18a)和式(2.18b)，可得

$$\phi_0 + \omega_0\tau_g(\omega_0) = \phi_1 = -\angle H(j\omega_0) \tag{2.22}$$

因此表达式(2.21)可以重写为

$$X_{II}(t) = s(t - \tau_g(\omega_0))\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\phi_1}{\omega_0}\right) + \theta\right] \tag{2.23a}$$

或

$$x_{II}(t) = s(t - \tau_g(\omega_0))\cos[\omega_0(t - \tau_p(\omega_0)) + \theta] \tag{2.23b}$$

其中，$\tau_p(\omega_0)$ 是定义在式(2.12)中的相位延时，例如，$\tau_p(\omega_0) = -\dfrac{\angle H(j\omega_0)}{\omega_0}$。

总之，根据式(2.23b)，对于在频率 ω_0 附近的窄带频率群来说，非线性相位在时域的影响就是通过群延迟 $\tau_g(\omega_0)$，对窄带调制的包络 $s(t)$ 进行延迟，而对载波来说则是引入了一个 $\tau_p(\omega_0)$ 的延迟。

2.2.2　宽带输入信号

68

到目前为止，关注的都是窄带信号。要将讨论扩展到宽带信号，只需认识到任何宽带信号都可以被看成窄带信号的叠加(superposition)。通过认识到图 2.6a 中的系统与图 2.6b中的并联组合是等价的，就可以建立起这种概念，只要满足条件

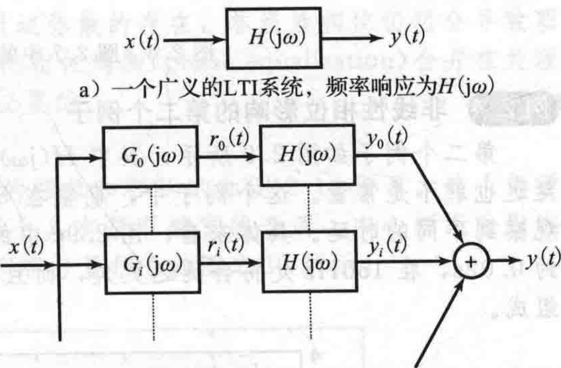
$$\sum_{i} G(\mathrm{j}\omega)=1 \tag{2.24}$$

通过选择滤波器 $G_i(\mathrm{j}\omega)$满足式(2.24)，且在中心频率 ω_i 附近的信号是窄带信号，那么每一个中间信号 $r_i(t)$都是一个窄带信号。因此，$H(\mathrm{j}\omega)$的相位的时域影响就是将群延迟和相位延迟施加到每一个窄带分量(例如，频率组(frequency groups))$r_i(t)$上。如果在不同的中心频率(例如，载波)ω_i 上，群延迟不同，那么根据式(2.23b)，在时域中，不同的频率组将会在不同的时刻到达输出端且载波相位与相位延时有关。

例 2.3　非线性相位的影响

作为第一个例子，把图 2.6 中的 $H(\mathrm{j}\omega)$ 考虑成 CT 全通系统，系统的频率响应的幅度、相位和群延迟如图 2.7 中所示。对应的冲激响应如图 2.8 所示。(一般的全通系统将在第 2.3.1 节中进行更加详细的讨论。)

如果 $H(\mathrm{j}\omega)$的相位关于频率是线性的，冲激响应就只是一个简单的延时冲激，也就是说，所有的窄带分量将会被延时相同的数量，并且相应地累加成一个延时的冲激。然而，正如在图 2.7 中所看到的一样，由于相位是非线性的，所以群延迟不是一个常量。特别的，在 1200Hz 附近的频率，其延时明显大于其他频率。相应的，在图 2.8 中，可以看到特定的频率组在冲激响应中的主导作用。



a) 一个广义的LTI系统，频率响应为$H(\mathrm{j}\omega)$

b) 一个等价系统，在该系统中输入被分解成频率组

图　2.6

69

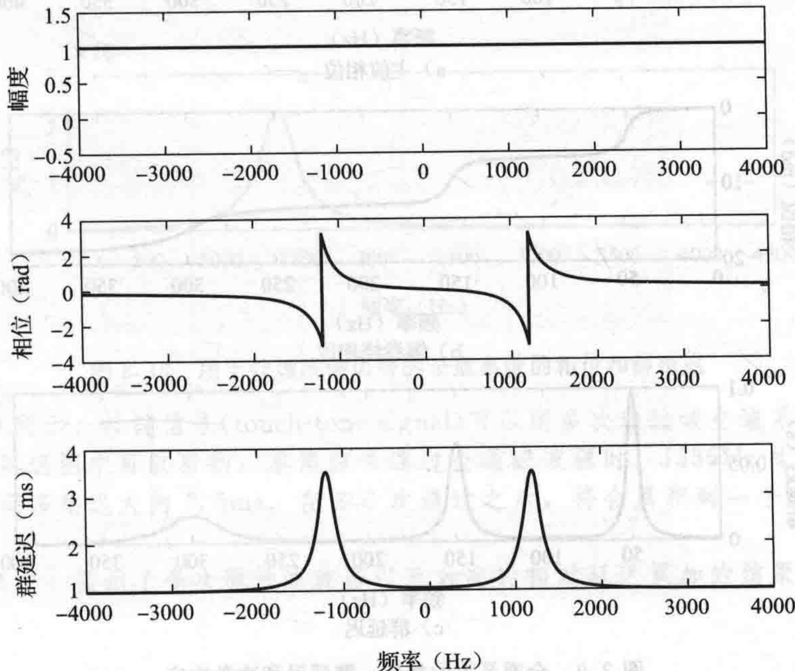
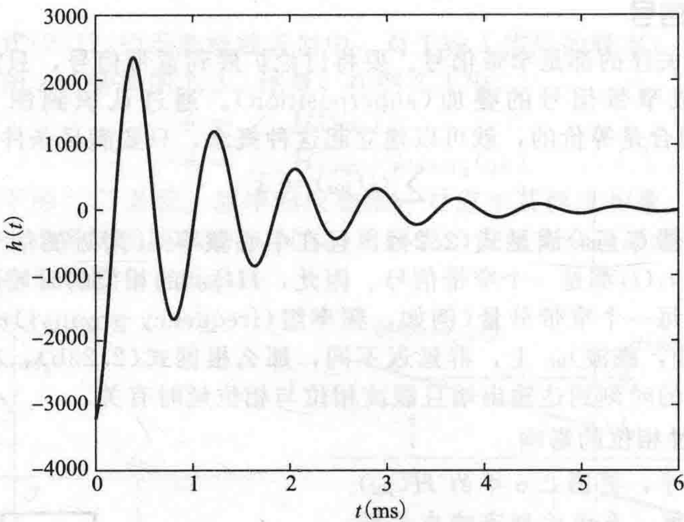


图 2.7　全通滤波器的幅度、相位和群延迟



70

图 2.8　图 2.7 中的全通滤波器的冲激响应

例 2.4　非线性相位影响的第二个例子

第二个例子如图 2.9 所示，其中 $H(\mathrm{j}\omega)$仍然是一个非线性相位的全通系统，因此其群延迟也就不是常量。这个例子中，期望在 50Hz、150Hz 和 300Hz 附近的不同频率组中，观察到不同的时延。具体来看，图 2.9c 中的群延迟表明频率组在 300Hz 处将会被延迟大约 0.02s，在 150Hz 处将会延迟更久，而且冲激响应的尾部将会主要由 50Hz 处的频率组组成。

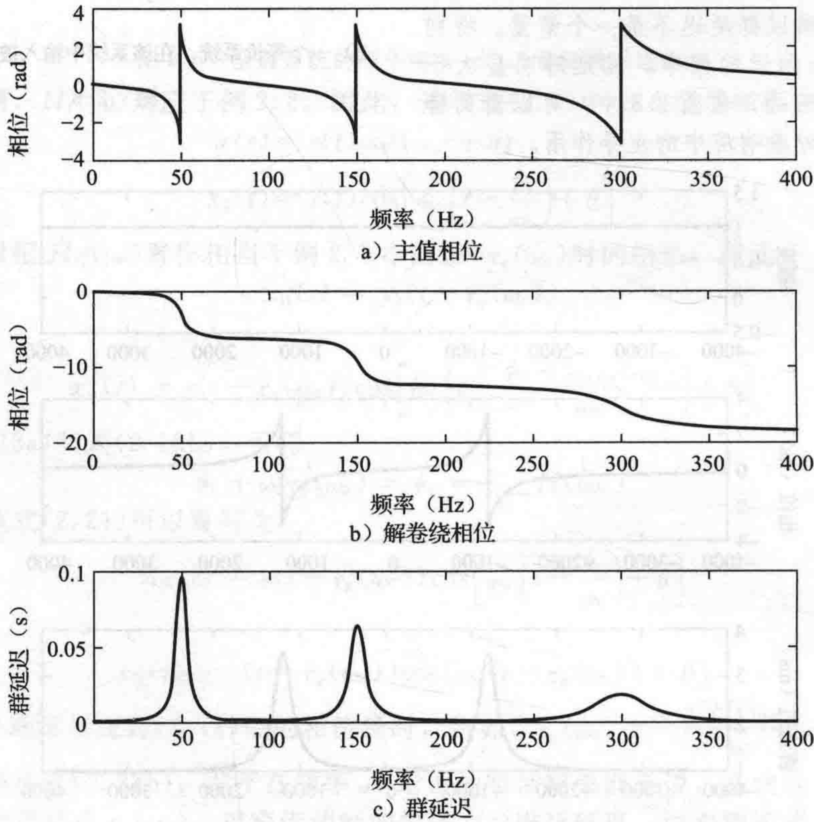
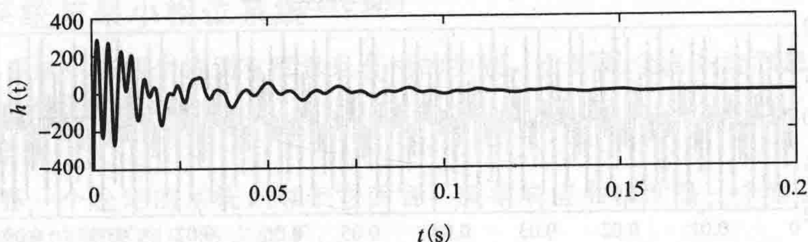


图 2.9　全通系统的相位、群延迟和冲激响应



d）冲激响应

图 2.9　（续）

71

在这两个例子中，输入在时域上是高度集中的(例如，一个冲激)，而响应在时域上是分散的，这是由非线性相位导致的非恒定的群延迟造成的。通常情况下，非线性相位所造成的这种影响称为弥散(dispersion)。在通信系统和很多其他应用场景中，即使一个信道具有相对恒定的频率-响应的幅度特性，由于时域弥散的存在，非线性相位仍然会导致明显的失真和其他的负面后果。鉴于这个原因，把相位均衡(phase equalization)合并在处理过程中，以此补偿非固定的群延迟通常是十分必要的。◀

例 2.5　非线性相位对按键信号的影响

在第三个例子中，考虑一个全通系统，它的相位和群延迟如图 2.10 所示。这个例子中的输入是按键式的电话号码“5”，它包括两个具有很窄带宽的音调，中心频率分别在 770Hz 和 1336Hz 处。该时域信号和它的两个窄带分量信号如图 2.11 所示。

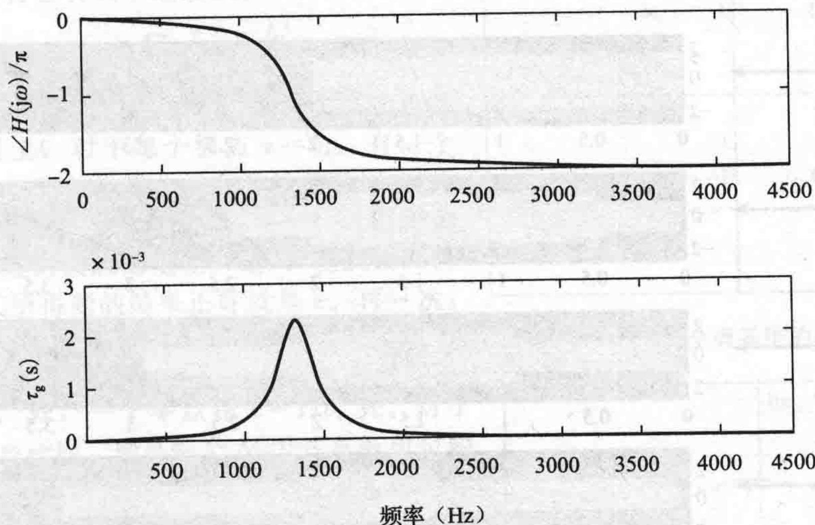


图 2.10　用于处理按键信号的全通系统的相位和群延迟

如图 2.10 所示，按键信号(touch-tone signal)可以用多次通过该全通系统的方式来进行处理。从群延迟图中可以看到，单路信号通过全通滤波器时，1336Hz 处的音调将会比 770Hz 处的音调多延迟大约 2.5ms。在 200 次通过之后，将会累积到一个大约为 0.5s 的相对延迟。

在图 2.12 中，显示了多次通过滤波器以及对应的相对延迟累加的结果，该结果与预期一致。◀

72

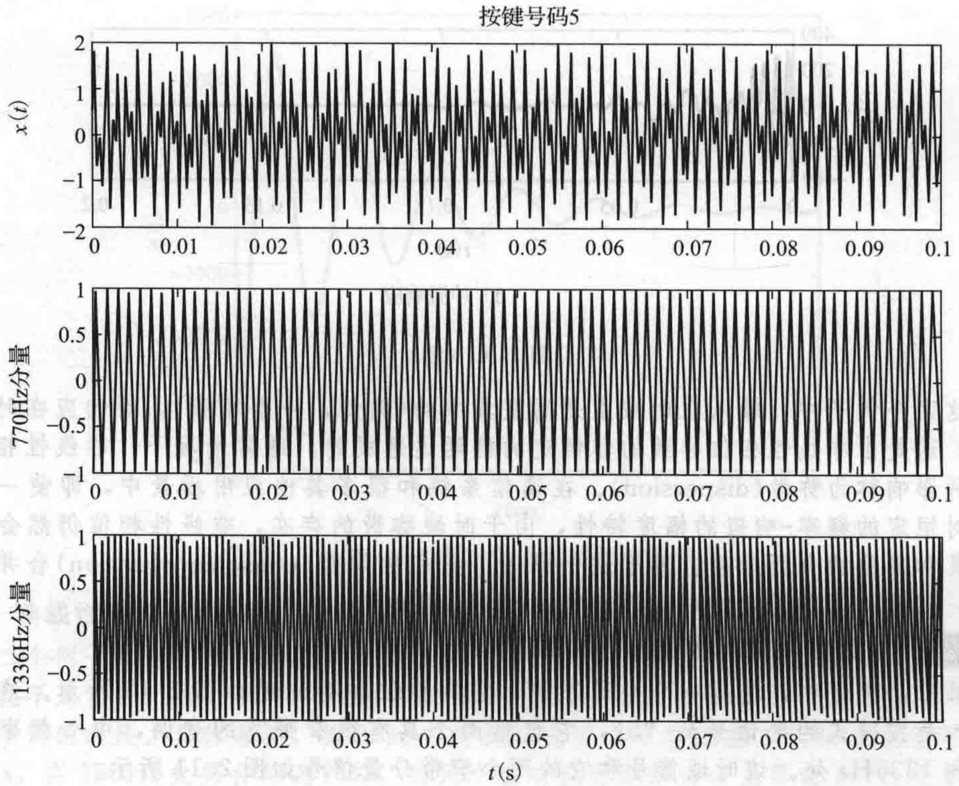


图 2.11　按键信号及其两个窄带分量信号

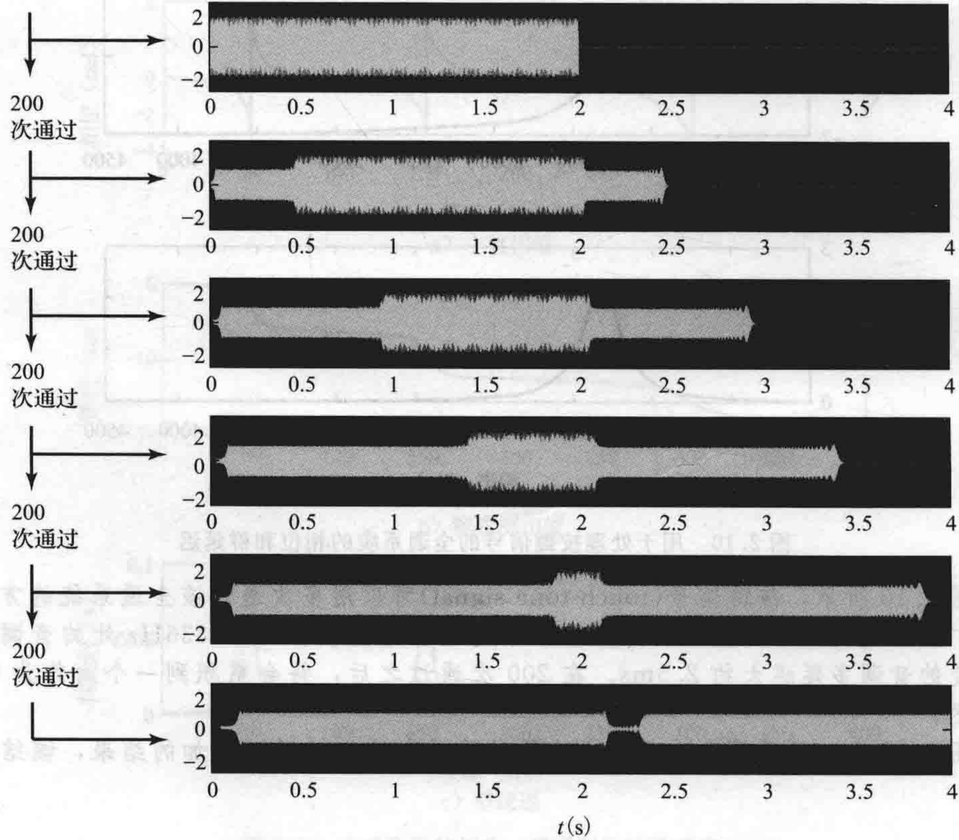


图 2.12　图 2.11 中的按键信号多次通过全通滤波器的效果

2.3 全通系统与最小相位系统

稳定LTI系统中有两个特别有意思且有用的类别，分别是全通系统和最小相位系统。本节将对它们进行定义和讨论。

2.3.1 全通系统

全通系统是一个稳定的系统，对于它而言，频率响应的幅度是一个常量，与频率无关。CT全通系统的频率响应形式如下：

$$H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{j}\omega)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{j}\omega)} \tag{2.25}$$

其中，A是一个常量，不随ω变化。假设相关的传递函数$H(s)$是s的有理函数，那么其对应形式为

$$H_{\mathrm{ap}}(s)=A\prod_{k=1}^{M}\frac{s+a_k^*}{s-a_k} \tag{2.26}$$

对于每一个极点$s=+a_k$，就有一个零点位于跨过虚数轴的镜像处，即$s=-a_k^*$。如果a_k是复数并且系统的冲激响应是实值的，每个复极点和零点将会共轭成对出现，所以也将会有一个极点在$s=+a_k^*$处，一个零点在$s=-a_k$处。对于式(2.26)中$S=\mathrm{j}\omega$时，验证每个M因式具有单位幅度是非常简单的。一个因果CT全通系统的零极点图(在s平面)的例子如图2.13所示。

对于DT全通系统，其频率响应的形式为

$$H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle H_{\mathrm{ap}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})} \tag{2.27}$$

如果对应的传递函数$H(z)$是关于z的有理函数，那么它将会有如下的形式：

$$H_{\mathrm{ap}}(z)=A\prod_{k=1}^{M}\frac{z^{-1}-b_k^*}{1-b_kz^{-1}} \tag{2.28}$$

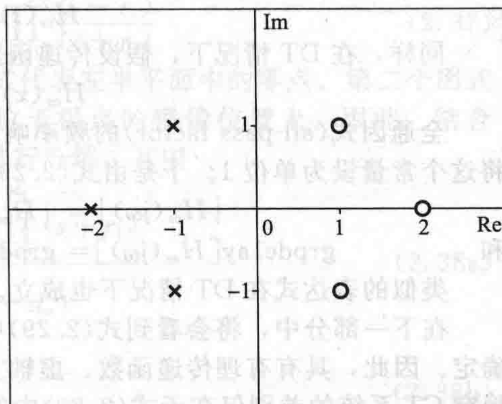


图2.13　CT全通系统的典型零极点图

在这种情况下，极点和零点出现在共轭且互为倒数的位置上：对于每个极点$z=b_k$，有一个零点$z=1/b_k^*$。在首先将分子和分母都除以b_k之后，通过令上面相应因式中的$b_k=\infty$，可以得到零点$z=0$(相应的极点出现在∞处)；在式(2.28)中，对应因式所得到的结果正好就是z。再一次，如果系统的冲激响应是实值的，那么每个复极点和零点都将会共轭成对出现，所以也将会有一个极点在$z=b_k^*$处，一个零点在$z=1/b_k$处。对于式(2.28)中$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$时，验证每个$M$因式具有单位幅度同样是非常简单的。一个因果DT全通系统的零极点图(在z平面)的例子如图2.14所示。

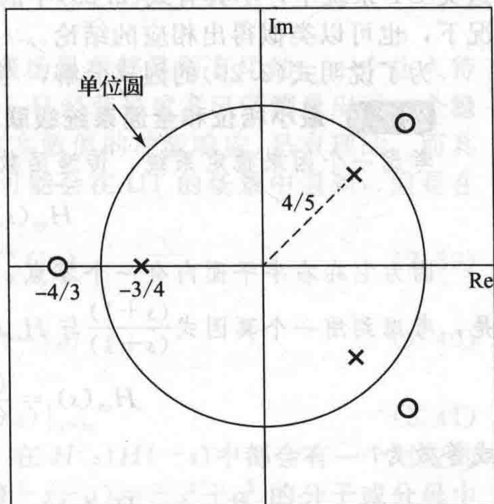


图2.14　DT全通系统的典型零极点图

CT全通系统的相位将会是与式(2.26)中M因式里的每一个因式相关联的相位之和。假设系统是因果的(另外也是稳定的)，那么这些因式中的每一个都有$\mathrm{Re}\{a_k\}<0$。由代数知识可知，对于形如$\frac{s+a_k^*}{s-a_k}$的每个因式在全部频率上有正的群延迟，这个性质稍后还会讨论到。同样，假设式(2.28)中的DT全通系统具有因果性(也有稳定性)，形如$\frac{z^{-1}-b_k^*}{1-b_kz^{-1}}$的每个因式在$|b_k|<1$的条件下，在所有

73
~
74

频率上都会贡献出正的群延迟(或者零群延迟，在 $b_k=0$ 的这种特殊情况下)。因此，对于连续和离散时间，因果全通系统的频率响应在所有频率上都具有恒定的幅度和正的群延迟。

2.3.2 最小相位系统

在经典的网络理论、控制系统和信号处理中，具有有理传递函数的 CT LTI 系统如果是稳定的、因果的且全部有限个零点严格位于左半平面内，那么该系统就定义为最小相位系统。根据传递函数对应虚轴上的模值，也就是频率响应的模，在推导具有符号因子的传递函数的过程中，就会自然地引入这个概念。在下一节的例 2.7 中将会看到，对于最小相位 CT 系统，可以使用已经在 2.3.1 节中对全通系统所讲的内容，用代数方法来完成这个推导。

75

对于传递函数是有理函数的 DT LTI 系统，如果这个系统是稳定的、因果的且存在有限个零点(即是在无穷远处没有零点)，同时所有零点严格位于单位圆内的话，就能够用类似的方法从单位圆上的模值推导出它的传递函数。这就相当于要求这个系统是因果稳定的，并且有一个因果稳定的逆系统，在本书中，使用它作为 DT LTI 系统的最小相位的定义。最小相位 DT 模型对第 12 章中讨论随机信号的因果维纳滤波是非常重要的。

最小相位系统的群延迟

最小相位(minimum phase)这个术语的使用是有历史原因的，其对应性质或许采用术语“最小群延迟”更加恰当。对这个问题的解释可以基于下面的事实，即任何具有有理传递函数 $H_{cs}(s)$并且在虚轴上不存在有限个零点的因果稳定 CT 系统，都能够表示成一个最小相位系统和一个因果全通系统的级联：

$$H_{cs}(s)=H_{min}(s)H_{ap}(s) \tag{2.29}$$

同样，在 DT 情况下，假设传递函数在单位圆上没有零点，其传递函数也可以写成：

76

$$H_{cs}(z)=H_{min}(z)H_{ap}(z) \tag{2.30}$$

全通因式(all-pass factor)的频率响应的模值是恒定的且与频率无关，为了方便起见，将这个常量设为单位 1。于是由式(2.29)可得

$$|H_{cs}(j\omega)|=|H_{min}(j\omega)| \tag{2.31a}$$

和

$$\text{grpdelay}[H_{cs}(j\omega)]=\text{grpdelay}[H_{min}(j\omega)]+\text{grpdelay}[H_{ap}(j\omega)] \tag{2.31b}$$

类似的表达式在 DT 情况下也成立。

在下一部分中，将会看到式(2.29)中的最小相位项可以通过 $H_{cs}(j\omega)$的模值来唯一地确定。因此，具有有理传递函数、虚轴上没有零点且具有相同的频率响应模值的所有因果稳定 CT 系统的差别仅在于式(2.29)中的因果全通因式的选择。然而，之前已经表明因果全通因式一定会贡献出正的群延迟。所以，从式(2.31b)中就可以得到这样一个结论，在这类 CT 系统中，不具有式(2.29)中的全通因式的系统将会有最小的群延迟。在 DT 的情况下，也可以类似得出相应的结论。

为了说明式(2.29)的因式分解，考虑一个简单的例子。

例 2.6 最小相位和全通系统级联而成的因果稳定系统

考虑一个因果稳定系统，传递函数是

$$H_{cs}(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} \tag{2.32}$$

因为它在右半平面内有一个零点，特别地，在 $s=1$ 处，所以它不是最小相位的。但是，考虑到用一个真因式$\frac{(s+1)}{(s+1)}$与 $H_{cs}(s)$的级联，将 $H_{cs}(s)$表达为

$$H_{cs}(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}\cdot\frac{(s+1)}{(s+1)} \tag{2.33}$$

或等效为

$$H_{cs}(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}\cdot\frac{(s-1)}{(s+1)} \tag{2.34}$$

式(2.34)对应于一个最小相位因式 $H_{\min}(s)$ 和一个因果全通因式 $H_{\text{ap}}(s)$ 的级联，这里有

$$H_{\min}(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} \tag{2.35a}$$

且

$$\mathrm{H}_{\text{ap}}(s)=\frac{(s-1)}{(s+1)} \tag{2.35b}$$

实际上，式(2.33)中因式$\frac{(s+1)}{(s+1)}$反映出零点从 $s=1$ 处变到了 $s=-1$ 处，而又由于在相同的位置上有一个极点，所以这个零点又被抵消掉了。这种方式容易推广到右半平面内的零点，并且也适用于 DT 系统。 77

从例 2.6 进行推广，考虑一个因果稳定的传递函数 $H_{\text{cs}}(s)$，其表达式如下

$$H_{\text{cs}}(s)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(s-l_k)\prod_{i=1}^{M_2}(s-r_i)}{\prod_{n=1}^{N}(s-d_n)} \tag{2.36}$$

其中，d_n 表示系统的极点，l_k 表示左半平面中的零点，r_i 代表右半平面中的零点。由于 $H_{\text{cs}}(s)$ 是因果稳定的，全部极点位于左半平面，并且这些极点与式(2.29)中的因式 $H_{\min}(s)$ 相关联，该因式的全部零点就是 l_k。接下来，可以把右半平面的零点表示为

$$\prod_{i=1}^{M_2}(s-r_i)=\prod_{i=1}^{M_2}(s+r_i)\prod_{i=1}^{M_2}\frac{(s-r_i)}{(s+r_i)} \tag{2.37}$$

由于 $\mathrm{Re}\{r_i\}$ 是正的，式(2.37)中右边第一个因式代表左半平面中的零点。第二个因式对应于具有左半平面中的极点的全通项，其零点位于极点的镜像位置上。因此，结合式(2.36)和式(2.37)，$H_{\text{cs}}(s)$ 就可以根据式(2.29)进行分解，其中

$$H_{\min}(s)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(s-l_k)\prod_{i=1}^{M_2}(s+r_i)}{\prod_{n=1}^{N}(s-d_n)} \tag{2.38a}$$

$$H_{\text{ap}}(s)=\prod_{i=1}^{M_2}\frac{(s-r_i)}{(s+r_i)} \tag{2.38b}$$

对于离散时间，用类似的方法可以得到式(2.30)中的相应结论。

2.4 谱因式分解

上面讨论的用于最小相位/全通分解的方法在许多场景中都是很有用的。一个让人特别感兴趣的场景将出现在后面的章节中，在那个时候，已经获得或者已经测量出了一个稳定系统的频率响应的模值，该系统的传递函数 $H(s)$（实数值的冲激响应）是有理的，而其目的是从这些信息中恢复出 $H(s)$。一个类似的任务可能会在 DT 的场景中遇到，但是在这里仍然主要关注 CT 的情况。可得

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=H(\mathrm{j}\omega)H^*(\mathrm{j}\omega) \tag{2.39}$$

或者，由于 $H^*(\mathrm{j}\omega)=H(-\mathrm{j}\omega)$，

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega) \tag{2.40}$$

现在令 $s=\mathrm{j}\omega$，$H(\mathrm{j}\omega)$ 就是 $H(s)$，所以

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=H(s)H(-s)|_{s=\mathrm{j}\omega} \tag{2.41}$$

78

对于 $H(s)$ 中的任何分子或分母中的因式 $(s-a)$，在 $H(s)H(-s)$ 中都会有一个对应的因式 $(-s-a)$。于是 $H(s)H(-s)$ 将会由形如 $(s-a)(-s-a)=-s^2+a^2$ 的分子或分母中的因式组成，所以它是 s^2 的有理函数。因此，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 就是 ω^2 的有理函数，可以通过代

换式 $\omega^2=-s^2$，得到乘积式 $H(s)H(-s)$。

乘积式 $H(s)H(-s)$ 通常具有成对的零点，这些零点关于 s 平面的虚轴是镜像的，它的极点也有类似的情况。对于 $H(s)H(-s)$ 的任何零极点在实数值 a 处，存在另外一个镜像 $-a$，同样对于任何零极点在复数值 q 处，会有对应的零极点在 q^* 处。同理，$-q$ 对应于 $-q^*$，这就形成了复共轭对 (q, q^*) 和它的镜像 $(-q^*, -q)$。于是，需要将每个镜像的实极点和零点之一，以及每个极点和零点的镜像共轭对之一分配给 $H(s)$，且把镜像分配给 $H(-s)$。

如果假设(或已知) $H(s)$ 是因果的，也是稳定的，那么就把每一对极点中左半平面的极点分配给 $H(s)$。在没有进一步的条件要求或假设的情况下，除了只需要把每个极点镜像对中的一个分配到 $H(s)$，而把其他的分配到 $H(-s)$ 之外，不需要对零点的分配给出限制。如果有进一步的条件要求或假设系统的全部零点位于左半平面中，那么来自于每个镜像对的左半平面中零点被分配给 $H(s)$，而右半平面中的零点被分配到 $H(-s)$。因式分解 $H(s)H(-s)$ 以获得 $H(s)$ 的过程称为谱因式分解(spectral factorization)。

例 2.7　谱因式分解

考虑一个被测量的或者被近似的频率响应模值为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+13\omega^2+36}=\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+4)(\omega^2+9)} \tag{2.42}$$

代换 $\omega^2=-s^2$，可得

$$H(s)H(-s)=\frac{-s^2+1}{(-s^2+4)(-s^2+9)} \tag{2.43}$$

对其进一步因式分解，

$$H(s)H(-s)=\frac{(s+1)(-s+1)}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)} \tag{2.44}$$

现在保留适当的因式与 $H(s)$ 和 $H(-s)$ 相关联。假设系统是因果和稳定的，左半平面中的两个极点 $s=-2$ 和 $s=-3$ 一定和 $H(s)$ 相关联。在没有进一步假设的情况下，分子因式中的其中之一会和 $H(s)$ 相关联，另外一个则与 $H(-s)$ 相关联。但是，如果已知或假设 $H(s)$ 是最小相位的，那么会把左半平面的零点分配给 $H(s)$，通过这样的选择，可得

79

$$H(s)=\frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \tag{2.45}$$

在 DT 情况下，类似的处理方式会从 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2$ 中得出 $H(z)H(1/z)$ 的表达式。$H(z)H(1/z)$ 的零点出现在互为共轭的倒数对中，其极点也具有类似的情况。再次将这样的共轭倒数对进行分配，基于已有的知识，将共轭倒数对中的一个分配到 $H(z)$，另一个分配给 $H(1/z)$。例如，如果已知系统是因果稳定的，那么 $H(z)H(1/z)$ 的所有位于单位圆内的极点被分配给 $H(z)$；并且如果系统 $H(z)$ 也是最小相位的，那么 $H(z)H(1/z)$ 所有位于单位圆内的零点就被分配给 $H(z)$，连同那些额外的许多在原点处的零点也被分配给 $H(z)$，这样就可以确保系统是因果可逆的。◀

2.5　延伸阅读

第 2 章再次复习了信号与系统的基本概念，在第 1 章的末尾列出的扩展文献对本章也是同样有用的。为了进一步获取群延迟，以及它对信号传输和音频影响的相关知识，可参考[Op1][Op2][La1]和[Zad]。最小相位系统和谱因式分解在[Gui][He1][Moo][Op2][Pa3][Pa4]和[Th1]中会讨论到，这些相关知识在第 11～13 章中的功率谱密度的设置中还会出现。

80

习题

基础习题

2.1　对下列说法，确定正确与否：

(a) 对于频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)=3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$ 的系统，相位延迟和群延迟相同。

(b) 一个 LTI 系统(CT 和 DT)时移后的特征函数，总是这个 LTI 系统的特征函数。

(c) 一个 LTI 系统(CT 和 DT)的特征函数的线性组合，总是这个 LTI 系统的特征函数。

对于下面 3 个问题，考虑一个 DT LTI 系统，系统的单位采样响应和对应的频率响应分别为：

$$h[h]=\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]-\delta[n],$$

$$H(e^{j\Omega})=\frac{\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

(d) 该系统是因果的。

(e) 该系统是有界输入、有界输出稳定的。

(f) 输入为 $x[n]=(-1)^n$(对全部的 n)，系统输出 $y[n]$的形式为：

$$y[n]=K_1(-1)^n+K_2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}u[n-1],$$

其中，$K_1\neq 0$ 且 $K_2\neq 0$.

2.2　对下面的多项选择题，选择正确答案并给出简要说明。系统的频率响应如图 P2.2 所示 $(-\pi<\Omega<\pi)$。

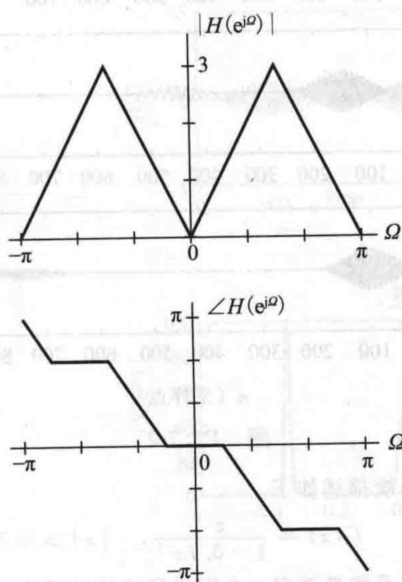


图　P2.2

(a) 输入信号是 $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$，输出是

(i) $y[n]=2x[n-2]$

(ii) $y[n]=2x[n-1]$

(iii) $y[n]=2x[n]$

(iv) $y[n]=2x[n+1]$

(b) 输入信号是 $x[n]=s[n]\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$，其中，$s[n]$是一个频率非常低的带限信号(与 $2\pi/3$ 相比)，输出可能是

(i) $y[n]=2s[n+1]\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n)\right)$

(ii) $y[n]=2s[n]\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n-1)\right)$

(iii) $y[n]=2s[n-1]\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n-1)\right)$

(iv) $y[n]=2s[n-1]\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n)\right)$

2.3　一个滤波器频率响应的模的平方为

$$|H(j\omega)|^2=\frac{\omega^2+1}{\omega^2+100}$$

试确定 $|H(j\omega)|$，已知系统是因果稳定的，并且有一个因果稳定的逆，且假设在 $\omega=0$ 处 $|H(j\omega)|$ 为正。

2.4　考虑一个 DT LTI 系统，它的单位采样响应 $h[n]$是 $\delta[n]-\delta[n-1]$。

(a) 该系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$可以写成如下形式

$$H(e^{j\Omega})=2e^{j\theta(\Omega)}\sin(\Omega/2)$$

确定 $\theta(\Omega)$，其中 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$，并且系统的相位延迟和群延迟也在这个频率范围内。

(b) 如果系统的输入是

$$x[n]=p[n]\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

其中，$p[n]$是变化缓慢的(窄带)包络，输出信号的近似表达式是

$$y[n]=q[n]\cos\left(\frac{\pi(n-\eta_0)}{3}\right)$$

确定 η_0，并用语言描述 $q[n]$与 $p[n]$之间的关系。

2.5　一个因果 LTI 系统的输出 $y(t)$和输入 $x(t)$之间的关系可用如下微分方程来表示

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(a) 确定系统的频率响应

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

并画出关于 ω 的模和相位函数的图形。

(b) 根据(a)中的频率响应 $H(j\omega)$，确定并画出该系统的群延迟 $\tau_g(\omega)$。

2.6　考虑信号

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n p(t-nT)\cos(\omega_1 t)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n p(t-nT)\cos(\omega_2 t)$$

其中，$f_1=\omega_1/2\pi=1\text{kHz}$，$f_2=\omega_2/2\pi=3\text{kHz}$ 且 $p(t)=\text{sinc}(0.5\times10^3 t)$，$t$ 以秒为单位。

假设该信号传输过程中经过一个信道，该信

道的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 如图 P2.6 所示。

(a) 画出该信道的关于 ω 的群延迟函数图。

(b) 请给出信道输出 $y(t)$ 的表达式。

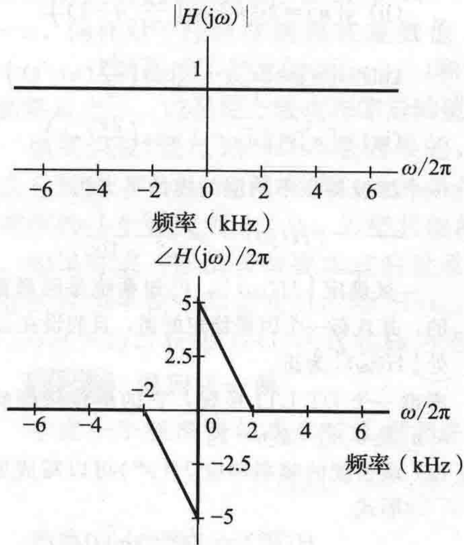


图 P2.6

2.7 图 P2.7-1 中的第一幅图展示了信号 $x[n]$ 是 3 个在时间上不交叠的窄带脉冲之和。该信号傅里叶变换的模 $|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|$ 如第二幅图所示。滤波器 A 是一个 DT LTI 系统，它的频率响应的模和群延迟分别由第三和第四幅图表示。

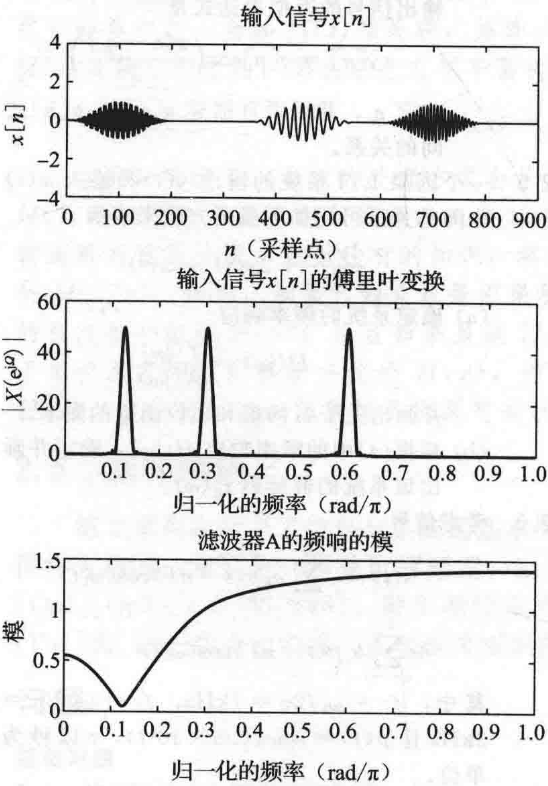


图 P2.7-1

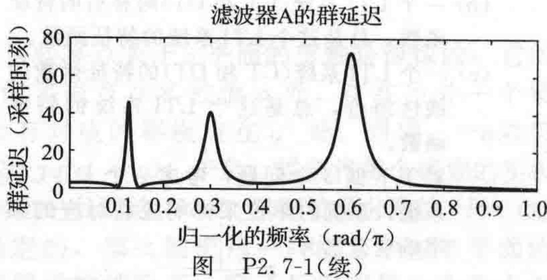


图 P2.7-1(续)

图 P2.7-2 中的 4 幅图代表了 4 种可能的输出信号 $y_i[n]$，$i=1, 2, 3, 4$。

当滤波器 A 的输入是 $x[n]$ 时，确定哪个是滤波器 A 的可能输出信号，明确说明理由。

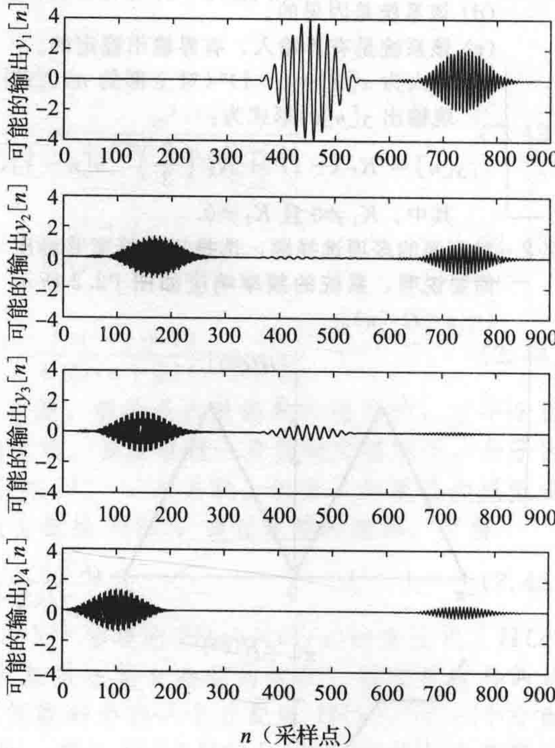


图 P2.7-2

2.8 系统描述如下

$$G(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.7z^{-1}},\quad |z|>0.7$$

该系统是否有一个因果稳定的逆系统？

如果是，确定代表该因果稳定逆系统的传递函数 $G_1(z)$（包括它的收敛域）。

如果不是，请给出全通系统 $G_{\mathrm{AP}}(z)$ 的传递函数（包括它的收敛域）和最小相位系统的传递函数 $G_{\mathrm{MP}}(Z)$（包括它的收敛域），这样，

$$G(z)=G_{\mathrm{MP}}(z)G_{\mathrm{AP}}(z)$$

2.9 请分别写出乘积为下面稳定系统函数的全通系统函数和最小相位系统函数。注意，(a)部分属于一个 CT 系统，而(b)部分属于一个

DT 系统。

(a)　$G(s)=\frac{s-2}{s+1}=A(s)M(s)$

其中，$A(s)$是全通系统且 $M(s)$是最小相位系统。

(b)　$H(z)=1-6z=B(z)N(z)$

其中，$B(z)$是全通系统，$N(z)$是最小相位系统。

2.10　一个 CT 系统的频率响应为 $H_1(\mathrm{j}\omega)$，相关的群延迟是 $\tau_{g1}(\omega)$，另一个系统的频率响应为 $H_2(\mathrm{j}\omega)$，相关的群延迟是 $\tau_{g2}(\omega)$。两个系统级联后的系统的频率响应为 $H_1(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega)$，请问级联后的系统群延迟是什么？说明你的推理。

2.11　图 P2.11-1 表示一个 DT LTI 系统，系统输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$。

滤波器 A 的频率响应和群延迟函数如图 P2.11-2 所示，图 P2.11-2 中还给出了 3 个窄带脉冲信号的和信号 $x[n]$，以及它的傅里叶变换的模。

在图 P2.11-3 中，已知 4 个可能的输出信号 $y_i[n]$，$i=1, 2, 3, 4$。当输入是$x[n]$时，试确定它们中的哪一个是滤波器 A 的输出，并给出你的合理解释。

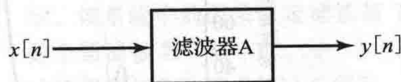


图 P2.11-1　滤波器 A

高级习题

2.12　考虑一个因果的 DT LTI 系统，频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\Omega}\frac{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

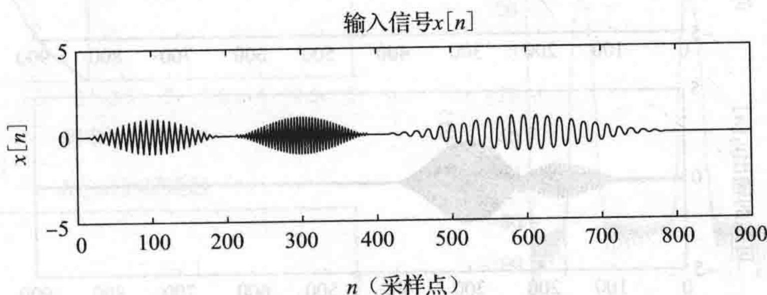
(a) 证明：对于全部频率，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|$是单位 1。

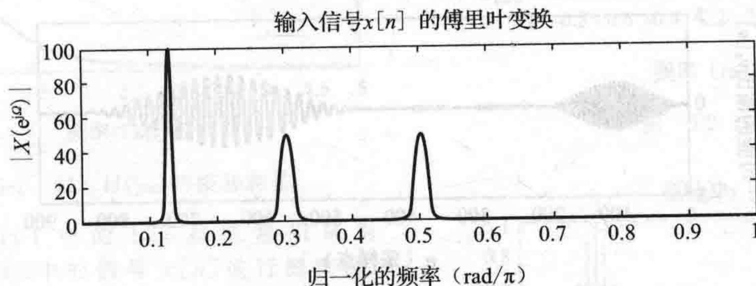
(b) 系统的频率响应

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\Omega}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\frac{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

该系统的群延迟由下式确定

$$\tau_{g,F}(\Omega)=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\Omega}$$





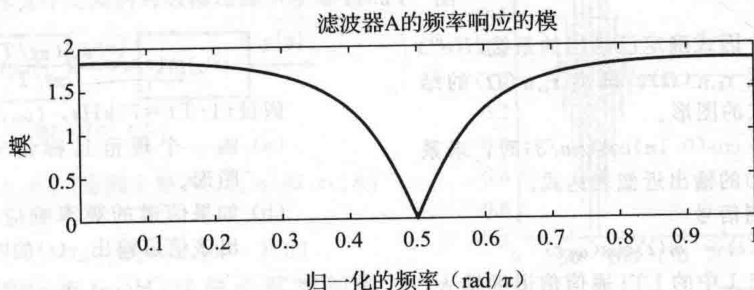


图　P2.11-2

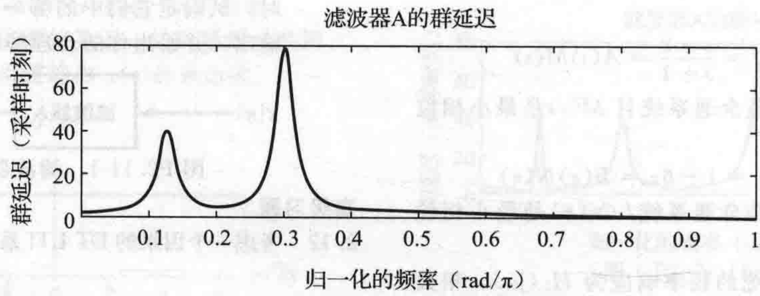


图 P2.11-2 （续）

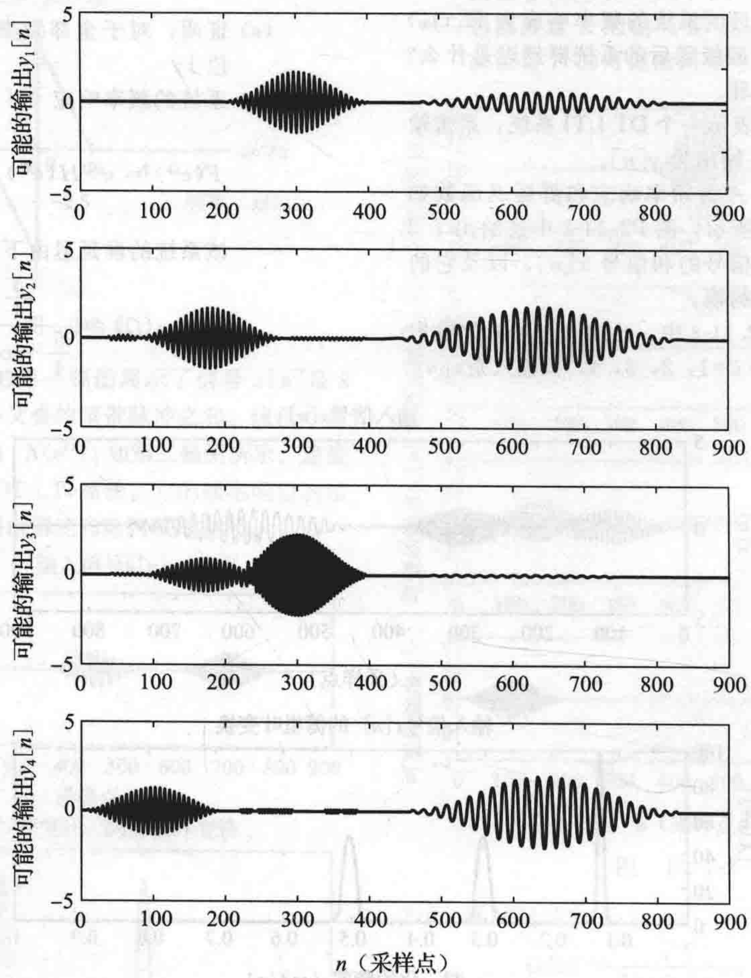


图 P2.11-3

使用这个因式确定已给出的系统$H(e^{j\Omega})$的群延迟 $\tau_{g,H}(\Omega)$。画出 $\tau_{g,H}(\Omega)$ 的结果表达式的图形。

(c) 当输入是 $\cos(0.1n)\cos(\pi n/3)$时，求系统 $H(e^{j\Omega})$的输出近似表达式。

2.13 假如将已调制信号

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_0 t)$$

作为图 P2.13-1 中的 LTI 通信信道的输入，该信道的频率响应为 $H(j\omega)$，其中，调制信号是

$$m(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

假设$(1/T)=75\text{kHz}$，$(\omega_0/2\pi)=1300\text{kHz}$。

(a) 画一个规范且标记完全的 $X(j\omega)$ 的图形。

(b) 如果信道的频率响应如下式所示，找出该信道输出 $y(t)$的时域表达式。

$$H(j\omega) = e^{-j\omega(4\times10^{-6})}$$

(c) 如果信道特征实际显示在图 P2.13-2 中，而不是像(b)中指定的那样，请找

出信道输出 $y(t)$的一个近似(但尽可能精确)的时域表达式。另外，陈述信号或者信道的什么特征，能用于保证做出近似的合理性。

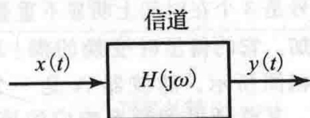


图 P2.13-1　信道

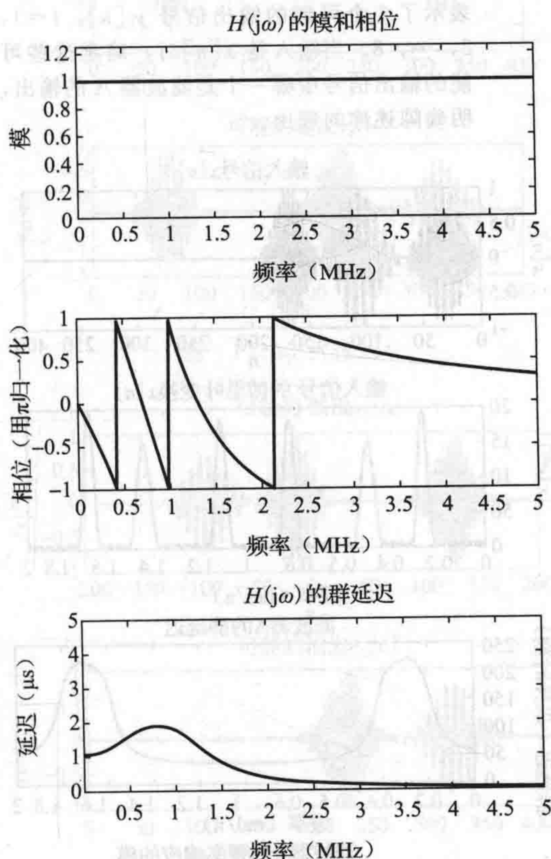


图 P2.13-2　(1) $H(j\omega)$的模和相位

2.14　图 P2.14-1 中的 LTI 系统是用来对图 P2.14-2中的信号 $x[n]$进行滤波的。$x[n]$的傅里叶变换的对数模也显示在其中。

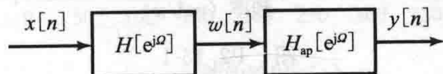


图　P2.14-1

输入 $x[n]$是两个脉冲 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的和：

$$x[n]=x_1[n]+x_2[n-150]$$

$x_1[n]$和 $x_2[n]$这两个脉冲如图 P2.14-3 所示。图 P2.14-1 中的第一个滤波器有一个冲激响应 $h[n]$，频率响应为 $H(e^{j\Omega})$，它们都是纯实数的。这个滤波器的对数模 $20\lg|H(e^{j\Omega})|$如图 P2.14-4 所示。该系统中的因果稳定滤波器 $H_{ap}(e^{j\Omega})$是全通滤波器，即 $|H_{ap}(e^{j\omega})|=1$。全通滤波器的相位如图 P2.14-5 所示。

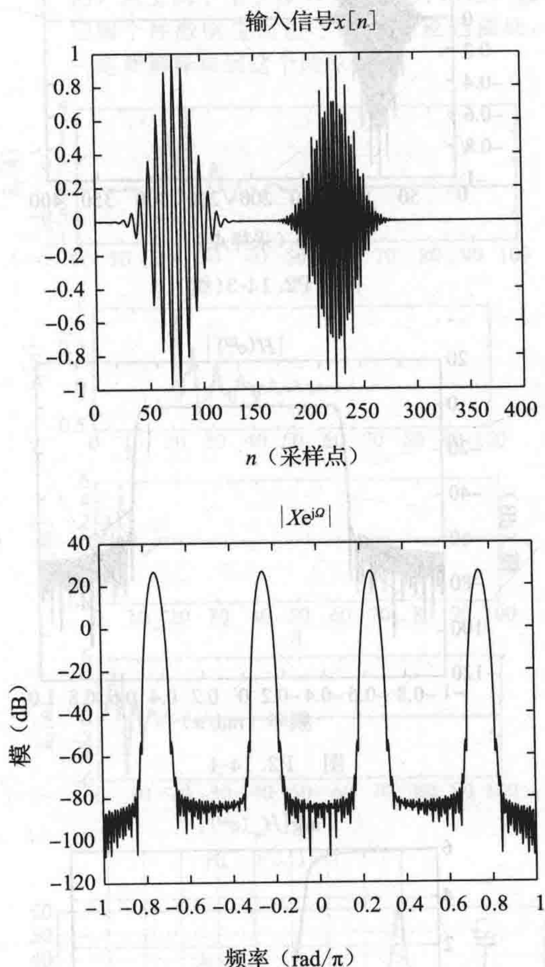


图　P2.14-2

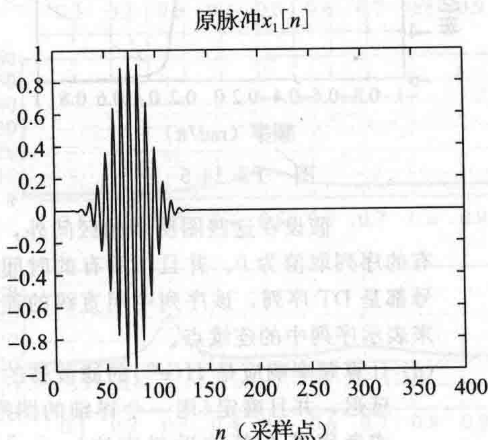


图　P2.14-3

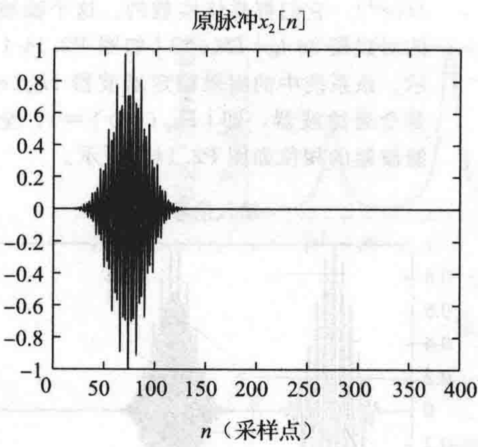


图 P2.14-3(续)

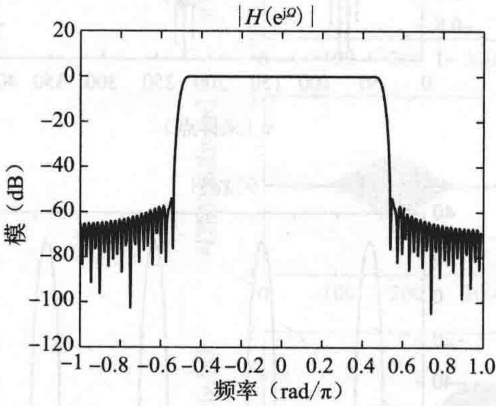


图 P2.14-4

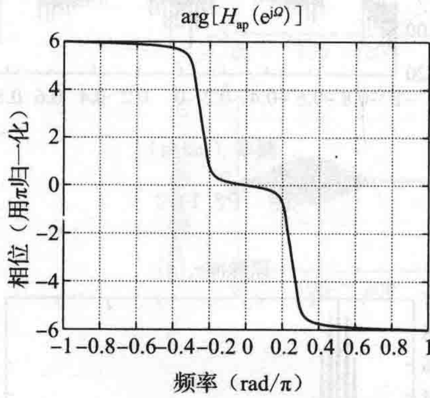


图 P2.14-5

假设在这些图所示的区间外，所有的序列取值为 0。并且，所有的时间信号都是 DT 序列，该序列中用直线的连接来表示序列中的连续点。

(a) 计算频率响应是 $H(e^{j\Omega})$ 的滤波器的群延迟，并且确定(用一个详细的图形，或者用某个其他近似方法) $w[n]$ 和 $w[n]$ 的傅里叶变换的模 $|W(e^{j\Omega})|$，其中 $|\Omega|<\pi$。

(b) 你所期望的输出信号的样子像什么，画出带有标识的 $y[n]$ 的示意图。

2.15 图 P2.15-1 中的第一幅图表示信号 $x[n]$，该信号是 3 个在时间上明显不重叠的窄脉冲的累加。它的傅里叶变换的模 $|X(e^{j\Omega})|$ 如第二幅图所示。滤波器 A 是一个 DT LTI 系统，其群延迟和频率响应的模函数分别如第三幅图和第四幅图所示。

图 P2.15-2 和图 P2.15-3 中保留的图形表示了 8 个可能的输出信号 $y_i[n]$，$i=1, 2, \cdots, 8$。当输入是 $x[n]$时，确定这些可能的输出信号中哪一个是滤波器 A 的输出，明确陈述你的理由。

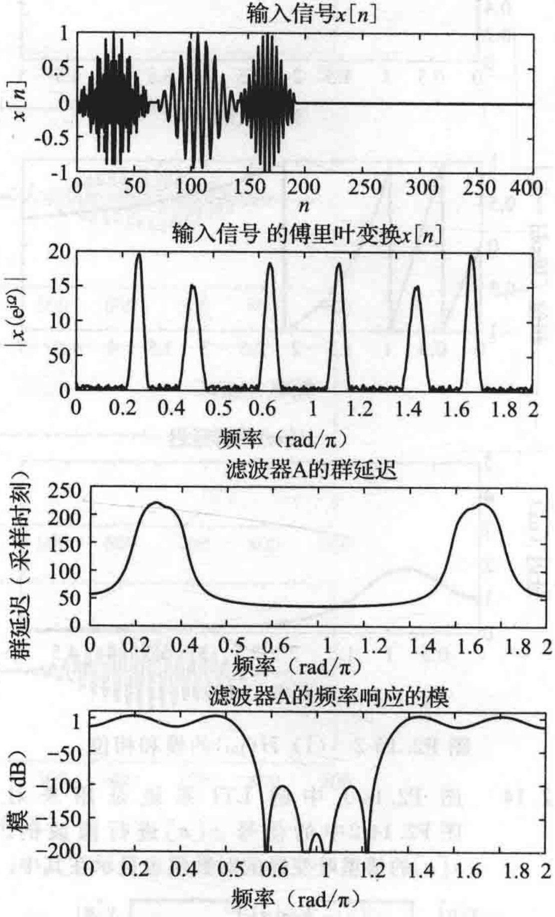


图 P2.15-1

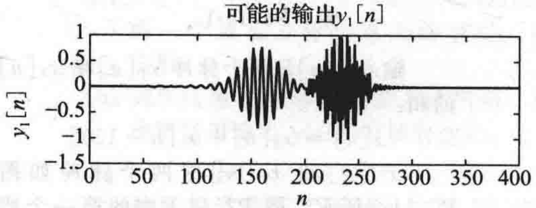


图 P2.15-2

可能的输出$y_2[n]$

可能的输出$y_3[n]$

可能的输出$y_4[n]$

图 P2.15-2(续)

可能的 输出$y_5[n]$

可能的输出$y_6[n]$

可能的输出$y_7[n]$

可能的输出$y_8[n]$

图 P2.15-3

2.16 4 个不同全通系统的冲激响应 $h_1[n]$～$h_4[n]$从上到下显示在图 P2.16-1 中(为提高可读性，图中与 n 的连续值对应的 $h_i[n]$ 的连续值用直线连接起来)。图 P2.16-2 显示的是对应的群延迟，但是其顺序是随机的，从上到下用字母 A 到 D 进行标记。确定哪个冲激响应对应于哪个群延迟曲线，一定要解释得到这个的原因。

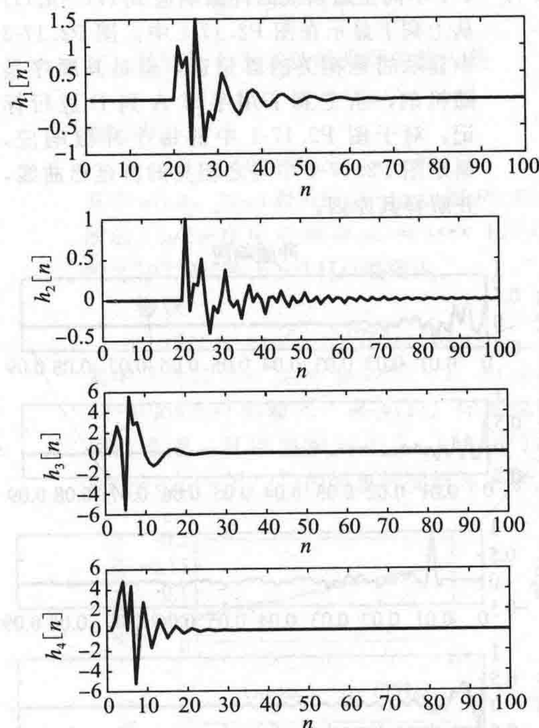


图 P2.16-1

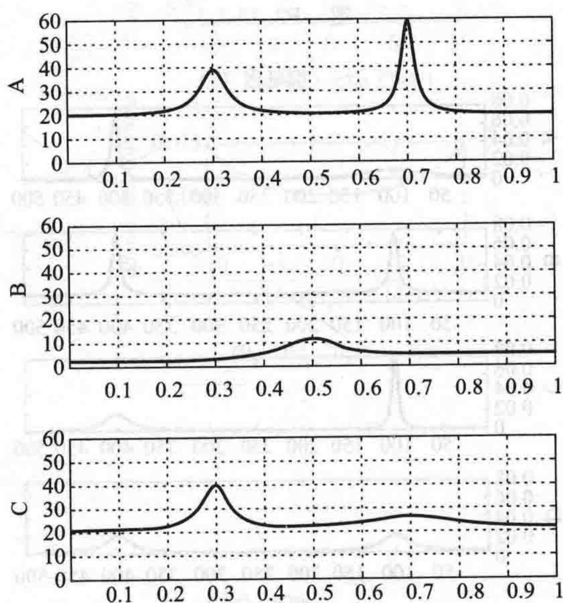


图 P2.16-2

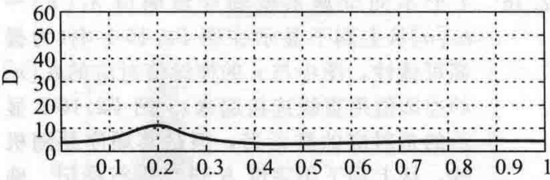


图　P2.16-2(续)

2.17　4 个不同全通系统的冲激响应 $h_1(t)\sim h_4(t)$ 从上到下显示在图 P2.17-1 中。图 P2.17-2 中显示的是相关的群延迟，但是其顺序是随机的，从上到下用字母 A 到 D 进行标记。对于图 P2.17-1 中的每个冲激响应，确定图 P2.17-2 中与之相关的群延迟曲线，并解释其原因。

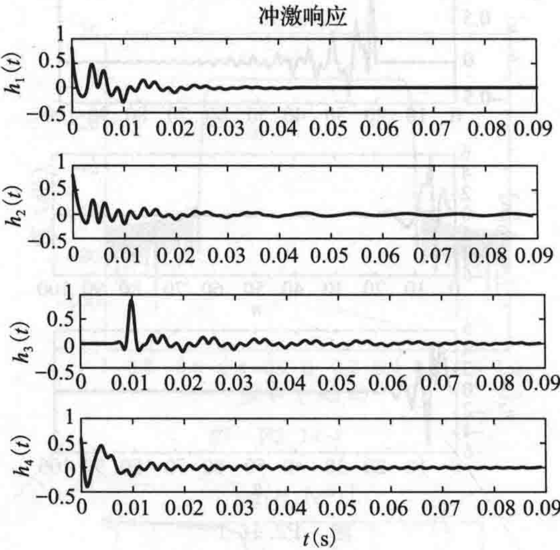


图　P2.17-1

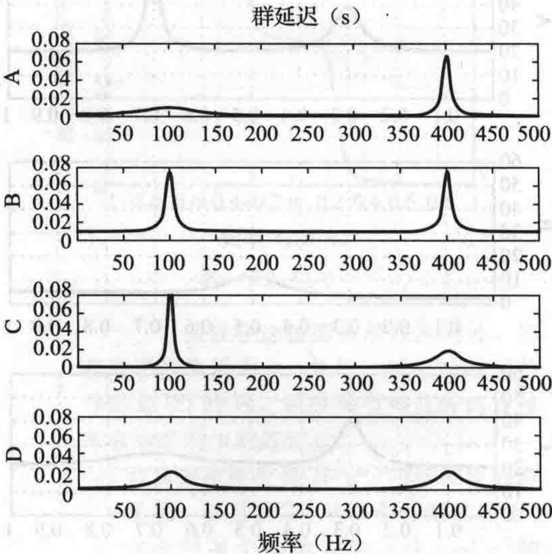


图　P2.17-2

2.18　考虑一个理想的(带限内插)D/C 转换器，输入是 $s_d[n]$，输出是 $s_c(t)$，重构间隔 $T=0.5\times10^{-3}$s，如图 P2.18-1 所示。

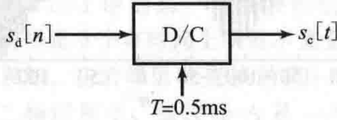


图　P2.18-1

假设 $s_d[n]$的傅里叶变换如图 P2.18-2 所示。

(a) 用 $s_d(e^{j\Omega})$表示 $s_c(j\omega)$，并给出区间 $|\omega|<2\pi\times2000$rad/s 上，标记完整的$s_c(j\omega)$示意图。

现在考虑一种情境，其中频率响应 $H_c(j\omega)$的模在每处都等于 1，相位和群延迟特性由图 P2.18-3 给出。

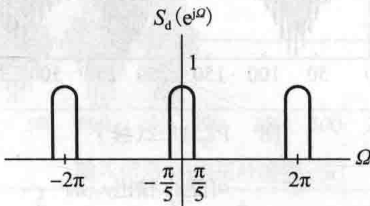
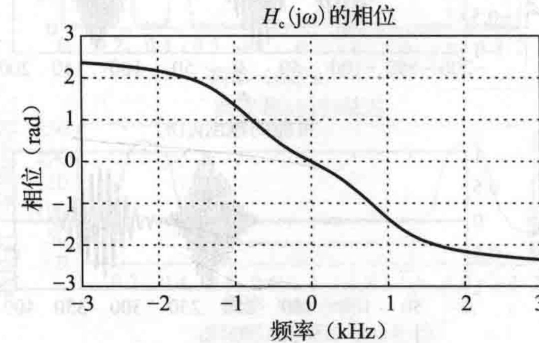


图　P2.18-2



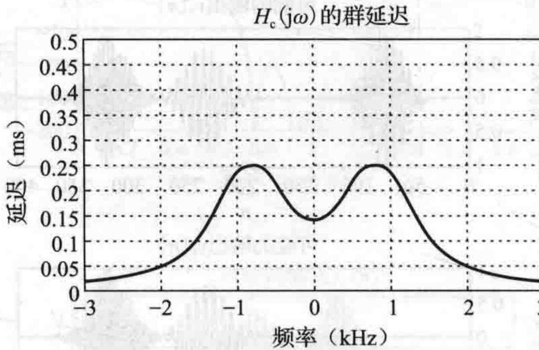


图　P2.18-3

(b) 根据图 P2.18-4 给出的 $x_d[n]$，画出 $X_c(j\omega)$的详细示意图，其中 $|\omega|<2\pi\times2000$rad/s。

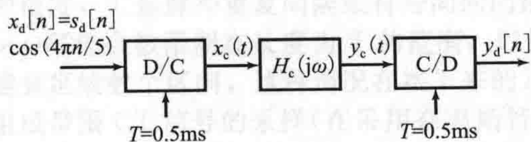


图 P2.18-4

(c) 根据 $s_c(t)$，给出 $x_c(t)$的时域表达式。

(d) 根据 $s_c(t)$，确定 $y_c(t)$和 $y_d[n]$的近似(但尽可能精确的)时域表达式。

(e) 从 $y_d[n]$到 $y_d[n]$的映射是否对应一个 LTI 系统？如果是，相关的频率响应 $H(e^{j\Omega})$与 $H_c(j\omega)$之间的关系如何？在 $\Omega=4\pi/5$ 处，群延迟是什么？你能看出该如何解释系统 $H(e^{j\Omega})$的部分群延迟对信号 $x_d[n]$的影响吗？

扩展习题

2.19 一个 DT 全通系统的系统函数一般形式是

$$H_{AP}(z)=A\prod_{k=1}^{M}\frac{z^{-1}-a_k^*}{1-a_kz^{-1}}$$

对于一个 CT 全通系统而言，

$$H_{AP}(s)=B\prod_{k=1}^{M}\frac{s+b_k^*}{s-b_k}$$

从 CT 全通系统的角度来说明这个问题，对于离散时间的情况，结论完全一致。

(a) 对于已知表达式中的 $M=1$ 和实数 b_k，画出 $H_{AP}(s)$的零极点图。

(b) 对于 $M=1$ 和复数 b_k，$H_{AP}(s)$表示一个因果稳定系统，证明对于全部频率，$H_{AP}(s)$的群延迟总是大于 0。你可以通过显式微分相位表达式的方式来完成对这个问题的解析，但是，从零极点的几何形式的角度来讨论它也是很简单的(且更加直观)。

(c) 参考(b)构造一个讨论，用以总结一个因果稳定的 CT 全通系统总有正的群延迟(尽管群延迟的特定值在不同的频率处当然会是不同的)。

2.20 一条光束通过一条长 L 千米的光纤进行传播可以被建模成一个 LTI 系统，系统的冲激响应为 $h_L(t)$，频率响应为 $H_L(j\omega)$，它们都与光纤长度 L 有关。因此，当光纤的光输入是 $x(t)$时，结果输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_L(t-\tau)d\tau$$

如图 P2.20-1 所示。

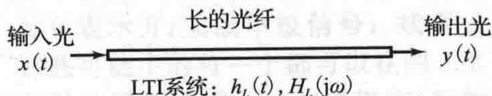


图 P2.20-1

当这条 L 千米长的光纤的输入是

$$x(t)=\cos(\omega t)$$

输出为

$$y(t)=10^{-\alpha(\omega)L}\cos(\omega t-\beta(\omega)L)$$

其中 $\alpha(\omega)$、$\beta(\omega)$和 $d\beta(\omega)/d\omega$ 如图 P2.20-2 所示，$\omega/2\pi$ 在中心频率 $\omega_0=4\pi\times10^{14}/s$ 的$\pm10^{13}$ Hz($=\pm10$THz)范围内。

假设

$$x(t)=\exp(-t^2/T^2)\cos(\omega_0 t)$$

其中 $T=10^{-6}$ s，$\omega_0=4\pi\times10^{14}/s$，$x(t)$是 $L=10$km光纤的输入，求 $y(t)$。详细说明你的推理。可以假设对于 $|\omega|>10/T$，$s(t)=\exp(-t^2/T^2)$的傅里叶变换等于零。

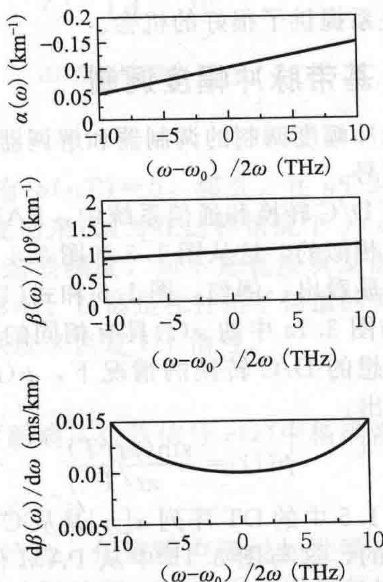


图 P2.20-2

81 ~ 101

第 3 章

脉冲幅度调制

在第 1 章讨论过对 CT 信号的 DT 处理，并且在此情况下回顾了从一个 DT 序列重构出一个 CT 信号时的离散到连续的变换。式(1.94)包含的基本结构实际上说明了等间隔的连续时间脉冲序列的产生，最典型的是如式(1.81)所示的一个理想的低通滤波器脉冲响应，其幅度值等于 DT 序列的幅值。这就构成了脉冲幅度调制(PAM)。

此外，对于从 DT 序列中产生 CT 信号来说，另一个非常有用且十分重要的情境就是通信系统，在该情况下 DT 数据可能是数字数据或量化数据，这些数据将作为连续时间信号通过信道进行传输，然后在接收端再把 DT 序列恢复出来。例如，通过电话线或者电缆，把 01 二进制序列从一个计算机传输到另一个计算机，或者是通过一个高频的电磁信道从一个数码手机发射 01 序列到一个基站。这些例子需要具有能传输 CT 信号的模拟信道，并在信道带宽和其他限制条件上能够兼容。这就将影响连续时间波形的选择，而离散序列正好要被调制到这些连续时间波形上。

由 DT 信号到适于传输的 CT 信号的转换，以及在接收机上恢复成 DT 信号的转换都由调制解调器(调制器/解调器)来完成，其中很多都是基于 PAM 来使用的。脉冲幅度调制除了在信号处理和通信系统中起着重要作用之外，它还为进一步解析 CT 域和 DT 域之间的关系提供了很好的机会。

102

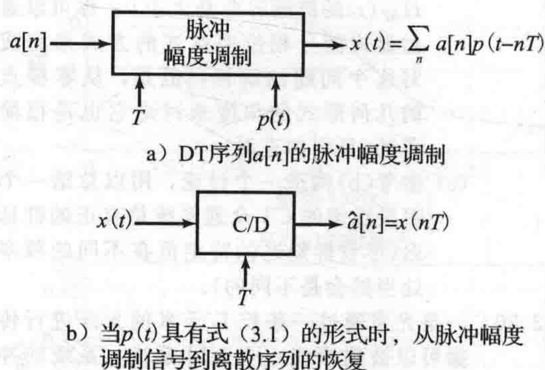
3.1 基带脉冲幅度调制

脉冲幅度调制的调制器和解调器结构如图 3.1 所示。图 3.1a 中的信号 $x(t)$称为脉冲调幅信号。

在 D/C 转换和通信系统中，PAM 的应用是极其相似的，这从图 1.5 和图 3.1 的比较中可以明显看出。例如，图 1.5 和式(1.81)中的 $y_c(t)$与图 3.1a 中的 $x(t)$具有相同的形式，但是在理想的 D/C 转换的情况下，$p(t)$由下式特别给出：

$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \tag{3.1}$$

图 1.5 中的 DT 序列 $x[n]$是从 CT 信号中获得到的，这与图 3.1b 中从 PAM 信号中得到$\hat{a}[n]$的方式相同。所以，尽管其情况大不相同，但类似的基本分析仍然是适用的。



a) DT序列$a[n]$的脉冲幅度调制

b) 当$p(t)$具有式 (3.1) 的形式时，从脉冲幅度调制信号到离散序列的恢复

图 3.1

3.1.1 发送信号

如以上所述，PAM 调制中通过 CT 信道进行通信的思想就是传送具有某种特定波形 $p(t)$的 CT 脉冲序列，并通过这些脉冲幅度的序列来携带信息，所得的 PAM 信号为

$$x(t) = \sum_n a[n]p(t - nT) \tag{3.2}$$

位于发送端的基带信号，通常还会进一步被调制到一个高频的正弦或者复指数载波上，从而在实际传输之前，形成一个带通信号，尽管在这里忽略了这一点。序列值 $a[n]$就是脉

103

冲幅度，T 是脉冲重复间隔或符号间的间距，所以 $1/T$ 是符号速率(或者叫波特率)。脉冲 $p(t)$ 可能会被限制在长度为 T 的范围，以使得式(3.2)的项不重叠，或者脉冲 $p(t)$ 也有可能会延续数个区间，这种情况在接下来的几个例子中很快就能看到。DT 信号 $a[n]$ 可能会组成带限 CT 信号的采样(在采用奈奎斯特速率或者更高速率采样的情况下，且该信号可能被量化到了一系列特定的量化等级上)；或者 1 与 0 表示开/关或单极信号；或者 1 与 -1 表示反极性信号(antipodal signal)或极性信号。这些可能中的每一个都可以在图 3.2 中看到，这里的基本脉冲是一个简单的矩形脉冲。这些脉冲需要足够大的信道带宽(阶数至少为 $1/\Delta$)，以使得在传输过程中不会出现明显的失真，因此，找到使用更少的带宽的可替代选择，从而满足信道的限制常常是很有必要的。这在考虑设计合适的脉冲形状时十分重要，接下来很快就会对它们进行详细的阐述。

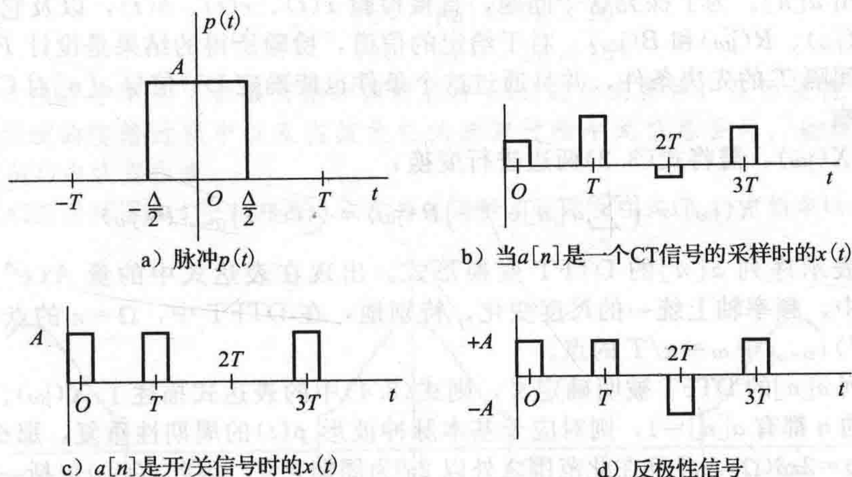


图 3.2　基带收送信号

如果选择这样的 $p(t)$，使得 $p(0)=1$，在 $n\neq0$ 时有 $p(nT)=0$，那么，在 nT 时刻对 $x(t)$ 采样，幅度 $a[n]$ 就有可能从 PAM 波形 $x(t)$ 中恢复出来(因为在这种情况下 $x(nT)=a[n]$)。然而，这里关心的是从接收机的信号中恢复出这些幅度，而不是直接从发送信号中恢复，所以需要考虑通信信道对 $x(t)$ 产生了怎样的影响。目标是在补偿了信道的失真和噪声之后，再利用如图 3.1b 所示的 C/D(连续/离散)系统来恢复 DT 信号。 104

3.1.2　接收信号

当一个 PAM 信号通过信道传输时，信道的特性将影响从接收信号 $r(t)$ 中精确恢复脉冲幅度 $a[n]$ 的能力。可以令 $r(t)$ 为

$$r(t)=h(t)*x(t)+v(t) \tag{3.3}$$

对应的信道冲激响应 $h(t)$ 具有线性时不变(LTI)特性，信道噪声通过加性噪声信号 $v(t)$ 表示。这里仍然想要从 $r(t)$ 的采样或者从合适的经滤波后的 $r(t)$ 的采样中恢复出脉冲幅度 $a[n]$，其中采样间隔为 T。

总体的模型如图 3.3 所示，其中 $f(t)$ 表示接收机中的 LTI 滤波器的冲激响应。该接收机滤波器在滤除掉频带之外的噪声时扮演了关键作用，而信号的信息则集中在这个频带之外。第 12 章和第 13 章将详细介绍噪声和过滤噪声的方法。这一章仅仅关心无噪声的情况。即便在没有噪声的情况下，在采样之前用一个滤波器补偿信道失真特性，比如群延迟和色散，仍然是很值得的。

3.1.3　频域特性

假设噪声 $v(t)$ 为 0，信道和接收机滤波器的组合频率响应在 $P(\mathrm{j}\omega)$($p(t)$ 的傅里叶变换

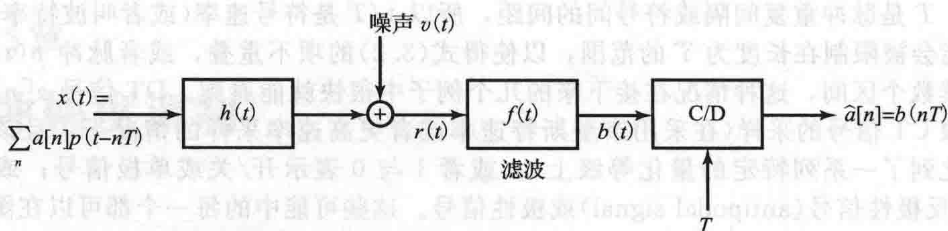


图 3.3　一个脉冲幅度调制系统的传输、信道和接收机模型

形式)有意义的频率范围内是统一的，则 $b(t)$ 和 $x(t)$ 相等。然而，这并不能保证 $\hat{a}[n]$ 和 $a[n]$ 相等，这是因为即使在无噪声的情况下，如果 $p(t)$ 没有附加条件，对 $b(t)$ 周期采样也不能够恢复出 $a[n]$。为了探究这个问题，直接检验 $x(t)$、$r(t)$、$b(t)$，以及它们各自的傅里叶变换 $X(\mathrm{j}\omega)$、$R(\mathrm{j}\omega)$ 和 $B(\mathrm{j}\omega)$。对于给定的信道，检验所得的结果是设计 $P(\mathrm{j}\omega)$ 以及选择符号间的间隔 T 的先决条件，并且通过这个条件也能确定 DT 信号 $a[n]$ 对 CT 信号 $x(t)$ 和 $r(t)$ 的影响。

105

要计算 $X(\mathrm{j}\omega)$，需将式(3.2)两边进行变换：

$$X(\mathrm{j}\omega)=\left(\sum_n a[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}\right)P(\mathrm{j}\omega)=A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}P(\mathrm{j}\omega) \tag{3.4}$$

其中 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 表示序列 $a[n]$ 的 DTFT 变换形式。出现在表达式中的量 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}$ 是在 DTFT 变换中，频率轴上统一的尺度变化。特别地，在 DTFT 中，$\Omega=\pi$ 的点被映射到了表达式 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\big|_{\Omega=\omega T}$ 中 $\omega=\pi/T$ 的点。

假设序列 $a[n]$ 的 DTFT 被明确定义，则式(3.4)中的表达式描述了 $X(\mathrm{j}\omega)$。举例来说，如果对所有的 n 都有 $a[n]=1$，则对应于基本脉冲波形 $p(t)$ 的周期性重复，那么当 $|\Omega|\leqslant\pi$ 时，有 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=2\pi\delta(\Omega)$，并且在此范围之外以 2π 为周期重复。因此 $X(\mathrm{j}\omega)$ 包括一系列间隔为 $2\pi/T$ 的脉冲。根据式(3.5)所示脉冲的缩放性质，每个脉冲的强度是 $P(\mathrm{j}\omega)$ 在脉冲位置的值的 $2\pi/T$ 倍：

$$\delta(\Omega)\big|_{\Omega=\omega T}=\delta(\omega T)=\frac{1}{T}\delta(\omega),\quad T\text{ 为正数} \tag{3.5}$$

在无噪声的情况下，接收信号 $r(t)$ 和来自接收机滤波器的信号 $b(t)$ 都可以进行频域特性的简单描述：

$$R(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega),\quad B(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega) \tag{3.6}$$

式(3.4)和式(3.6)中将出现一些重要的约束条件。首先要注意的是对于一个普通的 DT 信号 $a[n]$，关于信号的必要信息会分布在它的 DTFT 上，即 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 的所有频率 Ω 上，而这些频率遍及 $|\Omega|\leqslant\pi$ 的区间。仅仅知道在 $|\Omega|\leqslant\Omega_{\mathrm{a}}<\pi$ 这样一个较小范围内的 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，通常是不足以对 DT 信号进行重建的。如在式(3.4)中指定的 $\Omega=\omega T$，就会看到 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$ 将包含 DT 信号在频率 ω 处的必要信息，其中 ω 遍及整个 $|\omega|\leqslant\pi/T$ 区间。因此，如果在 $|\omega|\leqslant\pi/T$ 时 $P(\mathrm{j}\omega)\neq0$，那么 $X(\mathrm{j}\omega)$ 保留了 DT 信号的信息；如果在 $|\omega|\leqslant\pi/T$ 时 $H(\mathrm{j}\omega)P(\mathrm{j}\omega)\neq0$，那么 $R(\mathrm{j}\omega)$ 保留了 DT 信号的信息；如果在 $|\omega|\leqslant\pi/T$ 时 $F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)P(\mathrm{j}\omega)\neq0$，那么则是 $B(\mathrm{j}\omega)$ 保留了 DT 信号的信息。

以上约束条件有一定设计上的隐含意义。对于一个非零脉冲 $P(\mathrm{j}\omega)$，如果只在一个严格的小区间 $|\omega|\leqslant\omega_{\mathrm{p}}<\pi/T$ 内，就会在 DT 信号变换到 PAM 信号 $x(t)$ 时造成信息的损失，这样对于所选择的符号率 $1/T$ 就不是合适的脉冲。但是，如果符号率适当降低，降为 ω_{p}/π 或者更低时，$P(\mathrm{j}\omega)$ 就是合适的脉冲。

类似地，即使脉冲合理地设计从而使 $x(t)$ 保存了 DT 信号的信息，如果仅在一个严格的小区间 $|\omega|\leqslant\omega_{\mathrm{c}}<\pi/T$ 内有一个非零的低通信道 $H(\mathrm{j}\omega)$，其中 ω_{c} 是信道的截止频率，那么当信号由 $x(t)$ 变为 $r(t)$ 时，DT 信号的信息也会受到损失，所选择的符号率 $1/T$ 不适合

这个信道，也就需要将符号率减少到 ω_c/π 或者更低，以保留 DT 信号的信息。 106

例 3.1 PAM 系统中符号率的确定

在图 3.3 所示的 PAM 系统中，假设噪声 $v(t)=0$，$d(t)$表示 $h(t)$和 $f(t)$的组合，即

$$d(t) = h(t) * f(t) \tag{3.7}$$

所以

$$b(t) = x(t) * d(t) \tag{3.8}$$

假设 DT 序列 $a[n]$的 DTFT 是带限的，特别地，在区间$|\Omega| \leqslant \pi$中，仅在$|\Omega| \leqslant \pi/2$时非零。并且该序列以 2π 的整数倍出现周期性重复，如图 3.4 所示。

假定信道和接收机滤波器组合构成了一个理想的低通滤波器，其截止频率为 1kHz，且在通带内有不变的增益 C，也就是说，

$$D(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} C, & |\omega| < 2\pi \times 10^3 \\ 0, & |\omega| > 2\pi \times 10^3 \end{cases} \tag{3.9}$$

想要确定出符号率 $1/T$ 的最大值和调制脉冲 $p(t)$的约束条件，从而使得 $a[n]$在调制过程中，在信道的传输过程中以及在接收机的滤波过程中无信息丢失。也就是说，要让 $a[n]$能够从 $b(t)$中恢复出来。

将式(3.4)应用到图 3.4 中，在图 3.5 中另外说明了这两项在式(3.4)中相乘以产生 $X(\mathrm{j}\omega)$。

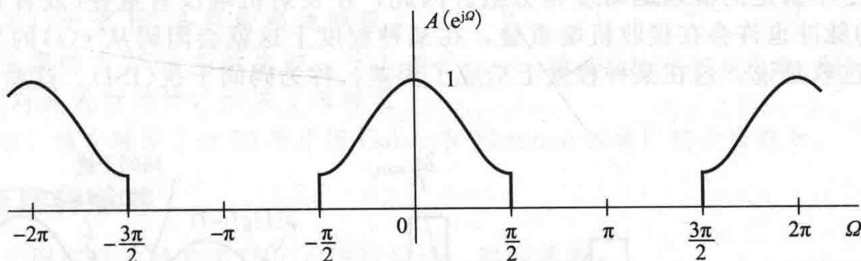


图 3.4 输入序列 $a[n]$在图 3.3 中 PAM 系统下的 DTFT 变换

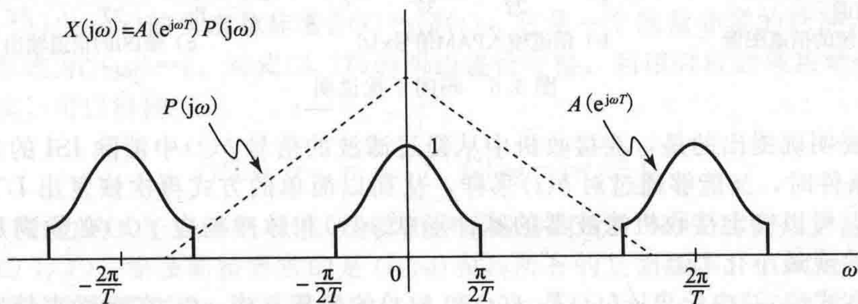


图 3.5 $P(\mathrm{j}\omega)$叠加到 $A(e^{\mathrm{j}\omega T})$上，表示了式(3.4)中的乘积 $X(\mathrm{j}\omega)$

从图 3.5 中可以明确得知，对这个例子来说，只要在$|\omega| \leqslant \frac{\pi}{2T}$时 $P(\mathrm{j}\omega) \neq 0$，该脉冲调制就不会有信息的丢失。这一点和之前对这个例子陈述的情况不同，因为在图 3.4 中假定了信号 $a[n]$的频谱没有覆盖$|\omega| < \pi$ 整个频率范围。 107

接下来，$b(t)$是 $x(t)$通过低通滤波器 $g(t)$的结果，特别地，

$$B(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} CX(\mathrm{j}\omega), & |\omega| < 2\pi \times 10^3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3.10}$$

假设在$|\omega| \leqslant \frac{\pi}{2T}$时，$P(\mathrm{j}\omega)$是非零的，则 $a[n]$的所有频率信息都包含在$|\omega| \leqslant \frac{\pi}{2T}$这个

频率范围内。因此，只要低通滤波器的截止频率大于该范围，那么所有的信息都将得到保留。否则，一些信息就会丢失。特别地，令

$$2\pi \times 10^3 > \frac{\pi}{2T} \tag{3.11}$$

或

$$\frac{1}{T} < 4 \times 10^3 \tag{3.12}$$

在符号率比 4×10^3 低时，$x(t)$能从 $b(t)$中恢复。然而，因为 $P(\mathrm{j}\omega)$和 $D(\mathrm{j}\omega)$可能施加了一定的频谱整形，所以可能没法从 $b(t)$中直接恢复出 $a[n]$。特别地，有可能会需要额外的频谱整形来均衡由 $P(\mathrm{j}\omega)$和 $D(\mathrm{j}\omega)$引起的频谱形变。在下一节，将考虑通过对如图 3.3 所示的 C/D 系统的简单使用，从而将 $a[n]$从 $x(t)$中恢复出来的情况。◀

3.1.4 接收机处的码间干扰

在没有信道损耗时，信号值能够通过在 T 的整数倍时刻的重采样过程，从如图 3.2 所示的传输脉冲串中恢复出来。然而，随着合适的时间局域化(nicely time-localized)，这些脉冲就会有无限的带宽。因为任何一个实际的信道都会有带宽的限制，所以通信信道在 PAM 波形上的一种影响是“离域(delocalize)”，或者是每个脉冲的能量在通过一个低通滤波器或者发生不恒定的群延迟时变得分散。因此，在发射机端没有重叠(或者只有良性的脉冲重叠)的脉冲也许会在接收机端重叠，在某种程度上这就会阻碍从 $r(t)$的采样中恢复脉冲幅度，也就是说，这在某种程度上造成了误差，称为码间干扰(ISI)。这些在图 3.6中进行了说明。

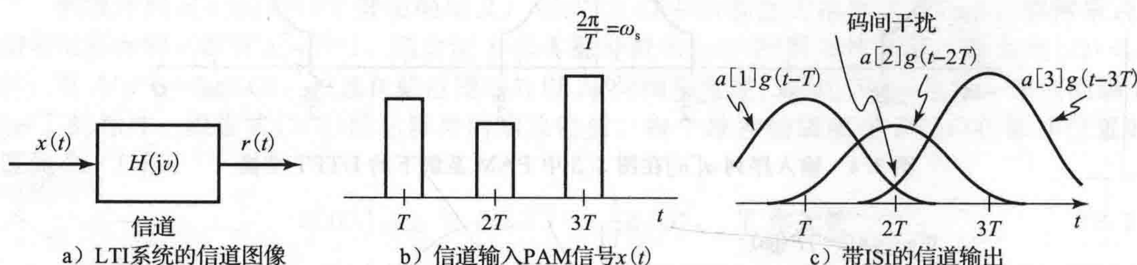


图 3.6 码间干扰说明

现在需要明确提出的是，在接收机中从经过滤波的信号 $b(t)$中消除 ISI 的条件。当满足无 ISI 的条件时，又能够通过对 $b(t)$采样，从而以简单的方式再次恢复出 DT 信号。基于这个条件，可以确定接收机滤波器的脉冲形状 $p(t)$和脉冲响应 $f(t)$必须满足的附加约束，以此消除或最小化 ISI。

$x(t)$已在式(3.2)中给出，$b(t)$是 $f(t)$和 $h(t)$的卷积，当 $x(t)$在无噪声情况下时，可以得到：

$$b(t) = \sum_n a[n] g(t - nT) \tag{3.13}$$

108 其中 $g(t)$是 $f(t)$、$h(t)$和 $p(t)$的卷积。

假定在采样时间 nT，$g(t)$是连续的(即没有间断点)，那么要求无 ISI 的信号恢复条件为

$$g(0) = c, \quad 且对非零整数\ n, \quad 有\ g(nT) = 0 \tag{3.14}$$

其中 c 是非零常数，如果满足该条件，那么它遵循式(3.13)中的 $b(nT)=ca[n]$，因此该 DT 信号在已知的比例因子 c 时就能得到精确的恢复。

例 3.2 sinc 脉冲在无 ISI 下的最大符号率

在这个例子中，考虑式(3.13)中的 $g(t)$为

$$g(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} \tag{3.15}$$

对应的 CTFT 变换结果 $G(j\omega)$ 为

$$G(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\omega_c}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.16}$$

选择码间距为 $T=\frac{\pi}{\omega_c}$，因为在 $t=0$ 时 $g(t)=1$，在其他 T 整数倍的点时 $g(t)$ 为 0，如图 3.7 所示，因此能够在接收到的采样中避免 ISI。所以就能够以符号率 $1/T$ 传送符号，该符号率为 $g(t)$ 截止频率的两倍，也就是 $1/T=(2\omega_c)/2\pi$。从之前的解释中可以看到，紧跟式(3.4)进行了涉及符号率和信道截止频率的约束条件的讨论，但是却无法期望做得更好，也就是通常情况下不能使传输速率更高。

109

在下一节，将把式(3.14)的无 ISI 的时域条件转为频域条件，这在设计给定信道的载波脉冲 $p(t)$ 和接收机滤波器 $f(t)$ 时非常有用。对式(3.14)的无 ISI 条件的频域解释，最初是由奈奎斯特于 1924 年提出的，并由他于 1928 年对此进行延伸，形成了采样定理。在此之后，该定理等了近 20 年才因 Gabor 和 Shannon 的推广被大家熟知。◀

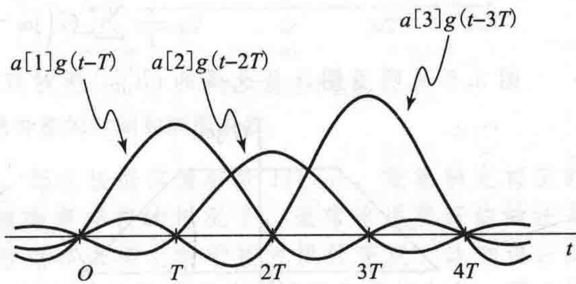


图 3.7　sinc 脉冲的无 ISI 性质示意，码间距为 $T=\frac{\pi}{\omega_c}$

3.2　奈奎斯特脉冲

通过一个周期性的脉冲串对 $g(t)$ 进行采样，得到函数：

$$\hat{g}(t)=g(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{3.17}$$

对式(3.14)中 $g(t)$ 的要求意味着 $\hat{g}(t)=c\delta(t)$，它是一个能量非零的脉冲，强度为 c，$\hat{g}(t)$ 的变换形式为 $\hat{G}(j\omega)=c$。对式(3.17)的两边进行变换，利用时域的乘积对应于频域的卷积这个事实，可以得到：

$$\hat{G}(j\omega)=c=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G\left(j\omega-jm\frac{2\pi}{T}\right) \tag{3.18}$$

式(3.18)右边的式子表示把 $G(j\omega)$ 沿着频率轴搬移到所有 $2\pi/T$ 的整数倍的点上(其幅度变为原来的 $1/T$)。奈奎斯特要求的是 $G(j\omega)$ 和其所有的复制版本，以间隔 $2\pi/T$ 分开，幅度加起来为一个非零常数。对满足该条件的 $G(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)P(j\omega)$ 的说明在例 3.14 中给出。

在例 3.2 的式(3.15)和式(3.16)中，sinc 函数在 $T=\pi/\omega_c$ 的特殊条件下当然满足式(3.18)所给的奈奎斯特条件。比如说，对一个带宽为 ω_c 或更大的理想低通信道 $H(j\omega)$，选择的载波脉冲为式(3.15)所示的 sinc 脉冲，选择的接收机滤波器为在 $|\omega|\leqslant\omega_c$ 时 $F(j\omega)=1$，从而在没有额外的滤波器时，在采样器中也没有码间干扰。然而，对于 sinc 脉冲也有几个问题，第一，信号在时域上向两个方向无限延伸；第二，sinc 函数在时间上有一个非常缓慢的滚降(为 $1/t$)，该时间上的缓慢滚降对应于 sinc 函数在频域过渡时的快速急剧截止。这是时频对偶性的常见范例：在一个域的快速过渡意味着在另一个域的缓慢过渡。

110

找到在时间上比 sinc 脉冲更快停止的脉冲在实践中非常迫切。原因之一是由于时间抖动造成了采样时间上不可避免的误差，这就会造成一些不可避免的 ISI，如果底层的脉冲形状的衰减速度太慢，那么这些 ISI 的传播将会持续一段漫长的时间，让人无法接受。同

时，快速的截止可以允许用一个有限长的信号对一个无限长的双边信号进行更好的近似，通过适当的延时，这个有限长的信号就可以变成因果信号，也就可以满足因果实现的要求。时间上更快的脉冲衰减的代价是频域的过渡会趋于缓慢，因此对于一个给定的符号率或者在一个给定带宽下减小的符号率，就需要更大带宽。

例 3.3 可替代的奈奎斯特脉冲说明

与例 3.2 的情况相比，图 3.8 的两个选择在频率上有更平滑的过渡，并且对应的脉冲在时间上的衰减为 $1/t^2$。很明显，只要对 T 有合适的选择，那么两者都能满足奈奎斯特条件。

特别地，为了满足奈奎斯特条件，就要求

$$\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}m\,\frac{2\pi}{T}\right)=c \tag{3.19}$$

图 3.9 说明了图 3.8 选择的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 所对应的 $\hat{G}(\mathrm{j}\omega)$，可以看到奈奎斯特条件是满足的。

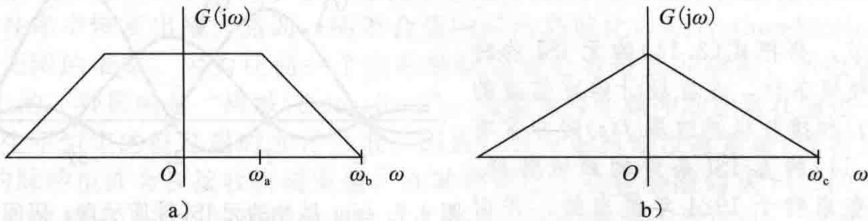


图 3.8 时域上衰减为 $1/t^2$ 且选择恰当的 T 从而满足奈奎斯特无 ISI 条件的脉冲，其傅里叶变换的两种可能选择

111

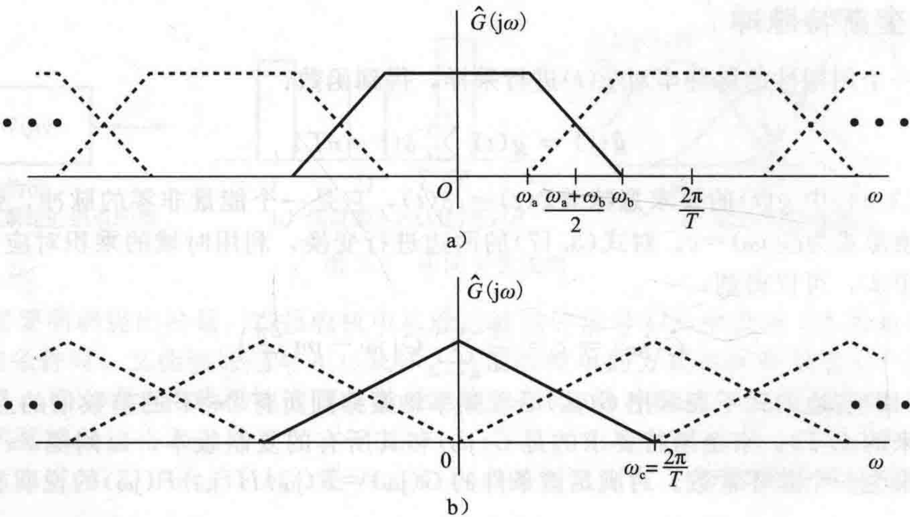


图 3.9 把式(3.19)应用到图 3.8 所示脉冲上

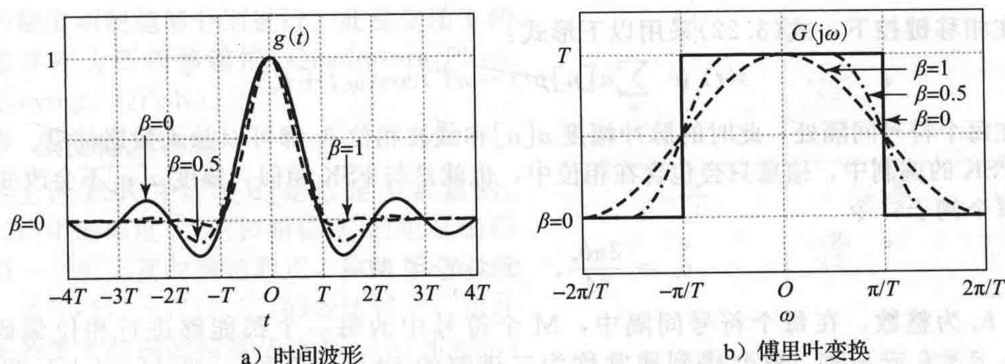
对于图 3.8a 的选择，如果 $\omega_a=\left(\frac{2\pi}{T}-\omega_b\right)$，或者等价的，$\frac{\pi}{T}=\left(\frac{\omega_a+\omega_b}{2}\right)$，则满足奈奎斯特条件。对于在图 3.8b 的选择，如果 $\frac{2\pi}{T}=\omega_c$，则满足奈奎斯特条件。

从与 $g(t)$ 相关的频域特性的系列中选择 $G(\mathrm{j}\omega)$，仍然可以得到平滑的过渡。$g(t)$ 如下所示：

$$g(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}\,\frac{\cos\beta\frac{\pi}{T}t}{1-(2\beta t/T)^2} \tag{3.20}$$

其中，β 称为滚降系数。

$\beta=1$ 的情况在频域里是一个升余弦脉冲，相应的 $g(t)$ 对于较大的 t 值衰减为 $1/t^3$，如图 3.10a 所示。



a）时间波形　　b）傅里叶变换

图 3.10 式(3.20)中脉冲族的时间和频率参数

112

一旦 $G(j\omega)$ 被确定，如果固定 $F(j\omega)=1$，那么根据信道参数 $H(j\omega)$，就能确定相应的脉冲变换 $P(j\omega)$。在影响接收信号 $r(t)$ 的信道噪声存在的情况下，通常来说更好的做法是在发射机处只做部分的脉冲整形，剩下的部分则在采样之前于接收机处完成。比如说，如果在通带中信道没有失真(比如通带中 $H(j\omega)=1$)，并且通带中的噪声强度是均匀的，那么脉冲的最优选择为 $P(j\omega)=\sqrt{G(j\omega)}$，而且这也是接收机滤波器 $F(j\omega)$ 的最佳选择，这里的 $G(j\omega)$ 是纯实的且非负的。在第 13 章讨论匹配滤波器时，会更加详细地说明该问题。◀

3.3 通带脉冲幅度调制

之前的讨论主要集中在基带脉冲的设计上。对于电话线、无线链路、卫星、电缆或者大多数其他的物理信道上的传输来说，基带信号需要被调制到一个更高频率的载波上，也就是转换为通带信号。这也为增强型 PAM 提供了机会。近年来，基于脉冲幅度调制的原理，数字调制解调器的标准、速度和稳定性有大量的改进。这些变动和改进包括频移键控(FSK)、相移键控(PSK)、正交幅度调制(QAM)，其中每一个都将在下面进行更详细的描述。由此带来的符号率和比特率的增加，反映了近年来信号处理的改进，体现出更好的调制方法，更好条件的信道利用以及更复杂的编码方式和相应更复杂的解码方法。

对于基带脉冲幅度调制，发送信号采用式(3.2)的形式，也就是

$$x(t)=\sum_n a[n]p(t-nT) \tag{3.21}$$

其中，$p(t)$是一个低通脉冲。当这是一个正弦载波上的幅度调制信号时，发送信号有如下形式：

$$s(t)=\sum_n a[n]p(t-nT)\cos(\omega_c t+\theta_c) \tag{3.22}$$

其中，ω_c 和 θ_c 是载波频率和载波相位。

在式(3.22)最简单的形式中，特别是当 ω_c 和 θ_c 固定时，式(3.22)对应于用幅度调制把基带频率内容转移并集中在正弦调制频率 ω_c 的频带上。然而，由于引入了 ω_c 和 θ_c 这两个附加参数，$s(t)$中就会有额外的可能性来嵌入数据。特别地，除了在每个符号间隔处改变幅度之外，还可以考虑在每个符号间隔处改变调制频率和(或)相位。这样的选择就产生了频移键控和相移键控。

113

3.3.1 频移键控

在频移键控下，式(3.22)采用以下形式：

$$s(t)=\sum_n a[n]p(t-nT)\cos((\omega_0+\Delta_n)t+\theta_c) \tag{3.23}$$

其中，ω_0 为额定载波频率，Δ_n 为符号间隔 n 的载波频率偏移量。虽然通常情况下，FSK 中幅度 $a[n]$不会改变，但是原则上 $a[n]$与 Δ_n 都能加入数据信息。

3.3.2 相移键控

在相移键控下，式(3.22)采用以下形式：

$$s(t) = \sum_n a[n]p(t-nT)\cos(\omega_c t + \theta_n) \tag{3.24}$$

在每个符号间隔处，此时的脉冲幅度 $a[n]$和载波相位 θ_n 都可以并入数据信息。在通常称为 PSK 的调制中，信息只会包含在相位中，也就是与 FSK 相似，幅度 $a[n]$不会改变。

举个例子，令

$$\theta_n = \frac{2\pi b_n}{M}, \quad 0 \leqslant b_n \leqslant M-1 \tag{3.25}$$

其中，b_n 为整数，在每个符号间隔中，M 个符号中的每一个都能够进行相位编码。在 $M=2$，$\theta_n=0$ 或 π 时，就会得到通常称为二进制的 PSK(BPSK)。当 $M=4$，θ_n 则取 0、$\frac{\pi}{2}$、π 或$\frac{3\pi}{2}$中的一个。

为了有所差异地说明 PSK，并将之作为后续讨论的前奏，以便能扩展讨论并做进一步的概括(正交幅度调制)，用一个替代式来表示式(3.24)会比较方便。利用恒等式

$$\cos(\omega_c t + \theta_n) = \cos(\theta_n)\cos(\omega_c t) - \sin(\theta_n)\sin(\omega_c t) \tag{3.26}$$

可以得到

$$s(t) = I(t)\cos(\omega_c t) - Q(t)\sin(\omega_c t) \tag{3.27}$$

其中

$$I(t) = \sum_n a_i[n]p(t-nT) \tag{3.28}$$

$$Q(t) = \sum_n a_q[n]p(t-nT) \tag{3.29}$$

并且

$$a_i[n] = a[n]\cos(\theta_n) \tag{3.30}$$

$$a_q[n] = a[n]\sin(\theta_n) \tag{3.31}$$

114

式(3.27)是式(3.24)的正交形式，其中 $I(t)$和 $Q(t)$为同相分量和正交分量。对于 BPSK，$a_i[n]=\pm a$ 并且 $a_q[n]=0$。

对 θ_n 为式(3.25)的形式且 $M=4$ 的 PSK，θ_n 取 0，$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$中任何一个值。在式(3.30)和式(3.31)的符号中，$a_i[n]$为$+a$、$-a$、0 中的某个值，同时 $a_q[n]$也为$+a$、$-a$、0 中的某个值。然而，很明显 $M=4$ 这个选择仅仅能够对 4 个符号编码，而不是 9 个，也就是 $a_i[n]$和 $a_q[n]$取值的各种可能性是不独立的。特别地，在 $M=4$ 时，如果 $a_i[n]=+a$，意味着 $\theta_n=0$，那么 $a_q[n]$一定为零。查看这些信息的一个简便方法是通过 I-Q 星座图，如图 3.11 所示。星座图中每个点代表了不同的可被编码的符号。在图 3.11 所示的星座图中，4 个符号中的一个能够在每个符号间隔中进行编码。

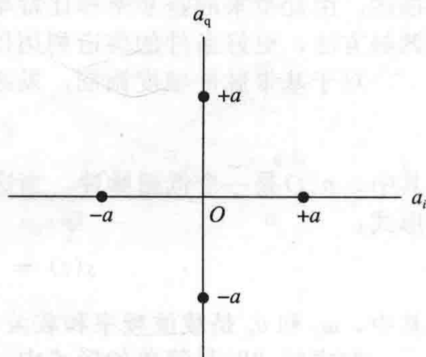


图 3.11　$\theta_n=0$、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$时的 I-Q 星座图

四相位 PSK 的另外一种形式为

$$\theta_n = \frac{2\pi b_n}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant b_n \leqslant 3 \tag{3.32}$$

在这种情况下 $a_i[n]=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$，$a_q[n]=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$，得到了如图 3.12 所示的星座图。在此情况下，式(3.28)和式(3.29)所定义的 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 的幅度调制能够分别进行。此星座图下的调制通常称为**四相移键控**(Quadrature Phase Shift Keying，QPSK)。

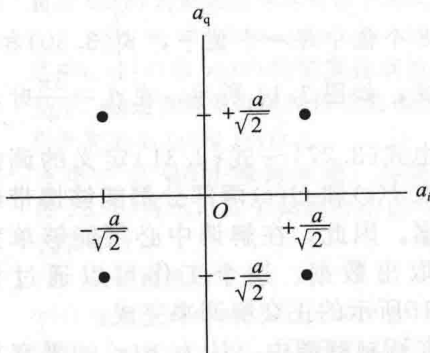


图 3.12　QPSK 的 I-Q 星座图

115

3.3.3　正交幅度调制

在上述 PSK 中，$a[n]$是假定为常量的。式(3.24)中的幅度 $a[n]$和相位 θ_n 的组合编码形成了一个更丰富的调制形式，称为**正交幅度调制**，式(3.27)～式(3.31)的表达式中，允许从一系列更大范围的幅度中选择$a_i[n]$和$a_q[n]$的值。

例 3.4　一个 16 点的 QAM 星座图

图 3.13 所示的 QAM 星座图对应每组幅度能够取值为 $\pm a$ 和 $\pm 3a$ 的情况。此情况下有 16 种不同组合，可以用来编码 4 位信息，如图 3.13 所示。在这种形式下，一种目前语音信道调制解调器标准中，载波频率为 1800Hz，符号频率或波特率$(1/T)$为 2400Hz。由于每符号 4 位，那么就是 9600bits/s。一个可能被采用的基带脉冲形式 $p(t)$ 是式(3.20)中的余弦传输脉冲的平方根，此时$\beta=0.3$。这些脉冲包含的频率高达 $1.3\times1200=1560$Hz。在 1800Hz 载波的调制之后，信号占据了 240Hz～3360Hz 的带宽，这就是语音电话信道的通带。◀

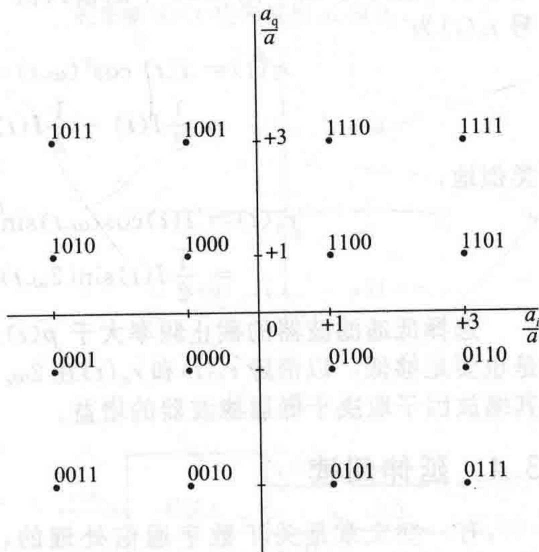


图 3.13　一个 16 点的 QAM 星座图

116

更快的调制解调器需要更精细的基于 QAM 的方法。有一种语音信道标准包括了 128QAM，理论上每个符号可以传输 7 位，但却以更高的噪声敏感度为代价，这是因为对于给定的信号功率的情况下，星座图的点更紧密地聚集在一起。然而，QAM 与称为网格调制编码(Trellis-Coded Modulation，TCM)的组合，通过在连续比特的调制幅度之间引入相关性，从而造成了一定的冗余性，以获得更大的噪声免疫性和每个符号 6bits 的有效率。符号率此时仍为 2400Hz，所以传输速率为 $6*1200=14400$bits/s。然而另一种标准引入了 1024QAM，尽管带有更强的噪声敏感度，但是它每个符号能够传输 10 位。与 TCM 的组合由于差错控制引入冗余，最后形成的比特率在 3200Hz 的符号率下为 28800bits/s，对应于每个符号有 9 个有效位，从而更好地利用了信道带宽。

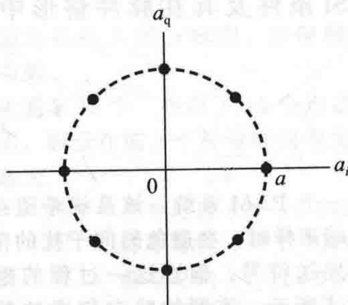


图 3.14　一个 8 点 QAM 星座图

例 3.5　8 点 QAM 星座图

在这个例子中，考虑如图 3.14 所示的 8 点 QAM 星座图，这 8 个点位于半径为 a 的圆

上。在式(3.24)的表达式中，θ_n 为以下8个值中的一个：

$$0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{6\pi}{4},\frac{7\pi}{4} \tag{3.33}$$

在这8个值中每一个值下，式(3.30)和式(3.31)中的 a_i 和 a_q 都具有：$a_i^2[n]+a_q^2[n]=a^2$。比如说，如图3.14所示，在 $\theta_n=\frac{3\pi}{4}$ 时，有 $a_i[n]=-\frac{a}{\sqrt{2}}$，$a_q[n]=+\frac{a}{\sqrt{2}}$。◀

由式(3.27)～式(3.31)定义的调制信号在 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 两部分都能够携带编码数据。因此，在解调中必须能够单独地提取出数据。这个工作可以通过如图3.15所示的正交解调来完成。

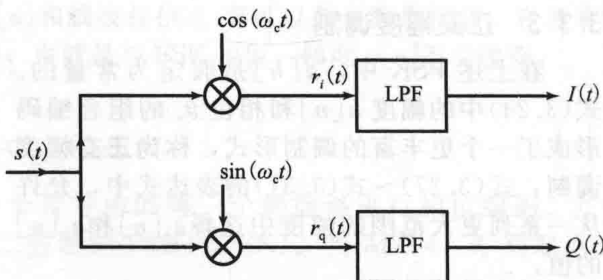


图3.15 正交调制PAM信号的解调方案

117 在调制解调中，认为 $p(t)$ 的带宽与载波频率 ω_c 相比要低，从而使 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 的带宽小于 ω_c。图3.15中的输入信号 $r_i(t)$ 为

$$r_i(t)=I(t)\cos^2(\omega_c t)-Q(t)\sin(\omega_c t)\cos(\omega_c t) \tag{3.34}$$

$$=\frac{1}{2}I(t)-\frac{1}{2}I(t)\cos(2\omega_c t)-\frac{1}{2}Q(t)\sin(2\omega_c t) \tag{3.35}$$

类似地，

$$r_q(t)=I(t)\cos(\omega_c t)\sin(\omega_c t)-Q(t)\sin^2(\omega_c t) \tag{3.36}$$

$$=\frac{1}{2}I(t)\sin(2\omega_c t)+\frac{1}{2}Q(t)-\frac{1}{2}Q(t)\cos(2\omega_c t) \tag{3.37}$$

选择低通滤波器的截止频率大于 $p(t)$ 的带宽，因此也就大于 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 的带宽，但是也要足够低，以消除 $r_i(t)$ 和 $r_q(t)$ 在 $2\omega_c$ 附近的分量，其输出就是正交信号 $I(t)$ 和 $Q(t)$，其缩放因子取决于低通滤波器的增益。

3.4 延伸阅读

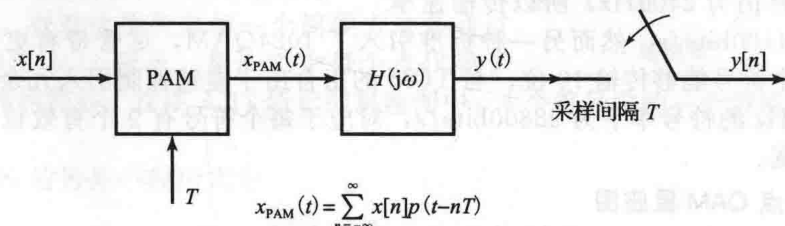
有一些文章是关于数字通信处理的，比如说[An1][An2][Bar][Gib][Ha2][La2][Pr2]和[Zie]，包括了脉冲幅度调制的处理和正交幅度调制的扩展。它们也讨论了奈奎斯特无ISI条件及其在脉冲整形中的作用，并且会在第13章信号检测的情况下再次出现。118

习题

基础习题

3.1 考虑一个PAM系统，该系统希望在信道的输出端采样时，在避免码间干扰的情况下较快地发送符号。描述这一过程的框图如图P3.1-1所示，该题的特定信道的频率响应 $H(j\omega)$ 如图P3.1-2所示。如果脉冲波形为

$$p(t)=\frac{\sin(2\pi\times 10^3 t)}{\pi t}$$



$$x_{\text{PAM}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]p(t-nT)$$

图 P3.1-1

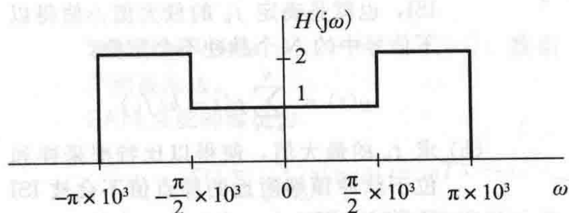


图 P3.1-2

那么在无 ISI 情况下，也就是存在一个常数 c 使得 $y[n]=cx[n]$ 成立时，最快的符号率 $1/T$ 的值为多少？同时求出 c 的值。

3.2 一个 PAM 发射器发送信号

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

以传输一个信息序列 $a[n]$。在接收机端，通过在 T 的整数倍时对 $s(t)$ 采样得到序列 $b[n]$。也就是说接收机的输出序列为 $b[n]=s(nT)$。

以下给出了 $P(\mathrm{j}\omega)$ 的两个可能的选择，$P(\mathrm{j}\omega)$ 为脉冲波形 $p(t)$ 的傅里叶变换。对于每一个选择，说明是否存在一个值 T，使得系统不存在 ISI，也就是，说明是否存在值 T，使得对所有的 $a[n]$ 和 n，有 $b[n]=ca[n]$，其中 c 为一个常数。如果你对某个特定的 $P(\mathrm{j}\omega)$ 的回答是肯定的，请指定在无 ISI 条件下 T 的所有可能值。对每个回答给出简要理由。

(a) $P_1(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2\sin(\omega)}{\omega}$

(b) $P_2(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}, & |\omega|\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3.3 考虑如图 P3.3 所示的系统，以每 T 秒发一个值的速率发送数据。

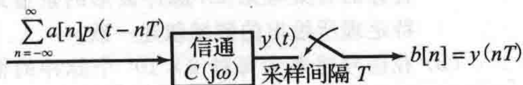


图 P3.3

这里关注的是对脉冲波形 $p(t)$ 的设计，使得对任意的数据序列 $a[n]$ 都无 ISI，也就是说，使得 $b[n]=a[n]$。信道是一个理想的低通滤波器：

$$C(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant B\\ 0, & |\omega|>B\end{cases}$$

(a) 构造一个合理但简洁的论证，以证明在 $B=\dfrac{\pi}{2T}$ 时，找到一个脉冲 $p(t)$，满足无 ISI 要求是不可能的。

(b) 当 $B=\dfrac{\pi}{T}$ 时，指定一个脉冲波形 $p(t)$ 满足无 ISI 要求。你找到的 $p(t)$ 是唯一的还是存在其他的脉冲波形也满足信道的无 ISI 条件呢？解释你的答案。

3.4 通过 QAM 发射的信号具有以下形式：

$$x(t)=x_{\mathrm{C}}(t)\cos\omega_0 t+x_{\mathrm{S}}(t)\sin\omega_0 t$$

其中，$x_{\mathrm{C}}(t)$ 和 $x_{\mathrm{S}}(t)$ 的带宽比载波频率 ω_0 要小。描述你将要以何种信号处理方式来分别恢复出 $x_{\mathrm{C}}(t)$ 和 $x_{\mathrm{S}}(t)$。

3.5 考虑一个 QAM 通信系统，其星座图如图 P3.5-1所示，其中如图所示的每个符号代表 2 位。

假设接收信号为

$$r(t)=a_i\cdot p(t)\cos(\omega_0 t)+a_{\mathrm{q}}\cdot p(t)\sin(\omega_0 t)$$

其中，$\omega_0=2\pi\cdot 10^6$。已知 $p(t)$ 带宽限制在 $(2\pi\cdot 50)$Hz 并且 $p(0)=1$，其他关于 $p(t)$ 的信息都未知。想要通过利用如图 P3.5-2 所示的系统从 $r(t)$ 中恢复出 a_i 和 a_{q}。

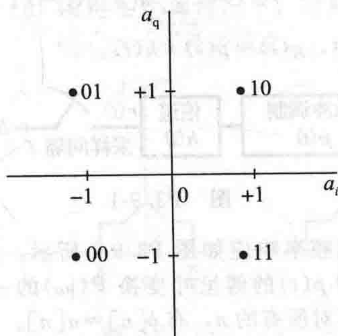


图 P3.5-1

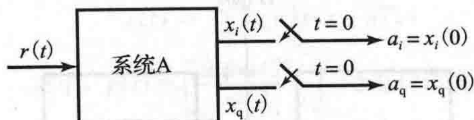


图 P3.5-2

画出系统 A 的方框图，并解释清楚它为何有效。

3.6 在图 3.13 中，画出了 16 个点的 QAM 星座图。假设在前 3 个符号时间中发送的二进制数为

符号时间 $n=0$：1100
符号时间 $n=1$：0011
符号时间 $n=2$：0110

(a) 求出 $s(t)$ 在正交形式 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 表达式中的序列 $a_i[n]$ 和 $a_{\mathrm{q}}[n]$ $(n=0,1,2)$。

(b) 求出 $s(t)$ 在 PSK 表达式中的 $a[n]$ 和 θ_n $(n=0,1,2)$。

3.7 假设一个 PAM 信号 $x(t)$ 为

$$x(t)=\sum_n a[n]p(t-nT_0)$$

其中，$p(t)$ 为 sinc 脉冲

$$p(t)=\frac{\sin(\pi t/T_1)}{\pi t/T_1}$$

信号 $x(t)$ 通过一个具有理想低通频率响应的信道发送。该理想低通频率响应为当 $|\omega|<\omega_c$ 时，$H(j\omega)=1$，其他情况下 $H(j\omega)=0$。在信道的输出端，符号的重复间隔 T_0 选择为无 ISI 情况下的最小值。在以下两种情况中，根据 T_1 和 ω_c 确定 T_0。

(i) 当 $\omega_c>(\pi/T_1)$ 时。

(ii) 当 $\omega_c<(\pi/T_1)$ 时。

3.8 一个信号 $p(t)$ 的变换形式 $P(j\omega)$ 为

$$P(j\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{2\omega_m}, & |\omega|<\omega_m\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对于所有不为零的整数 n，保证 $p(nT)=0$ 的 T 的最小值是多少？$p(0)$ 是什么？

3.9 考虑如图 P3.9-1 所示的 PAM 系统

$$r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a[k]g(t-kT)$$

其中，$g(t)=p(t)*h(t)$。

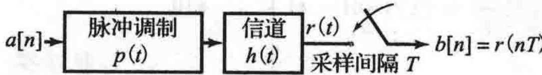


图 P3.9-1

信道频率响应如图 P3.9-2 所示。给出传输脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换 $P(j\omega)$ 的一个选择，使得对所有的 n，有 $b[n]=a[n]$。清楚地说明你的理由。

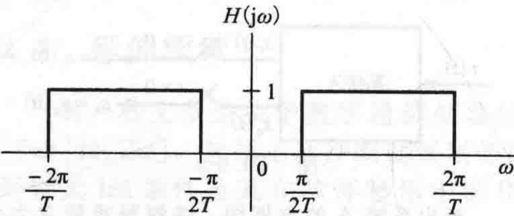


图 P3.9-2

3.10 考虑一个二进制 PAM 通信系统，其中双极性信号通过以下脉冲被使用：

$$p(t)=\begin{cases}1-|t|/T, & |t|<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

并且以每秒 f_b 个脉冲的速率发送。

(a) 确定 f_b 的最大值，使得传输波形中无 ISI，也就是确定 f_b 的最大值，使得以下信号中的 N 个脉冲不会重叠：

$$y(t)=\sum_{k=1}^{N}p(t-k/f_b)$$

(b) 求 f_b 的最大值，使得以比特率采样和位于脉冲顶端附近的样点值不会被 ISI 所影响，即

$$y(n/f_b)=\sum_{k=1}^{N}p((n-k)/f_b)=p(0)\text{ 吗？}$$

高级习题

3.11 考虑两个用到 PAM 通信系统中传输二进制数据的候选脉冲。图 P3.11 所示为第一个脉冲 $p_1(t)$ 在时间上的波形图，第二个脉冲的频谱为

$$P_2(j\omega)=\frac{2\sin(5\times10^{-5}\omega)}{\omega}$$

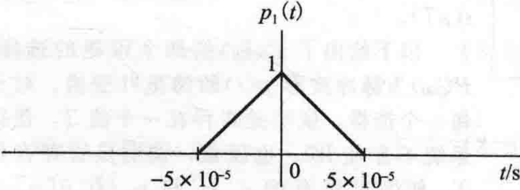


图 P3.11

假定使用了双极性信号，也就是，传输脉冲 $p_i(t)$ 代表 1，传输脉冲的负值 $-p_i(t)$ 代表 0。同时还假定信道带宽足够宽，从而不会改变这两个候选脉冲波形中的任意一个。

(a) 脉冲以每秒 10^4 Baud 的速率发送，称为信号速率、符号率或者波特率。对每个脉冲，确定接收机处是否会存在 ISI。你可以通过时域思考并回答，并试着检查你的答案与无 ISI 脉冲波形的奈奎斯特定理所给出的频域叙述一致。

(b) 在信号速率为每秒 2×10^4 个脉冲的情况下重做(a)。

(c) 假定一个信号速率为每秒 2×10^4 个脉冲，对这两种脉冲中的每一个，在发送的符号序列为“11010”时，给出信道接收末端的带标识信号图。

3.12 一个 PAM 通信系统如图 P3.12-1 所示。

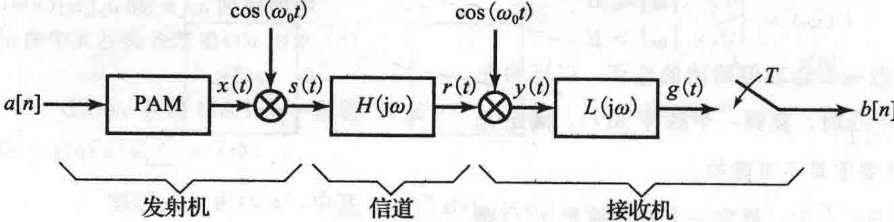


图 P3.12-1

在该图中：

发射机输入为$\{a[n],\ -\infty<n<\infty\}$，数据序列被发送。

PAM系统的输出为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

其中，$p(t)$为一个脉冲波形，其傅里叶变换$P(j\omega)$如图P3.12-1所示。

发射机输出为$s(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$，其中$\omega_0\gg 2\pi/T$。

信道为带通滤波器$H(j\omega)$，如图P3.12-2所示，其中，输出为$r(t)=s(t)*h(t)$。

接收机采用低通滤波器$L(j\omega)$，如图P3.12-2所示，$y(t)=r(t)\cos(\omega_0 t)$以获得基带波形$g(t)$；

接收机输出为序列$\{b[n],\ -\infty<n<\infty\}$，其中$b[n]=g(nT)$。

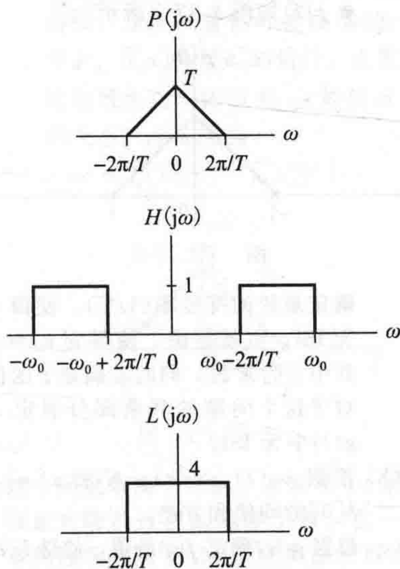


图 P3.12-2

(a) 仅仅对这一部分，假定$a[n]=\delta[n]$，也就是$a_0=1$，在$n\neq 0$时$a[n]=0$。画出$r(t)$的傅里叶变换$R(j\omega)$的图，并标明数值。

(b) 接收机的输出会有ISI吗？详细证明你的结论。

3.13 图P3.13-1为一个PAM系统

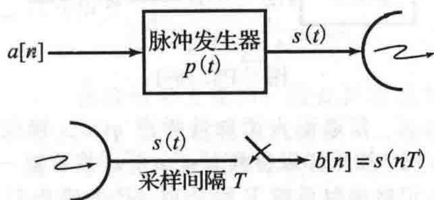


图 P3.13-1

(a) 如果$p(t)=\delta(t)$，用$A(e^{j\Omega})$表示$S(j\omega)$。

对于这个问题的其余部分，假定：

$$p(t)=\frac{\sin(\pi\cdot 10^4 t)}{\pi\cdot 10^4 t}$$

$$P(j\omega)=\begin{cases}10^{-4}, & |\omega|<\pi\cdot 10^4\\ 0, & |\omega|>\pi\cdot 10^4\end{cases}$$

同样假定信道没有引入失真或者噪声，编码序列$b[n]$通过在T的整数倍时对接收信号$s(t)$采样得到。

(b) 假定$T=10^{-4}$并且$a[n]$为一个任意的输入序列，确定对所有的n，$b[n]=a[n]$是否成立。

(c) 现在假定$A(e^{j\Omega})$如图P3.13-2所示，并且$T=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$。

(i) 画出$S(j\omega)$。

(ii) 确定在这种情况下，对所有的n，$b[n]=a[n]$是否成立。

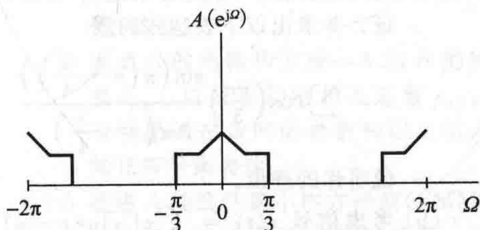


图 P3.13-2

3.14 假定PAM信号

$$x(t)=\sum_n a[n]p(t-nT_0)$$

其中，$p(t)=\left[\frac{\sin(\pi t/T_1)}{\pi t/T_1}\right]^2$通过信道发送，信道为理想低通，其频率响应为$|\omega|<\omega_c$时$H(j\omega)=1$，其他情况下$H(j\omega)=0$。令符号重复间隔$T_0$为接收端无ISI情况下的最小值。

(a) 在T_1和ω_c为以下两种情况时确定T_0的值：

(i) 当$\omega_c>(2\pi/T_1)$时。

(ii) 当$\omega_c<(2\pi/T_1)$时。

(b) 对(a)中的两种情况，如果信道输入为$x(t)=p(t)$，对应于输入DT序列为$a[n]=\delta[n]$，确定在时间$t=0$时信道的输出。

(c) 若实际信道频率响应为$e^{-j\omega D}H(j\omega)$，其中D为一个固定的正常数，$H(j\omega)$如之前所定义的，那么你对(a)问的回答会如何改变？并且需要在哪些时刻对信道输出进行采样，以得到与(b)问相同的值？

3.15 假定$p(t)$为一个三角脉冲，其形式为

$$p(t)=1-\frac{|t|}{T},\quad |t|<T$$

并且$|t|\geqslant T$时，$p(t)=0$。注意到$p(0)=1$并且$n\neq 0$时，$p(nT)=0$。$p(t)$的傅里叶变换形式为

$$P(\mathrm{j}\omega)=T\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

利用这些条件，或以其他的方式，计算以下无限项和(也就是作为ω的函数求出其值)：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}-k\pi\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}-k\pi\right)^2}$$

扩展习题

3.16 (a) $\dfrac{\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)}$的 DTFT 是多少？

通过验证所得结果的逆变换是以上的时间函数，对该结果进行明确的论证。并求出以下表达式的值

$$\sum_n\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\frac{\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)}$$

说明你的理由。

(b) 考虑信号$x(t)=\sum_n v[n]w(t-nT)$，其中$v[n]$为任意的 DT 序列，$w(t)$为连续时间序列，其傅里叶变换如图 P3.16 所示。当$t\to\infty$时，$w(t)$的幅度以t^{-k}衰减，k为整数。确定k的值，并说明你的理由。并且指定T为何值时，将满足$x(nT)=Cv[n]$，C为常数。说明你的理由。

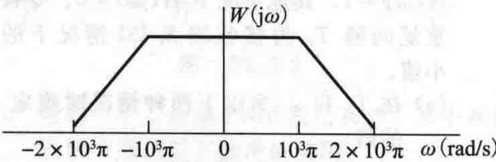


图　P3.16

3.17 注：这个问题需要对第 10 章随机过程有一定的基本了解。在图 P3.17-1 中，给出了一个 PAM 系统，其中发送序列$a[n]$在幅度上是连续的。

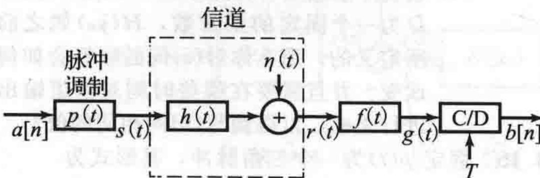


图　P3.17-1

该信道用一个线性时不变系统模型描述，其脉冲响应为$h(t)$，加性输出噪声为$\eta(t)$。接收信号$r(t)$通过 LTI 滤波器$f(t)$，然后被采样以得到$b[n]$。相关的联系为：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

$p_c(t)$被定义为$p(t)*h(t)$。

$$r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p_c(t-nT)+\eta(t)$$

$$g(t)=f(t)*r(t)$$

$$b[n]=g(nT)$$

$\eta(t)$为一个零均值广义平稳(WSS)随机过程，其自相关函数$R_{\eta\eta}(\tau)=N\delta(\tau)$。

(a) 仅仅对于这一部分，

- $\eta(t)=0$(也就是$N=0$)；
- $H(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}$
- $f(t)=\delta(t)$
- $p(t)$如图 3.17-2 所示

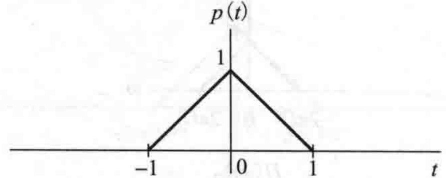


图　P3.17-2

确定最快的符号率$(1/T)$，使得$g(t)$中无 ISI，也就是说，使得$b[n]=ca[n]$，其中c为常数。同时，确定c的值。

对于这个问题的其余部分假定$r(t)$或$g(t)$中无 ISI。

(b) 根据$p_c(t)$、$f(t)$、N和$a[n]$，确定$b[0]$的均值和方差。

(c) 根据$p_c(t)$确定$f(t)$的值，使得$E\{b[0]\}=a[0]$，并使$b[0]$的方差最小。

3.18 注：这个问题需要对第 10 章随机过程有一定的基本了解。图 P3.18-1 给出了一个 PAM 系统，其中发送序列$a[n]$为零均值广义平稳高斯随机序列，其自相关函数为

$$R_{aa}[m]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$$

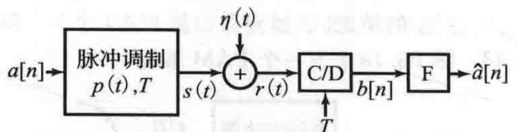


图　P3.18-1

信道引入了加性噪声$\eta(t)$。接收信号$r(t)$被采样以得到$b[n]$。$b[n]$接着被一个无记忆仿射系统 F 所处理，F 的输出$\hat{a}[n]$为$a[n]$的估计值。相关的联系为：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

$$r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)+\eta(t)$$

$$b[n]=r(nT)$$

$\eta(t)$为零均值 WSS 噪声，其自相关函数为 $R_{\eta\eta}(\tau)=Ne^{-|\tau|}$，并取决于 $a[n]$。

$$\hat{a}[n]=k_0+k_1b[n]$$

(a) 如果 $p(t)$如图 P3.18-2 所示，确定 $r(t)$中是否会存在 ISI。

(b) 本小题中，若已选定 $p(t)$使得 $r(t)$中无 ISI，且 $p(0)=1$。系统 F 的输出 $\hat{a}[n]$的形式为$\hat{a}[n]=k_0+k_1b[n]$。确定 k_0 和 k_1 的值以最小化均方误差 ε：

$$\varepsilon=E[(a[n]-\hat{a}[n])^2]$$

(c) 本小题中，若已选定 $p(t)$使得 $r(t)$中无 ISI，且 $p(0)=1$。你知道发送端的$a[n]$的值，并且试着估计接收端的 $b[n]$为多少。$\hat{b}[n]$为 $b[n]$的估计，在发送端确定能最小化均方误差 ε_T 的估计值$\hat{b}[n]$的大小。ε_T 定义为

$$\varepsilon_T=E[(b[n]-\hat{b}[n])^2]$$

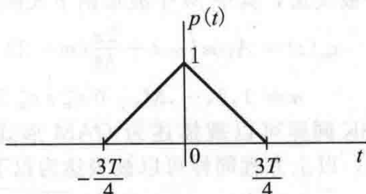


图　P3.18-2

3.19　这个问题取决于对第 7 章和第 10 章的随机变量和随机过程的基本了解。在一个与本章的连续时间 PAM 系统类似的特定的 DT 通信系统中，接收机端的基本问题涉及接收信号 $r(t)$，其形式为

$$r[n]=Ap[n]+v[n]$$

其中，A 为由发射机决定的一个随机变量；接收机仅仅知道 A 的均值 μ_A 和方差 σ_A^2。假定 A 与广义平稳白噪声过程 $v[\cdot]$无关，$v[\cdot]$代表了通信信道中的噪声，其强度为 δ_v^2，也就是说，对所有的 Ω，功率谱强度 $S_{vv}(e^{j\Omega})=\delta_v^2$。同样考虑 $p[\cdot]$为有限能量的已知信号

$$\varepsilon=\sum_n p^2[n]$$

接收信号无噪声，因此具有已知的波形 $p[n]$，但是还有随机幅度 A。接收机通过一个稳定的单位样本响应为 $f[n]$的 LTI 滤波器对接收信号 $r[n]$进行滤波，在其输出端产生信号 $b[n]=f[n]*r[n]$，其中 * 表示卷积。尤其关心通过在 0 时刻对滤波器输出采样得到的随机变量 $B=b[0]$：

$$B=b[0]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f[n]r[-n]$$

$$=A(\sum f[n]p[-n])+(\sum f[n]v[-n])$$

$$=\alpha A+V$$

其中需要引入符号

$$\alpha=\sum f[n]p[-n],\quad V=\sum f[n]v[-n]$$

以简化表达式。注意到 α 为一个确定性的常数，但是 V 为一个随机变量。这在用下式简单地表示 $f[\cdot]$的能量时同样有帮助：

$$\mathcal{F}=\sum_n f^2[n]$$

滤波器的稳定性保证了$\mathcal{F}$是有限的。此问题着眼于利用 B 的测量值来估计 A，并选择滤波器 $f[n]$，使此估计值尽可能精确。

(a) 确定 V 的均值和方差，以及 A 和 V 的互协方差 σ_{AV}。你的所有答案都能用 δ_v 和$\mathcal{F}$表达。

(b) 确定 B 的均值和方差、A 和 B 的协方差 σ_{AB}，以及它们的相关系数 ρ_{AB}。所有结果通过该问的参数和以上引入的简化符号来表达。

(c) 描述 A 的线性最小均方误差(LMMSE)估计值，其利用了 B 的测量值，也就是说在下式中求出 γ 和 μ：

$$\hat{A}=\gamma B+\mu$$

以最小化 $E[(A-\hat{A})^2]$。同样，你的结果应该通过该问的参数和以上引入的简化符号来表达。

(d) 在 (c) 中估计量的最小均方误差(MMSE)可以写作

$$\sigma_A^2(1-\rho_{AB}^2)$$

根据问题参数和以上简化符号表示上式，注意表达式中只有 α 和 F 受如何选择滤波器 $f[n]$的影响。使用你的表达式表明如果 $\alpha^2/\mathcal{F}$尽量大，则 MMSE 可以被最小化。

(e) 柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式如下

$$\frac{\alpha^2}{\mathcal{F}}\leqslant\varepsilon$$

当且仅当下式成立时，不等式等号成立

$$f[n]=cp[-n]$$

对于任何非零常数 c，不失一般性可以假设其为 1。因此，如果在接收端的滤波器脉冲响应与发射端的信号波形相匹配，则 MMSE 可以取得最小值。注意到 $f[n]=p[-n]$，得到 $\alpha=\varepsilon=\mathcal{F}$。利用这个，根据 μ_A、σ_A、σ_v 和 ε，重新写 MMSE 的表达式以及在(c)中 LMMSE

估计量的常量 γ 和 μ。为了检验你的答案，可以通过对参数取不同的极值来明确地验证表达式合理性。选择至少三组极值情况来检验。

3.20 希望使用脉冲形式为 $p(t)$ 的 PAM 通信系统，通过带宽限制在 $|\omega|\leqslant B$ 的理想信道去发送 DT 信号 $a[n]=\pm1$，$n\geqslant0$。整个系统如图 P3.20 所示。在这幅图中，

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

其中，T 为符号间时间（T 将被选择），并且信道的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant B\\0, & |\omega|>B\end{cases}$$

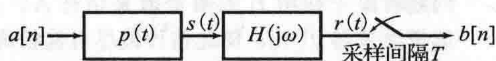


图 P3.20

(a) 如果使用 sinc 脉冲

$$p(t)=\frac{\sin(Bt)}{Bt}$$

在无 ISI 条件下（也就是 $b[n]=a[n]$ 时），码间时间 T 的最小可能值为多少（通过 B 来表达）？

(b) sinc 脉冲在实际中不可取，因为它在时间上有缓慢衰减（脉冲的尾部在幅度上以 $1/|t|$ 衰减）。假设取代(a)问中的 sinc 脉冲，这里使用所谓的双二进制脉冲：

$$p(t)=\frac{\sin(Bt)}{Bt}+\frac{\sin(Bt-\pi)}{Bt-\pi}$$

请确定 $|P(\mathrm{j}\omega)|$。该双二进制脉冲占据了多少的带宽？

(c) 证明，在 $|t|$ 趋于∞时，(b)问中双二进制脉冲 $p(t)$ 的尾部在幅度上以 $1/|t|^2$ 衰减。

(d) 对于(b)问中的双二进制脉冲 $p(t)$，在无 ISI 条件下码间时间 T 的最小可能值为多少（通过 B 来表达）？对应的符号率($1/T$)如何与通过(a)问中 sinc 脉冲获得的符号率进行比较？

(d)的结果证明了如果想要双二进制脉冲无 ISI，必须在符号率上付出代价（虽然在脉冲尾部衰减为 $1/|t|^2$ 这一点上确实获得了好处，并且由此在实现时有了表现更佳的脉冲）。然而，事实证明如果 ISI 仅仅以可预见的方式发生并只影响部分相邻的采样，则 ISI 并不糟糕，因为此时其影响可以相当简单地在接收机内消除。通过允许在这种形式下存在一些有限的 ISI，就可以增加 PAM 系统中的发射符号率，如接下来的两部分所示。

(e) 对于(b)问中的双二进制脉冲，假定发送端符号以(a)问中所定的符号率发送（也就是，利用你在(a)问所定的 T 值）。在该情况下接收序列 $b[n]$ 在 $n\geqslant0$ 时是怎样与 $a[n]$ 相关的？解释如何从接收序列中确定发送序列。

(f) 虽然你在(e)问中得出 $b[n]$ 可以从 $a[n]$ 中简单得到的，并且反之亦然，但从 $n=0$ 开始，就必须清楚的是如果这里有一个错误，那么所有随后的估计值都将被破坏。为了克服这种缺陷所要做的是，发送所需序列 $a[n]$ 的预编码序列，而不是发送序列 $a[n]$。$a[n]$ 的预编码序列为序列 $c[n]$，定义为 $c[n]=a[n]c[n]-1$，其中定义 $c_{-1}=1$。现证明如果 $b[n]=\pm2$，那么能够推出 $a[n]=1$，如果 $b[n]=0$，则可以推出 $a[n]=-1$。对每个 n 时刻接收机的判决就不再与其他时刻的判决相关，所以在解码过程中没有误差传播。

3.21 在 PSK 中，M 个波形中的一个在每个时间块被发送，其中 M 个波形由下式决定

$$s_m(t)=A\cos\left(\omega_0t+\frac{2\pi}{M}(m-1)\right)$$

$$m=1,2,\cdots,M,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

PSK 同样可以被描述为 QAM 形式，也就是，以上方程同样可以被表达为以下形式

$$s_m(t)=a_c\cos\omega_0t+a_s\sin\omega_0$$

(a) 画出 PSK 在 $M=16$ 时的星座图。

(b) 考虑一个有 16 点星座图的 QAM 系统和 $M=16$ 的一个 PSK 系统，QAM 系统中 a_c 和 a_s 每个可以取值为 ±1，±3。幅度 A 被选择，使得在 QAM 脉冲的一个时间间隔上的最大信号能量与在 PSK 脉冲中一样，从而 A 等于 $\sqrt{a_c^2+a_s^2}$ 的最大值。你认为两种系统中的哪一个会有更好的抗噪声干扰性？清楚地解释你的理由。

3.22 序列 $a[n]$ 和 $b[n]$ 通过一个如图 P3.22-1 所示的 PAM 信道被传送。对于如图所示的两个序列，其脉冲 $p(t)$ 是相同的。图 3.22-2 表示了脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换 $P(\mathrm{j}\omega)$。

信号 $x_a(t)$、$x_b(t)$、$s(t)$ 和 $r(t)$ 为

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]p(t-nT)$$

$$x_b(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b[n]p(t-nT)$$

$$s(t)=r(t)=x_a(t)+x_b\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

图 P3.22-3 显示了解调器的框图。

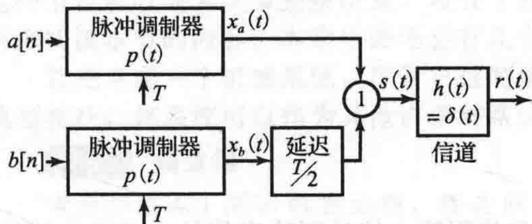


图 P3.22-1

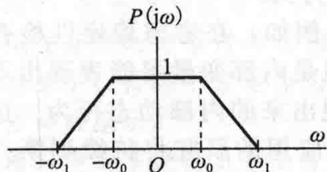


图 P3.22-2

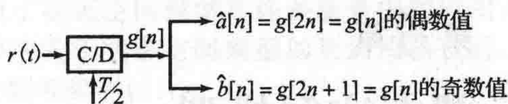


图 P3.22-3

序列 $g[n]$为

$$g[n] = r\left(n\frac{T}{2}\right)$$

(a) 确定 $p(t)$在时域上的一个条件，使得

$$\hat{a}[n] = a[n]$$
$$\hat{b}[n] = b[n]$$

清晰简洁地证明你的答案。

(b) 结合你在(a)中所得结果，确定 ω_0 和 ω_1 的一个条件，再次使得

$$\hat{a}[n] = a[n]$$
$$\hat{b}[n] = b[n]$$

清晰简洁地证明你的答案。

119 ~ 132

第4章 状态空间模型

到目前为止，对于系统描述的讨论更多强调和使用输入信号到输出信号之间转换关系的模型。对于线性时不变模型，主要关注它们的冲激响应、频率响应和传递函数。而这样的输入-输出模型没有直接考虑它们所代表的系统的内部行为。

由于各种原因，对系统内部行为的分析十分重要。例如，在考虑稳定性检查的问题时，一个系统模型从输入-输出的角度来看是稳定的，但是内部变量可能表现出不稳定行为。与输入-输出特性一样，本章开始讨论系统模型表现出来的内部动态行为。这里的讨论是通过大量的例子来进行说明的。对于这些模型及其应用的研究将持续到第 5 章和第 6 章。

4.1 系统记忆性

本章将引入一个重要的模型描述方式——状态空间模型，该模型强调系统的内部行为，特别适合于描述因果系统，尤其是实时应用，比如控制系统。这些模型既适用于连续时间的形式，也适用于离散时间的形式。通常它们可以是非线性和时变的，尽管这里关注的是 LTI 情况。

一个因果系统的状态空间模型反映了该系统在多种场景下的属性。这里对于因果 DT 情况引入以下问题，当然，这个问题也可以用于 CT 因果系统：给定任意时刻 n 的输入值 $x[n]$，为了确定当前时刻的输出值 $y[n]$，需要知道多少个过去的输入值，即需要知道多少个 $x[k]$(其中 $k<n$)的值？由于系统是因果的，除了当前输入值 $x[n]$外，系统还保留以前所有时刻的输入值 $x[k]$，这些值是足够的，问题是实际上是否需要所有这些时刻的输入值 $x[k]$。

上面的提问引出了系统的记忆性，由于多种原因，这也是一个有价值的问题。比如，这个问题的回答将传达出与系统动态行为相关联的复杂性或者自由度数(number of degrees of freedom)的观念。为了确定当前时刻的输出值，知道的过去输入值越多，可能的输出行为也就越丰富，也就会越惊讶于对过去的认知的缺乏。这里只考虑拥有有限自由度数的系统，或者是具有有限维度记忆的系统，这些系统通常称为集总系统(lumped system)。

以上问题是在某个计算机算法实现的应用中提出的，该算法在这里扮演了一个具有因果特性的数据流。将这个算法看作一个系统，问题的答案就表明了需要多少存储空间才能运行该算法。在控制应用中，对于记忆性问题的答案，将对给定系统控制器的复杂度级别提出相应的需求。控制器必须记住足够多的以往信息，以此来决定当前控制行为对系统响应的影响。

在状态空间的描述方式下，与现在与未来相关的所有过去的一切都可以归结到一个有限状态变量集的当前值中。这些值一起确定系统当前的状态。这里只对实数值的状态变量感兴趣。状态变量的个数(也称为状态空间描述的阶数)，表明了与系统或者模型有关的自由度数或者记忆维度。

4.2 举例说明

为了推导状态空间模型的通用形式，本节将详细描述一些 CT 和 DT 的例子。除了说

明建立状态空间模型的过程之外，这些例子也给出了状态空间模型在许多场景中的应用。这一节也可以与 4.3 节交换位置，可在了解 4.3 节中关于状态空间模型的更通用描述后，再来阅读本节的内容。本章后面还会有几个进阶的参考实例。

首先考虑一个机械系统，尽管它很简单，但是它也足够引出一个 CT 状态空间模型的典型特征，该系统可以作为其他许多种系统的原型。 134

例 4.1 倒立摆

考虑如图 4.1 所示的倒立摆，摆是刚性的，质量为 m，能够绕着底端的中心轴旋转，在垂直于中心轴的平面上运动。中心点到质心的距离为 ℓ，摆关于中心点的惯性矩为$\mathcal{I}$，这些参数都假定为常数。

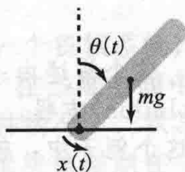


图 4.1 倒立摆

在时刻 t，测得中心点与质心之间的连线跟垂直方向的夹角为$\theta(t)$，该夹角是从垂直方向的顺时针方向测量到的。一个外部力矩作用到围绕中心轴的摆上。将这个力矩作为系统的输入，记作 $x(t)$，当它表现为逆时针方向时取正。

假定感兴趣的系统输出变量为 $y(t)$正好是摆的摆角，所以 $y(t)=\theta(t)$。在一个典型的控制应用中，可以控制 $x(t)$——反馈到控制器的量测响应——以此使 $y(t)$能维持在 0 值附近，从而使倒立摆保持垂直平衡。

外部旋转矩与重力加速度 g 作用于物体上所产生的力矩方向相反，重力引起的是一个顺时针方向的、大小为 $mg\ell\sin(\theta(t))$的力矩。最后，假定一个摩擦力矩，其方向与运动方向相反，大小与角速度成正比，这个力矩可以表示为$-\beta\dot{\theta}(t)$，其中$\dot{\theta}(t)=\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$，$\beta$是一个非负常数。

尽管倒立摆在许多方面都是一个简单的模型，但是它能够捕捉到在不同种类的平衡应用中的一些基本特性，例如，用踝关节支撑人体，在机器人关节处或者轮轴上支撑重物。也存在这样的控制应用，摆在正常悬挂位置而不是在倒立位置摆动，也就是说，$\theta(t)\approx\pi$。还可能存在这样一种替代情况，摆绕着中心点转圈，所有的这些运动都可以用以下方程来描述。

一个常规模型

牛顿定律的旋转形式指出角动量的变化速率等于净转矩，可以写出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{I}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right)=mg\ell\sin(\theta(t))-\beta\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}-x(t) \tag{4.1}$$

由于$\mathcal{I}$为常数，前述的表达式可以重写为更贴近早期微分方程课程中的典型形式：

$$\mathcal{I}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-mg\ell\sin(y(t))=-x(t) \tag{4.2}$$

这是一个输出 $y(t)$关于输入 $x(t)$的二阶非线性微分方程。 135

状态变量

为了得到状态变量的概念，在任意时刻 t_0 检查构成系统记忆的数据。假定参数 I、m、ℓ和β都是已知的，当$t\geqslant t_0$ 时外部输入为 $x(t)$。问题就是，为了解出系统在 $t>t_0$ 时刻的行为，还需要知道系统在 t_0 时刻的哪些情况。

在区间 $t>t_0$ 中解方程(4.1)来得到 $\theta(t)$，需要对方程积分两次，接下来就需要分别知道初始位置 $\theta(t_0)$和初始速度$\dot{\theta}(t_0)$。另一种获得这两个变量的方式可以考虑摆在初始时刻的能量。这个能量是以前的输入对系统产生的结果，并反映了系统接下来的运动情况。在时刻 $t=t_0$ 的势能由 $\theta(t_0)$决定，动能由$\dot{\theta}(t_0)$决定，因此这些变量是了解系统在 $t>t_0$ 时刻行为的关键。

状态空间模型

上面的讨论表明了在任意时刻 t，系统有两个自然的记忆变量：$q_1(t)=\theta(t)$和 $q_2(t)=$

$\dot{\theta}(t)$。把它们作为候选状态变量，对应的状态空间描述就可以通过在时刻 t 的这些变量的变化速率和同样时刻 t 的输入建立起来。对于这个简单的例子，能够相当直接地得到所期望的一对方程。根据 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 的定义，与式(4.1)一样，依然假定 $\mathcal{I}$ 是一个常数，得到：

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=q_2(t) \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathcal{I}}(mg\ell\sin(q_1(t))-\beta q_2(t)-x(t)) \tag{4.4}$$

这个描述由一对耦合的一阶微分方程组成，由输入 $x(t)$ 驱动，这称为状态演化(state evolution)方程。可以根据状态变量的值以及时刻 t 的输入值来完整地表示输出方程 $y(t)$，在这个例子中，输出方程简单表示为

$$y(t)=q_1(t) \tag{4.5}$$

状态演化方程和输出方程的组合构成了系统的一个状态描述。事实就是这样的一个系统描述能够根据候选状态变量 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 来确定这些状态变量——这里“候选”的标签就可以去掉了。

不但从式(4.1)或者等效的式(4.2)的普通微分方程的描述中可以知道建立状态空间模型需要什么，而且反过来也是成立的：微分方程(4.1)或者等价的式(4.2)能够从式(4.3)、式(4.4)和式(4.5)得到。

一些变化形式

上面的状态变量并不是唯一的选择。例如，由 $q_1(t)=\theta(i)+\dot{\theta}(t)$(应该为 $\dot{q}_1(t)$——译者注)和 $q_2(t)=\theta(i)-\dot{\theta}(t)$(应该为 $\dot{q}_2(t)$——译者注)定义的量也能很好地满足状态变量的需求。在这些新的定义下很容易得到，$\dot{q}_1(t)$、$\dot{q}_2(t)$ 和 $y(t)$ 作为 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 和 $x(t)$ 的函数，并且得到了一个不同但是完全等价的状态空间表达式。

以上得到的状态空间描述虽然是非线性的，但却是时不变的。它的非线性是因为状态变量 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 和输入 $x(t)$ 在定义函数 $\dot{q}_1(t)$、$\dot{q}_2(t)$ 和 $y(t)$ 时，其中至少有一个是非线性组合方式。在本例中，$\dot{q}_2(t)$ 的定义式为非线性。这个描述是时不变的，这是因为所有的函数定义 $\dot{q}_1(t)$、$\dot{q}_2(t)$ 和 $y(t)$ 都是时不变的，也就是说，它们把参数 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 和 $x(t)$ 依据一种不依赖于时间的表示形式进行了组合。

136

对于从完全倒立位置的足够小角度的摆动，$q_1(t)=\theta(t)$ 很小，因此 $\sin(q_1(t))\approx q_1(t)$。有了这个近似，式(4.4)可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathcal{I}}(mg\ell q_1(t)-\beta q_2(t)-x(t)) \tag{4.6}$$

函数 $\dot{q}_2(t)$ 的定义式现在是由它的参数 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 和 $x(t)$ 组成的 LTI 等式，因此得到的状态空间模型现在也是 LTI 的。

对于线性模型，采用矩阵符号可以得到状态演化方程和输出方程的简洁表达形式。这里使用加粗的小写字母表示向量，加粗的大写字母表示矩阵。状态向量及其微分形式的定义如下：

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{q}}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\\dot{q}_2(t)\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

线性模型变为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\\dot{q}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\mg\ell/\mathcal{I} & -\beta/\mathcal{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1/\mathcal{I}\end{bmatrix}x(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{4.8}$$

与前面的等式相比较，可以很清楚地知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的定义。对应的输出等式可以写为

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t) \tag{4.9}$$

其中，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 表示一个列向量的转置，即一个行向量。系统的时不变性体现在系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 都是常量而不是时变的。◀

上面例子中的观点可以推广到更详尽的系统设置中去。通常，对于一个机械系统，自然会选择其状态变量是每一个部件的位置和速度所组成的集合。例如，在三维空间中 N 个质点彼此之间互相连接，并通过质量不计的弹簧进行刚性支撑，在这种情况下，状态变量自然就会选择相关的 $3N$ 个位置变量和 $3N$ 个速度变量。如果这些质量块被限制在一个平面上运动，这里则由 $2N$ 个位置变量和 $2N$ 个速度变量来替代。

下一个例子将说明如何描述电路的状态空间模型。

例 4.2　电路

考虑图 4.2 中的电阻-电感-电容(RLC)电路，所有元件的电压和电流都标注在图中。

这里从列出各种元件的特性开始，且假定这些元件为线性时不变的。电感、电容和两个电阻采用如下的定义式，在各种情况下，这都是元件两端的电压和流过元件的电流的线性时不变约束。特别地，有

137

$$\begin{aligned}v_L(t)&=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\ i_C(t)&=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\\ v_{R_1}(t)&=R_1 i_{R_1}(t)\\ v_{R_2}(t)&=R_2 i_{R_2}(t)\end{aligned} \tag{4.10}$$

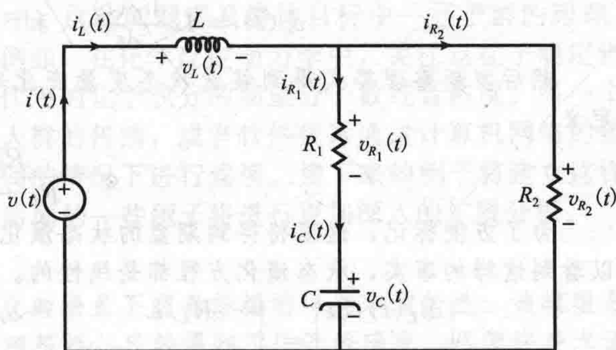


图 4.2　RLC 电路

电压源定义为其电压是一个指定值或者任意值 $v(t)$，而不考虑从它里面流出的电流 $i(t)$。

下一步是描述由于元件互连引起的这些变量之间的约束。电路的互连约束由基尔霍夫电压定律(KVL)和基尔霍夫电流定律(KCL)来确定。KVL 和 KCL 都能够产生与电路相关联的变量的额外 LTI 约束。这里，根据 KVL 和 KCL 所得到的等式如下：

$$\begin{aligned}v(t)&=v_L(t)+v_{R_2}(t)\\ v_{R_2}(t)&=v_{R_1}(t)+v_C(t)\\ i(t)&=i_L(t)\\ i_L(t)&=i_{R_1}(t)+i_{R_2}(t)\\ i_{R_1}(t)&=i_C(t)\end{aligned} \tag{4.11}$$

对于这个电路，可以写出其他类似的 KVL 和 KCL 方程，不过都是由以上等式推出的结果，而并非新的约束。

式(4.10)和式(4.11)共同代表了电路中的独立元件和它们之间的相互连接。能够同时满足所有这些约束的任意一组信号集构成了这个电路的一个有效解，或者称为电路行为。由于所有的约束都是 LTI 的，它所遵循的加权线性组合或者行为叠加都是电路自己的行为，时移后的行为也是电路的行为，因此电路本身是 LTI 的。

138

输入、输出和状态变量

这里把电压源 $v(t)$ 当作这个电路的输入，把它记为标准的输入符号 $x(t)$。电路中任何

的电流和电压都可以作为输出，例如，选择 $v_{R_2}(t)$，并把它记为标准的输出符号 $y(t)$。

与前一个例子一样，确定在任意时刻是什么构成了系统的记忆，就能很好地建立起状态变量。这里要问的是，在除参数 L、C、R_1、R_2 和当 $t\geqslant t_0$ 时的外部输入 $x(t)$ 之外，还需要知道系统在初始时刻 t_0 的哪些情况，才能确定系统在 $t>t_0$ 时的行为？

在电感和电容的定义式(4.10)中微分的存在表明了至少需要 $i_L(t_0)$ 和 $v_C(t_0)$ 或者与它们等效的量。注意，与前一个例子类似，这些变量与系统的能量存储相关，在这个例子中能量分别存储在电感和电容中。由此可以确定在任意时刻 t 系统的两个自然记忆变量为 $q_1(t)=i_L(t)$ 和 $q_2(t)=v_C(t)$，它们是候选状态变量。

状态空间模型

现在推导一个针对图 4.2 中 RLC 电路的状态空间描述，对应的状态空间描述可以通过在时刻 t 这些变量的变化速率和同样时刻 t 的输入建立起来。通过减少式(4.10)和式(4.11)中的方程数，消除其他变量而仅保留输入、输出、候选状态变量和候选状态变量的微分。

对于现在这个例子，处理过程没有例 4.1 中的那么明显，为了有效地实现消除，需要注意一些问题。一种好的策略——并且可以推广到更加复杂的电路中——就是将电感电压 $v_L(t)$ 和电容电流 $i_C(t)$ 仅仅用允许的变量 $i_L(t)$、$v_C(t)$ 和 $x(t)=v(t)$ 来表示。一旦完成了这一步，就可以进行如下置换：

$$v_L(t)=L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\quad 和 \quad i_C(t)=C\,\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

然后重新整理等式得到候选状态变量变化率的期望表达式。紧接着这个步骤，引入定义

$$\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{4.13}$$

为了方便标记，这里将得到期望的状态演化方程。这些方程由如下矩阵形式写出，可以看到这样的事实，状态演化方程都是线性的。

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}i_C(t)/\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha R_1/L & -\alpha/L\\ \alpha/C & -1/(R_1+R_2)C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/L\\ 0\end{bmatrix}x(t) \tag{4.14}$$

上式可以写为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{4.15}$$

其中，

139

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的定义可以对比式(4.14)得到。由这些矩阵是常数的事实可知，这个描述是 LTI 的。这里的关键特点是在任意时刻 t，状态变量的变化率模型可以表示为状态变量和输入在同一时刻 t 的值的常系数线性方程。

在下一章将看到，在给定 $t\geqslant t_0$ 时的输入 $x(t)=v(t)$，以及在给定 t_0 时刻状态变量的初始条件时，式(4.14)中的状态方程可以用于求解 $t>t_0$ 时的状态变量 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$。此外，知道了 $i_L(t)$、$v_C(t)$ 和 $v(t)$ 就足以重建出在 t 时刻电路中的所有其他电压和电流。在已经选定了感兴趣的输出 $v_{R_2}(t)=y(t)$ 后，就可以写出(还是使用矩阵符号)：

$$y(t)=v_{R_2}(t)=[\alpha R_1\quad \alpha]\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t) \tag{4.17}$$

输入-输出行为

使用双边拉普拉斯变换对式(4.10)和式(4.11)进行变换，注意时域的微分映射到变换

域为乘以 s，这样能够从 $x(t)$ 到 $y(t)$ 的过程解出系统的传递函数 $H(s)$。还有另一种方式，通过状态空间描述式(4.14)和式(4.17)的拉普拉斯变换，也能够得到相同的传递函数。下一章将说明根据系数矩阵 $\mathbf{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 构成的传递函数的显式表达式。

在 RLC 例子中，从输入到输出的传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\alpha\left(\frac{R_1}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}{s^2+\alpha\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)s+\alpha\frac{1}{LC}} \tag{4.18}$$

对应的输入-输出二阶 LTI 微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\alpha\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha\left(\frac{1}{LC}\right)y(t)=\alpha\left(\frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha\left(\frac{1}{LC}\right)x(t) \tag{4.19}$$

◀

例 4.2 中获得状态空间描述的步骤甚至能够用于一些电路元件是非线性的情况。这时选择电感通量(flux)而不是电流作为状态变量就会很有用，相似地，也可以选择电容电荷(charge)而不是电压作为状态变量。通常情况下，如例 4.2 所示，电感电流或者通量、电容电压或者电荷是电路中的自然状态变量。在退化电路的情况下将有例外出现，比如一个仅仅由电容和电压源组成的闭合电路。在后一种情况下，应用于这个回路的 KVL 显示出电容电压并不是完全独立的。

状态空间模型自然会出现在许多问题中，这些问题涉及群体目标中一些子群的跟踪，而这些群体目标在时间上存在相互影响。例如，在化学反应动力学中，关注点在于确定当反应过程在时间上连续进行时，各种相互作用的化学成分的期望分子数或者浓度。另一个实例涉及时尚、意见、想法或者疾病通过人群的传播，或者软件病毒通过计算机网络的传播，它既可以在连续时间也可以在离散时间的情况下进行建模。接下来的例子将建立这样的离散时间模型并且开始探索它的行为。后面的一些例子将进行更加深入的扩展分析。 140

例 4.3 病毒传播

这里给出的 DT 模型捕捉了在多种变化的场景下病毒传播的一些本质特性。该模型是这种模型大家庭中的一个，兼具确定性和随机性，已经得到了广泛的研究。尽管许多术语源于对病毒引起的疾病传播的建模过程，但是病毒传播的范例已经应用于对诸如恶意软件、广告、小道消息或者文化模因(cultural memes)在人群或者网络中扩散方式的理解。

这里的确定性模型跟踪从第 n 个 DT 历元(epoch)到第$(n+1)$个 DT 历元的 3 个子群体。假定在整数时刻 n，大小为 P 的总群体分为如下子群体，或者“分区(compartment)”：

- $s[n]\geqslant 0$ 为易受感染的人的数量，当前没有受到病毒感染，但是容易受到攻击而感染病毒；
- $i[n]\geqslant 0$ 为受感染的人的数量，携带病毒并且拥有将病毒在下一历元传染给易受感染的人的能力；
- $r[n]\geqslant 0$ 为恢复的人的数量，因为已经获得免疫力而不再携带病毒并且不再容易受到感染。

下面的模型假定这些变量都是实数值而不是整数值，这将大大简化模型，当 P 非常大的时候，就可能存在一个符合要求的近似。

假定这 3 个子群体的出生率都相同，数值为 β，它是单位时间内因为出生所带来的人口的确定性小数增长。假定死亡率也是 β，因此人口的总规模保持 P 不变，假定 $0\leqslant\beta<1$。

令易受感染的人变为感染的人的比率与受感染的人在总体人口中的百分比成比例，因此一种比率表达形式为 $\gamma(i[n]/p)$，其中 $0<\gamma\leqslant 1$。受感染者移动到恢复分区的比率记为 ρ，其中 $0<\rho\leqslant 1$。尽管人口中有生来就为感染者或者获得免疫力的情况，但这里仍然将新生儿作为易受感染的人。再假定为新生儿提供免疫力的比率为 $0\leqslant v[n]\leqslant 1$，比如通过接

种疫苗，将他们直接从易受感染者分区移动到恢复者分区。考虑 $v[n]$为控制输入，并且将它记为一个替代符号 $x[n]$。

有了以上的符号和假设，就可以直接得到下面非常简单的(并且毋庸置疑是十分简单化的)模型，对于每一个子群在每一个时间历元的变化，有

$$\begin{aligned} s[n+1]-s[n] &= -\gamma(i[n]/P)s[n]+\beta(i[n]+r[n])-\beta Px[n] \\ i[n+1]-i[n] &= \gamma(i[n]/P)s[n]-\rho i[n]-\beta i[n] \\ r[n+1]-r[n] &= \rho i[n]-\beta r[n]+\beta Px[n] \end{aligned} \tag{4.20}$$

因为这种模型由易受感染的(susceptible)人群、受感染的(infective)人群和恢复的(recovered)人群组成，所以这类模型通常都称为 SIR 模型。这里应该假定初始条件、参数和控制输入的选择，以便维持在感兴趣的时间段内所有子群的人口数为非负值。病毒的实际传播机制显然比这里建立的这种基本模型更加错综复杂和难以理解，并且其中还包含大量随机因素和不确定性。

141

如果统计每个时间历元受感染者的部分比率 ϕ，而报告的受感染者集合的人数能够作为这里的输出 $y[n]$，就有

$$y[n]=\phi i[n] \tag{4.21}$$

注意，式(4.20)的形式与前面两个例子中的 CT 状态演化方程非常相似。对于 DT 情况，把时刻 n 变量的变化率当作从 n 时刻前进一个时间步长的增量。那么式(4.20)就表示，在时刻 n 所指定的变量的变化率是这些相同变量和时刻 n 输入的函数。因此将 $s[n]$、$i[n]$和 $r[n]$作为状态变量是有道理的，这些变量在时刻 n 的数值构成了系统在时刻 n 的状态。

此处的模型是时不变的，这是因为定义变化率的 3 个式子都是 n 时刻状态变量和输入的组合，它们是按照预定的关系进行组合的，而不依赖 n。这个特点的推论就是，如果一种任意 $s[\cdot]$、$i[\cdot]$和 $r[\cdot]$信号的集合满足模型方程，那么将这个模型方程在相同时刻进行时间上的任意偏移，这种信号集合也能满足平移后的模型方程。但是要注意的是，这个模型不是线性的，因为前两个式子中包含了 $s[n]$和 $i[n]$的非线性组合，即它们的乘积，所以它是非线性的。式(4.21)写出了 n 时刻的输出是 n 时刻状态变量和输入的函数——尽管在这个例子情况下只需要 $i[n]$。

在 DT 情况下为了表达方便，重新排列状态演化方程，使其能够把 $n+1$ 时刻的状态表示为 n 时刻的状态变量和输入的函数。这样，式(4.20)可以重写为

$$\begin{aligned} s[n+1] &= s[n]-\gamma(i[n]/P)s[n]+\beta(i[n]+r[n])-\beta Px[n] \\ i[n+1] &= i[n]+\gamma(i[n]/P)s[n]-\rho i[n]-\beta i[n] \\ r[n+1] &= r[n]+\rho i[n]-\beta r[n]+\beta Px[n] \end{aligned} \tag{4.22}$$

在这种形式中，方程给出了一个简单的约束，以便从 n 时刻的状态和输入得到 $n+1$ 时刻的状态。将 3 个式子相加也明确地表示在这个例子中

$$s[n+1]+i[n+1]+r[n+1]=s[n]+i[n]+r[n]=P \tag{4.23}$$

因此，在 P 已知的条件下，知道任意两个子群就足够确定第 3 个子群。检查式(4.20)或者式(4.22)中的个体关系，并且注意在每一个等式集合中的第一个式子中的项 $i[n]+r[n]$可以等效地写作 $P-s[n]$，可以看出在前两个式子中实际上除输入之外，仅仅包含易受感染的人群和受感染的人群，因此可以构成一个低阶的状态演化描述，即

$$\begin{aligned} s[n+1] &= s[n]-\gamma(i[n]/P)s[n]+\beta(P-s[n])-\beta Px[n] \\ i[n+1] &= i[n]+\gamma(i[n]/P)s[n]-\rho i[n]-\beta i[n] \end{aligned} \tag{4.24}$$

图 4.3 显示了一些状态变量的变化轨迹，测试人口总数 P 为 10000，$s[0]$固定为 8000，使用不同的初始条件值 $i[0]$，通过从初始状态的向前步进，根据式(4.24)中的模型来得到这些轨迹。注意受感染者的数量 $i[n]$，在每种情况下，在最后衰减之前，都是从起始时刻$n=0$的数值开始增长。这种初始增长相当于谣言、广告或者时尚通过社交网络“如病毒般迅速传播”，或者相当于传染病情况下的疾病传播。式(4.24)中的第二个方程显示

142

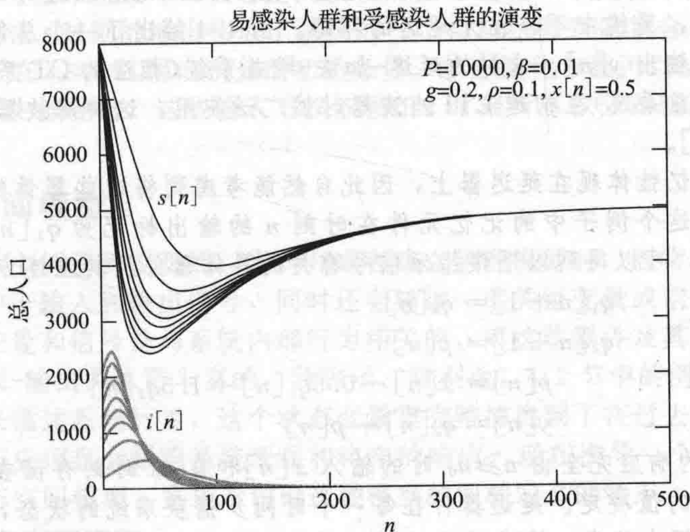


图 4.3 一组选定的参数和多种初始条件下 SIR 模型的响应

$i[n+1]>i[n]$，正好是

$$\frac{s[n]}{P}>\frac{\rho+\beta}{\gamma}=\frac{1}{R_0} \tag{4.25}$$

此处

$$R_0=\frac{\gamma}{\beta+\rho} \tag{4.26}$$

上式是一个在病毒传播模型中引入的具有代表性的参数，叫作基本再生率(指受感染者的“再生”，而不是人口增长)。这样，只要易受感染者在人口中占的比率$s[n]/P$超过门限值$1/R_0$，$i[n]$在下一个时间步长将保持增长。由于$s[n]/P$不能超过1，如果$R_0\leqslant 1$将没有传染病。R_0超过1的部分的数值越大，发生传染病所需要的易受感染者的数量越少。

图4.3也展示出在这个案例的系统中，免疫接种率固定在$x[n]=0.5$时，到达一个没有受感染者的稳定状态，这叫作无感染稳定状态。在例4.8、例4.10和例5.5中，将进一步探索式(4.24)所描述模型的特性。特别地，可以看到这样的结果——例如通过降低免疫比例至$x[n]=0.2$并且按照图4.3保持其他参数不变——就会发现可以得到一种拥有非零数目的受感染者的稳定状态，这叫作地方病稳定状态。 143

在前一个例子中阐明的诸如此类的分割模型在连续时间和离散时间情况下都是普遍存在的。本节将以另一个DT例子来结束，这是一个采用基本运算的滤波器的实现。

例 4.4 延迟-加法-增益系统

图4.4中的框图展示了一个通过延迟器、加法器和增益器件互连而得到的因果离散时间系统。一个(单位)延迟器在任意整数时刻n的输出值是在$n-1$时刻输入端的值。或等价地，它在任意时刻n的输入值将出现在$n+1$时刻的输出端。加法器产生的输出是它当前输入的和。增益器件产生的输出是当前输入值扩展增益倍数后的值。它们都相当于对各自的输入信号进行LTI操作。

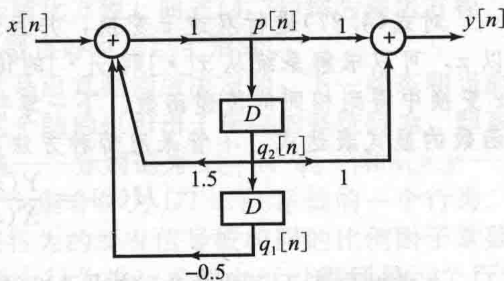


图 4.4 延迟-加法-增益器件框图

系统之间的“互连”或者“连接”等价于各种器件的每一个输入端口映射到其中某个

器件的选定输出端口。如果每一个环路中都包含一些延迟，这种互连方式就会使得系统运行良好，也就是说，系统中不存在无延迟的环路。图 4.4 给出了一个总体的外部输入$x[n]$和一个总体的外部输出 $y[n]$。这样的延迟-加法-增益系统(相应的 CT 系统如例 4.5 所示，叫作积分-加法-增益系统)在构建 LTI 滤波器时被广泛使用，这种滤波器能够从信号 $x[\cdot]$中产生出信号 $y[\cdot]$。

这个系统的记忆性体现在延迟器上，因此自然能考虑到将这些器件的输出作为候选状态变量。因此，将这个例子中的记忆元件在时刻 n 的输出标记为 $q_1[n]$和 $q_2[n]$。对于图 4.4给定的框图，可以得到以下跟指示信号有关的具体器件及其互连方程

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n] \\ q_2[n+1] &= p[n] \\ p[n] &= x[n] - 0.5q_1[n] + 1.5q_2[n] \\ y[n] &= q_2[n] + p[n] \end{aligned} \tag{4.27}$$

$n \geqslant n_0$ 时系统的响应完全由 $n \geqslant n_0$ 时的输入 $x[n]$和在 n_0 时刻存储在延迟器件输出端的 $q_1[n_0]$和 $q_2[n_0]$的值决定。延迟器件在每一个时间步捕获系统的状态，也就是说，它们总结了所有过去的历史信息，这些信息关系到系统当前和将来的输入如何影响系统当前和将来的输出。

144

为了用这些变量在 n 时刻的值和在同一时刻 n 的外部输入值来表示 $n+1$ 时刻的候选状态变量值，需要整合式(4.27)。这相当于把 n 时刻所有延迟器件的输入用 n 时刻延迟器件的输出值和同时刻的外部输入值来表示。这个例子的结果可以用如下矩阵方程来表述

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}[n+1] &= \begin{pmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x[n] \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{b}x[n] \end{aligned} \tag{4.28}$$

同样，n 时刻的输出可以根据 n 时刻的候选状态变量值和同时刻 n 的外部输入值来获得

$$y[n] = [-0.5 \quad 2.5] \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + x[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n] + \mathrm{d}x[n] \tag{4.29}$$

注意，在这个例子中，与前一个例子不一样的是，在任意时刻 n 的输出 $y[n]$不仅依赖 n 时刻的状态变量，还依赖同时刻 n 的外部输入。

式(4.28)和式(4.29)反映了 $q_1[n]$和 $q_2[n]$的确是有效的状态变量。特别地，方程明确地展示出，如果给定了在初始时刻 n_0 的状态变量值 $q_1[n_0]$和 $q_2[n_0]$，并且也给出了从 n_0 向前的输入轨迹，即 $n \geqslant n_0$ 时的 $x[n]$，那么可以计算出在 $n \geqslant n_0$ 时的状态变量和输出。所有需要做的仅仅是反复地应用式(4.28)进行迭代来求得 $q_1[n_0+1]$和 $q_2[n_0+1]$，然后是 $q_1[n_0+2]$和 $q_2[n_0+2]$，以后的时间参数以此类推，用式(4.29)就可以计算出每一个时刻的输出。

对式(4.27)进行双边 z 变换，并且注意信号每一步的时间推进在变换域里面映射为乘以 z，可以求解系统从 $x[\cdot]$到 $y[\cdot]$的传递函数 $H(z)$。相应地，也可以从状态空间描述的 z 变换中得到相同的传递函数。下一章将根据系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$和 d 来给出构成系统传递函数的显式表达式。不管采用哪种方法，都可以得到这个例子的传递函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \tag{4.30}$$

上式对应于下面的输入-输出差分方程

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + x[n-1] \tag{4.31}$$

积分-加法-增益系统的CT状态空间模型的推导遵循一个完全平行的方式。积分器代替延迟器。它们在t时刻的输出构成了系统的一个自然状态变量集合；它们在任何起始时刻t_0的值建立了在$t \geqslant t_0$区间内积分的初始条件。状态演化方程可以从$t > t_0$时刻对所有积分器的输入表示中推导出，这些输入不仅依赖于t时刻所有积分器输出，还依赖于同时刻的外部输入。 145

4.3 状态空间模型

正如前一节中例子所说明的，当研究或者建立物理模型时，通常很自然也很方便地就会将关注点集中于输入和输出信号，同时还会描述一些关键变量或信号的相互作用及其时间演化，这些变量和信号是与系统内部行为相关的。对这些器件及其相互连接的组合描述就能得出比输入-输出关系更丰富的一种表示。特别地，4.2节中的例子依据一组状态变量集的时间演化来描述系统行为，这个状态变量集完整捕捉到了在过去任意时刻的系统历史信息，而这个历史信息会影响系统现在和将来的响应。现在推导一个在DT和CT情况下更加正式的状态空间模型，紧接着讨论这种模型的两种定义的特点。

4.3.1 DT状态空间模型

状态空间模型将围绕一组状态变量来建立，这里主要限于对实数值状态变量的讨论。在一个模型或者系统中，状态变量的个数称为它的阶数。这里只处理有限阶的状态空间模型，称为集总模型。

对于一个DT情况下的L阶模型，一般把n时刻的L个实数值状态变量表示为$q_1[n]$，$q_2[n]$，…，$q_L[n]$。这些状态变量可以很方便地组合为一个状态向量：

$$\boldsymbol{q}[n]=\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_L[n] \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

这个向量的值组成了系统和模型在n时刻的状态。

DT LTI状态空间模型

一个具有单一或者标量输入$x[n]$和单一输出$y[n]$的DT LTI状态空间模型有如下形式，用紧凑矩阵形式记为

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n] \tag{4.33}$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+\mathrm{d}x[n] \tag{4.34}$$

式(4.33)和(4.34)中，$\boldsymbol{A}$是一个$L\times L$的矩阵，$\boldsymbol{b}$是一个$L\times 1$的矩阵或者列向量，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$是一个$1\times L$的矩阵或者行向量，上标(^{T})表示列向量$\boldsymbol{c}$转置为一个行向量。数值$d$是一个$1\times 1$的矩阵或者标量。线性时不变模型情况下，所有这些矩阵的项(entry)都是数、常量或者参数，因此它们不随n变化。每一个状态变量的下一个值和当前输出的值都用当前状态和当前输入的LTI函数来表示。式(4.33)称为状态演化方程，而式(4.34)称为输出方程。从前一节例4.4中得到的延迟-加法-增益系统的模型正好也是以上形式。 146

式(4.33)和式(4.34)中的系统是LTI的，这是由其结构所决定的：下一状态和当前输出是当前状态和当前输入的LTI函数。然而，这个结构也引出了相应的系统行为，即系统是LTI的。一个特定的输入、状态和输出信号集——分别记为$x[\cdot]$、$\boldsymbol{q}[\cdot]$和$y[\cdot]$——将一起满足以上状态演化方程和输出方程，那么这个集合称为DT LTI系统的一个行为。这种行为可以由以上方程的线性结构产生，即将该行为的所有信号按相同的比例因子常数进行缩放，就能再产生一个系统行为。另外，对两个行为进行求和也可以得到另一个行为。更一般地，行为的线性加权组合也可以得到另一个行为，因此，系统的行为具有叠加性。类似地，根据时不变的定义式，一个行为的任意时移——输入、状态和输出信号时移相同的量——将产生一个新的行为。因此，方程式的LTI结构是其解和行为的LTI特性的真

实写照。

延迟-加法-增益系统的实现

在例 4.4 讨论的延迟-加法-增益系统可以模拟或者"实现"如式(4.33)和式(4.34)所示的任意 L 阶的 DT LTI 模型。关键在于加法器和增益器件足够实现对应的加法和乘法运算，这里的乘法与 LTI 状态空间描述中的各种矩阵乘法相关。

为了进行仿真，从 L 个延迟器开始，并且将它们在 n 时刻的输出记为 $q_j[n]$，其中 $j=1, 2, \cdots, L$；那么接下来对应的输入就为 $q_j[n+1]$。式(4.33)中的第 i 行表示为了计算 $q_i[n+1]$，其中 $i=1, 2, \cdots, L$，需要 $q_j[n]$ 和 $x[n]$ 进行怎样的 LTI 组合。类似地，式(4.34)说明为了计算 $y[n]$，需要变量进行怎样的 LTI 组合。这些 LTI 组合中的每一个都能够使用加法器和增益器件来实现。

前面给出的实现方法并不是唯一的，有多种方法可以实现线性组合。例如，依据矩阵中是否有特殊的结构，或者依据线性组合中如何分组和排序不同项的计算。对于例 4.4 的系统，从式(4.28)和(4.29)给出的模型出发，然后按照本段描述的步骤，几乎可以确定会得到一个与图 4.4 不同的实现。

通用形式

尽管在 DT 情况下主要关注的是前面提到的 LTI、单输入、单输出、状态空间模型，但是也存在对这种描述的各种自然的通用形式，它们会使得系统分析更加完整。一个多输入 DT LTI 状态空间模型可以通过用和项 $\boldsymbol{b}_1 x_1[n]+\cdots+\boldsymbol{b}_M x_M[n]$ 取代(4.33)中的单项 $\boldsymbol{b}x[n]$ 来得到，其中 M 是输入的个数。这相当于用一个具有 M 元素的向量输入 $\boldsymbol{x}[n]$ 来取代标量输入 $x[n]$，对应地将 $\boldsymbol{b}$ 改为维度为 $L\times M$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$。类似地，对于一个多输出的 DT LTI 状态空间模型，将式(4.34)中的单输出量用具有这种输出形式的集合来代替，每一个式子对应于 P 个输出中的一个。等价于将标量输出 $y[n]$ 用 P 个元素输出向量 $\boldsymbol{y}[n]$ 来代替，对应地，将 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 和 d 分别用维度为 $P\times L$ 和 $P\times M$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 来代替。

147

一个线性但是时变的 DT 状态空间模型采用的形式与式(4.33)和式(4.34)是相同的，除了这里有一些或者所有的矩阵项是时变的。一个线性但是周期变化的模型是这里的一种特殊情况，其矩阵项都以相同的周期呈现周期性的变化。

除了在时变系统的情况下增益需要随时间变化以外，以上所有的通用形式都能够通过延迟-加法-增益等器件来仿真模拟或者实现。对于下面描述的非线性系统，由于包含非线性器件或者组合，则需要进行更精细的模拟。

一个非线性、时不变、单输入、单输出模型用 $\boldsymbol{q}[n]$ 和 $x[n]$ 的非线性但是时不变的函数来表示 $\boldsymbol{q}[n+1]$ 和 $y[n]$，而不是采用 LTI 函数，具体体现在式(4.33)和式(4.34)右边的矩阵表达式上。在例 4.3 中对于病毒传播的完整和精简模型就是这种类型。例如，对于一个三阶非线性时不变状态空间模型，组成它的状态演变方程有以下形式：

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= f_1(q_1[n], q_2[n], q_3[n], x[n]) \\ q_2[n+1] &= f_2(q_1[n], q_2[n], q_3[n], x[n]) \\ q_3[n+1] &= f_3(q_1[n], q_2[n], q_3[n], x[n]) \end{aligned} \tag{4.35}$$

输出方程的形式为

$$y[n] = g(q_1[n], q_2[n], q_3[n], x[n]) \tag{4.36}$$

其中，状态演化函数 $f_1(\cdot)$、$f_2(\cdot)$、$f_3(\cdot)$ 和输出函数 $g(\cdot)$ 都是三个状态变量 $q_1[n]$、$q_2[n]$、$q_3[n]$ 和输入 $x[n]$ 的时不变非线性函数。这里的时不变意味着这些函数通过相同的方式组合它们的参量，而与时间索引 n 无关。用向量符号表示为

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}[n], x[n]), \quad y[n] = g(\boldsymbol{q}[n], x[n]) \tag{4.37}$$

其中，对于三阶情况，

$$\boldsymbol{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ f_3(\cdot) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

对于一个 L 阶的描述，也有相同的模式。

148

最后，一个非线性、时变的模型将 $\boldsymbol{q}[n+1]$ 和 $y[n]$ 表示为 $\boldsymbol{q}[n]$ 和 $x[n]$ 的非线性时变函数。换句话说，状态演化方程和输出方程组合参量的方式可能跟随 n 变化。对于这种情况，可以写出

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}[n],x[n],n),\quad y[n]=g(\boldsymbol{q}[n],x[n],n) \tag{4.39}$$

非线性、周期性变化的模型可以定义为一个特殊情况，其中的时间变化都是具有公共周期的周期变化。

4.3.2 CT 状态空间模型

连续时间状态空间描述与 DT 情况非常相似。一个 L 阶系统的状态变量可以记为 $q_i(t)$，$i=1$，2，…，L，且状态向量为

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_L(t) \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

在 DT 情况下，状态演化方程用当前状态向量和当前输入值来表示下一时间步的状态向量。在 CT 情况下，状态演化方程把每一个状态变量的变化率或者微分用当前状态和输入的函数来表示。

CT LTI 状态空间模型

一般的 L 阶 CT LTI 系统状态空间表示有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{4.41}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{d}x(t) \tag{4.42}$$

其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)/\mathrm{d}t=\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 记为向量，该向量中的项对应的是 $\boldsymbol{q}(t)$ 项的微分。所有这些矩阵的项都是数、常数或者不随时间 t 变化的参数。因此，每一个状态变量的变化率和输出的当前值都可以表示为当前状态和当前输入的 LTI 函数。在 DT LTI 例子中，以上系统的 LTI 结构是它的解或者行为的 LTI 性质的真实写照，这个事实将在第 5 章进行详细阐述。例 4.1中的式(4.8)和式(4.9)，以及例 4.2 中的式(4.14)和式(4.17)中描述的模型都正好是以上形式。

积分-加法-增益系统实现

具有式(4.41)和式(4.42)形式的任意 CT LTI 状态空间模型能够使用积分-加法-增益来系统仿真或者实现。方法与前面描述的 DT LTI 的情况完全类似。这里从 L 个积分器开始，将它们的输出标识为 $q_j(t)$，其中 $j=1$，2，…，L。这些积分器的输入就是微分 $\dot{q}_j(t)$。式(4.41)的第 i 行，其中 $i=1$，2，…，L，就决定了合成 $\dot{q}_i(t)$ 需要对 $q_j(t)$ 和 $x(t)$ 进行怎样的 LTI 组合。类似地，使用式(4.42)来决定需要对这些变量进行怎样的 LTI 组合以计算出 $y(t)$。最后，这些线性时不变组合都可以用加法器和增益器件来实现。这里用下面一个特别的例子来说明这个处理过程。

149

通用形式

基本的 CT LTI 状态空间模型能够推广到多输入和多输出模型、非线性时不变模型、线性和非线性时变或者周期性变换模型。通过适当地放宽式(4.41)和式(4.42)右边形式的约束条件，这些通用形式就可以用与 DT 系统同样的方式来描述。例 4.1 中式(4.3)～式(4.5)描述的倒立摆模型是非线性和时变的，有如下形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t),x(t)),\quad y(t)=g(\boldsymbol{q}(t),x(t)) \tag{4.43}$$

一个通用单输入单输出的非线性和时变 CT 空间状态模型有如下形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t),x(t),t),\quad y(t)=g(\boldsymbol{q}(t),x(t),t) \tag{4.44}$$

148

例 4.5 小角度倒立摆仿真

对于在例 4.1 中的偏离完全倒立位置的足够小角度的倒立摆，原始的非线性状态空间模型能够简化为式(4.8)和式(4.9)描述的 LTI 状态空间模型。为了方便，此处重复了这个线性时不变模型，但是其中引入了一个特定摆的数值：

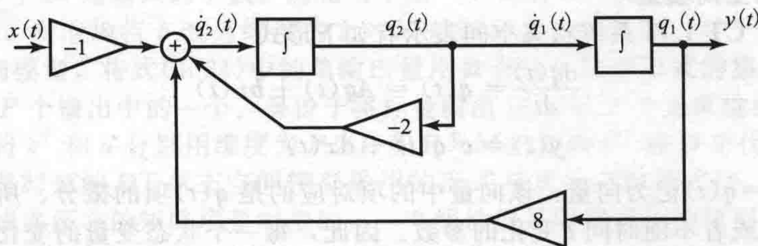
$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{4.45}$$

和

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t) \tag{4.46}$$

为了用积分器、加法器、增益器件仿真这个二阶线性时不变系统，这里以两个积分器开始，并用 $q_1(t)$和 $q_2(t)$表示它们在时刻 t 的输出。这些积分器在时刻 t 的输入则分别记为 $\dot{q}_1(t)$和 $\dot{q}_2(t)$，式(4.45)中的两个表达式右边的项展示了如何从 $q_1(t)$、$q_2(t)$、$x(t)$的特殊加权线性组合中合成 $\dot{q}_1(t)$和 $\dot{q}_2(t)$。使用增益器件来得到合适的权值，然后用加法器来产生 $q_1(t)$、$q_2(t)$、$x(t)$的加权线性组合。通过把这些加权线性组合送到对应的积分器的输入端口，$\dot{q}_1(t)$和 $\dot{q}_2(t)$就设置为这些表达式的形式。输出 $y(t)=q_1(t)$直接从第一个积分器的输出端口就可以读出。图 4.5 中的框图显示了仿真结果。◀

147



150

图 4.5 从垂直位置小角度偏差的倒立摆的积分-加法-增益系统仿真模型

4.3.3 状态空间模型的典型性质

状态空间模型的两个典型性质如下所示：

(1)**状态演化特性**：任意初始时刻的状态和初始时刻以后的任意区间的输入，决定了状态轨迹，也就是说，在整个区间内，状态是时间的函数。跟未来状态有关的、过去的一切都体现在当前的状态中。

(2)**瞬时输出特性**：任何瞬时的输出都可以用在同一瞬时的状态和输入来表示。

状态演化特性使状态空间模型特别适合于描述因果系统。在 DT LTI 情况下，从式(4.33)中可以明显地看出状态演化特性的有效性，这使得仅仅只需了解当前状态和当前输入，通过从时刻 n 推移到时刻 $n+1$，就可以反复迭代更新而得到 $\boldsymbol{q}[n]$。相同的理论也可同样用于式(4.39)中的通用 DT 状态演化表达式。

149

在通用 CT 情况下，状态演化特性需要建立得更加精细，这在实际上就需要函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t),x(t),t)$定义的状态向量变化率能够满足一些相当细微的技术条件。在本书中这些条件所有模型都满足，因此以后不会再进行条件的讨论。取而代之的是，这里需要讨论 CT 状态空间模型能否用一个简单的数值来近似间隔为 Δ 的一个时间离散集上的状态轨迹。这种数值算法称为前向欧拉方法(forward-Euler method)。

该算法使用初始时刻 t_0 的状态和输入信息来决定状态的初始变化率，也就是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t_0),x(t_0),t_0)$。如图 4.6 所示，初始变化率是状态轨迹在 t_0 时刻的切线。真实轨迹的逼近是通过沿着切线向前步进一个时间增量 Δ——前向欧拉步进(forward-Euler step)—来得到，

这种估计为：

$$q(t_0+\Delta)\approx q(t_0)+f(q(t_0),x(t_0),t_0)\Delta \tag{4.47}$$

151

这种方式跟使用一阶泰勒级数逼近轨迹，或者使用一种前向差分来逼近 $\dot{q}(t_0)$ 的方式是等价的。

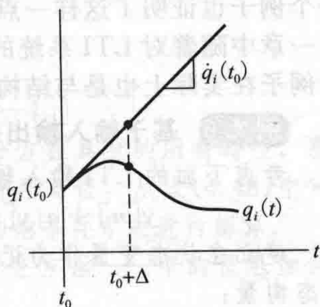


图 4.6 使用连续时间状态演化方程来得到一段间隔后的状态轨迹

现在，$q(t+\Delta)$ 的估计值有效，且在已知时刻 $t_0+\Delta$ 的输入 $x(t_0+\Delta)$ 的情况下，同样的步骤可以在下一个时刻重复，因此就能得到 $q(t_0+2\Delta)$ 的一个近似值。这个迭代可以持续到整个感兴趣的时间区间上。在前面提到的技术条件下，这个算法在每一时间步都会累积一个阶数为 Δ^2 的误差，并且在长度为 T 的区间中采用 T/Δ 的时间步进，那么在时间区间末尾将得到累计误差的阶数为 $T\Delta$。因此，通过选择一个足够小的 Δ，就可以得到任意小的误差。

前向欧拉算法足以说明一个 CT 状态空间描述是如何引起状态演化特性的。对于实际的数值计算，应该采用更复杂的数值程序，比如基于高阶泰勒级数的逼近，使用可变长度时间步进来达到更好的误差控制。CT LTI 情况比通用情况更简单。在第 5 章中，当讨论如何明确地求解它们的行为时，将会详细描述这类状态空间模型的状态演化特性。

瞬时输出特性从输出表达式(4.34)和式(4.42)中的 LTI 情况来看是很明显。它也提供前面列出的单输入单输出 LTI 模型的各种通用形式，其中最广泛的是输出表达式(4.39)和式(4.44)。

状态演化和瞬时输出性质是一个状态空间模型的典型特性。在建立状态空间模型时，需要引入一个附加的状态变量向量 $q[n]$ 或者 $q(t)$，以此来补充输入变量 $x[n]$ 或 $x[t]$，以及输出变量 $y[n]$ 或 $y(t)$。为了得到满足这些特性的描述，这种补充需要做得很精确。

通常情况下，依据特定的前后情景或者应用场景，会对状态变量的自然选择直接给出一些建议。正如已经注意到的，以及在前面的 DT 和 CT 情况的例子中所描述的那样，状态变量跟系统记忆有关。在许多涉及 CT 模型的物理情况中，因为能量能够从过去到将来的过程中持续存在，所以这些情况的中状态变量都与能量相关。

152

这里总是可以为状态变量选择任何的可替代的集合，只要这些状态变量一起包含了一个给定集合的完全同样的信息。也有这种情况，就是没有特别自然或者十分明显的状态变量，但是仍然可以定义补充变量，来得到一个有效的状态空间描述。

以上关于两个重要特性的讨论——特别是状态向量在分割过去和未来中的作用——表明了状态空间模型特别适合用来描述因果系统。实际上，状态空间模型几乎不用来描述非因果系统。在这里应该总是假定，凡是涉及状态空间模型处理的时候，它们就代表因果系统。尽管因果性并不是在分析通信系统和信号处理系统的许多方面的核心问题，特别是在非实时环境下，但是它通常是控制设计和动态系统运行的核心，这就是状态空间描述具有最大价值和作用的地方。

4.4 基于 LTI 输入输出模型的状态空间模型

在各种场景下的模型建立中，状态空间的表示能够很自然和直接地产生，比如 4.2 节讨论的例子。也可以从其他的也许是更熟悉的描述中推导出来，比如输入输出描述。

从相反的方向来推导也是可行的，例如，从传递函数、单位采样或者单位冲激响应、或者输入输出差分或微分方程来构建状态空间描述。这种前奏式的处理方法通常是很有价值的，比如在进行仿真、滤波器实现、控制设计，或者是仅仅为了从另一个观点理解初始描述。与结果状态空间描述有关的状态变量不必有一个有趣的或者有物理意义的解释，但是仍然需要捕捉住系统的记忆性。

以下两个例子描述了这个反向处理过程，即从输入输出描述合成状态空间描述，这对DT LTI系统来说是很重要的应用。在CT LTI情况下也可以建立类似的例子。下面的第一个例子也证明了这样一点，可变阶数的状态空间模型能够共享相同的输入输出描述，在下一章中随着对LTI系统的结构分析，这一事实将会得到更好阐述。本节结束时候的第二个例子在实际上也是与结构分析紧密联系的。

153

例 4.6 基于输入输出差分方程的状态空间模型

考虑下面的LTI输入输出差分方程

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_1x[n-1]+b_2x[n-2] \tag{4.48}$$

建立在状态变量作为记忆变量的观点上，考虑使用下面的“过去”变量矩阵作为候选状态向量：

$$\boldsymbol{q}[n]=\begin{bmatrix} y[n-1] \\ y[n-2] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

为了得到对应的状态空间模型，$\boldsymbol{q}[n+1]$必须跟$\boldsymbol{q}[n]$和$x[n]$相关。给定初始差分方程是线性且时不变的，可以预期得到如式(4.33)和(4.34)中所示的矩阵形式的LTI状态空间描述。使用这些等式作为模板，既要考虑矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$中什么矩阵项是需要的，也要考虑满足上面选择的$\boldsymbol{q}[n]$的等式的数值$d$，还要考虑给定差分方程中的具体关系。所得的四阶状态空间模型具有如下形式：

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ x[n] \\ x[n-1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y[n-1] \\ y[n-2] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}x[n]$$

$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n] \tag{4.50}$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y[n-1] \\ y[n-2] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \end{bmatrix}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]$$

如果在选择状态变量的时候稍微更仔细一点，就可能得到更加经济的模型。对于一个三阶模型，假定选择状态向量

$$\boldsymbol{q}[n]=\begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ x[n-1] \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

对应的三阶状态空间模型有如下形式：

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\begin{bmatrix} y[n+1] \\ y[n] \\ x[n] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ x[n-1] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[n] \tag{4.52}$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ x[n-1] \end{bmatrix}$$

一种更加微妙的状态变量的选择能产生一个二阶状态空间模型。例如，选择

154

$$\boldsymbol{q}[n]=\begin{bmatrix} y[n] \\ a_2y[n-1]+b_2x[n-1] \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

对应的二阶状态空间模型有如下形式：

$$\begin{bmatrix} y[n+1] \\ -a_2 y[n]+b_2 x[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[n] \\ -a_2 y[n-1]+b_2 x[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[n] \\ -a_2 y[n-1]+b_2 x[n-1] \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

在这种情况下，如果想让状态空间模型能够显示出原始差分方程具有的所有特性，那么可以证明得到一个阶数低于2的状态空间描述是不可能的。这并不奇怪，从式(4.48)中可以看到这样的事实，这是一个二阶差分方程，因此需要知道两个初始条件才能进行解算。

在以上每个情况中，要注意到包含在式(4.48)——原始差分方程——中的信息如何被合成到了状态空间模型中。

对于一个 LTI 系统，输入输出行为最基本的描述由系统冲激响应提供。在因果 LTI 系统中，负时间情况下的冲激响应为 0。对于 DT 系统，接下来的例子将显示单位采样响应或者单位冲激响应 $h[n]$需要满足什么样的额外约束条件，才能够保证它可以实现为一个因果 DT LTI 状态空间系统的冲激响应。下一章考虑的因果 DT LTI 状态空间系统的类型恰好是这个例子中的冲激响应形式。这个例子说明了冲激响应的指数部分和潜在实现的状态变量之间的关系。

例 4.7 基于单位冲激响应的状态空间模型

考虑一个因果 DT LTI 系统的冲激响应 $h[n]$。其因果性要求在 $n<0$ 时，$h[n]=0$。输出 $y[n]$跟过去和现在的输入 $x[k]$，$k\leqslant n$ 可以通过卷积和联系起来，有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[n-k]x[k] \tag{4.55}$$

$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} h[n-k]x[k]\right)+h[0]x[n] \tag{4.56}$$

式(4.56)中的第一项也就是

$$q[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} h[n-k]x[k] \tag{4.57}$$

表示在时刻 n，过去的输入对当前值的影响，因此看起来也跟状态变量的概念有一些关系。更新下一个时间步的 $q[n]$，得到

$$q[n+1]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[n+1-k]x[k] \tag{4.58}$$

155

通常情况下，如果冲激响应没有特别的形式，对每一个 n，连续的 $q[n]$的值必须从式(4.57)中重新计算。当从 n 时刻移动到 $n+1$ 时刻，过去时刻的输入 $x[k]$，$k\leqslant n$ 都不能舍弃掉，这是因为 $q[n+1]$的表达式包含了现在时刻的输入和用于计算 $q[n]$的过去的 $x[\cdot]$的差分线性组合。由于所有过去的输入都必须被记住，所以系统的记忆是无限的。

然而，考虑 $h[n]$是指数形式的一类系统

$$h[n]=\beta\lambda^{n-1}u[n-1]+d\delta[n] \tag{4.59}$$

其中，β、λ 和 d 都是常数。该 $h[n]$的时域如图 4.7所示。对应的传递函数是

$$H(z)=\frac{\beta}{z-\lambda}+d \tag{4.60}$$

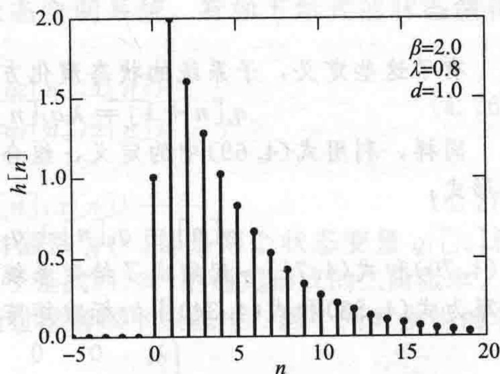


图 4.7 离散时间指数单位采样响应

（收敛域为$|z|>|\lambda|$）。这个冲激响应的一个重要特点在于因为具有指数形式，所以

它的一个时移版本可以简单地通过它的一个缩放版本得到。对于这个情况，

$$q[n]=\beta\sum_{k=-\infty}^{n-1}\lambda^{n-k-1}x[k] \tag{4.61}$$

并且

$$q[n+1]=\beta\sum_{k=-\infty}^{n}\lambda^{n-k}x[k] \tag{4.62}$$

$$=\lambda\Big(\beta\sum_{k=-\infty}^{n-1}\lambda^{n-k-1}x[k]\Big)+\beta x[n]=\lambda q[n]+\beta x[n] \tag{4.63}$$

利用式(4.63)将式(4.56)和(4.61)组合起来，得到一对组成系统的状态空间描述的式子：

156

$$q[n+1]=\lambda q[n]+\beta x[n] \tag{4.64}$$

$$y[n]=q[n]+dx[n] \tag{4.65}$$

考虑一个相似的但是高阶系统的冲激响应

$$h[n]=(\beta_1\lambda_1^{n-1}+\beta_2\lambda_2^{n-1}+\cdots+\beta_L\lambda_L^{n-1})u[n-1]+\mathrm{d}\delta[n] \tag{4.66}$$

其中，β_i、λ_i 和 d 都是常数。对应的传递函数为

$$H(z)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{\beta_i}{z-\lambda_i}\Big)+d \tag{4.67}$$

如果一个因果离散时间线性时不变系统的传递函数 $H(z)$ 是一个关于 z 的有理函数并且有不同的(比如，非重复的)极点，那么通过选择合适的 β_i、λ_i、L 和 d，它能够写成部分分式展开的形式。注意尽管这里只考虑了有理传递函数 $H(z)$，它的分子和分母多项式都是实系数，但是 $H(z)$ 的极点可能包含一些复数 λ_i(与复数 β_i 相关)，然而在每一个这种情况下，它的复共轭 λ_i^* 也将是一个极点，与加权因子 β_i^* 相关，它们的和

$$\beta_i(\lambda_i)^n+\beta_i^*(\lambda_i^*)^n \tag{4.68}$$

将会是实数的。

图 4.8 中的框图显示了由式(4.66)和式(4.67)指定的 LTI 系统能够通过子系统的并行互连得到，其中子系统的传递函数对应式(4.60)中更简单的情况，或者等价于式(4.59)中冲激响应所对应的并行子系统。基于这个结构和对于一阶例子处理的启发，可以对这 L 个子系统中的每一个定义一个状态变量：

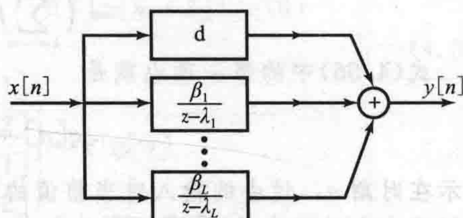


图 4.8　不同极点例子中，因果离散时间线性时不变系统有理传递函数的分解

$$q_i[n]=\beta_i\sum_{k=-\infty}^{n-1}\lambda_i^{n-k-1}x[k],\quad i=1,2,\cdots,L \tag{4.69}$$

有了这些定义，子系统的状态演化方程就可以采用跟式(4.63)一样的形式，即

$$q_i[n+1]=\lambda_i q_i[n]+\beta_i x[n],\quad i=1,2,\cdots,L \tag{4.70}$$

同样，利用式(4.69)中的定义，组合式(4.57)、式(4.65)和(4.66)，输出方程变为以下形式：

157

$$y[n]=q_1[n]+q_2[n]+\cdots+q_L[n]+\mathrm{d}x[n] \tag{4.71}$$

式(4.70)和式(4.71)一起组成了给定系统的一个 L 阶状态空间描述。这个状态空间描述可以写为式(4.33)和式(4.34)中的标准矩阵形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_2&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&\lambda_L\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_L\end{bmatrix} \tag{4.72}$$

$$c^{\mathrm{T}} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \tag{4.73}$$

式(4.72)中 $\boldsymbol{A}$ 的对角形式反映出这样一个事实，即这个例子中的状态演化方程是去耦合的，其中的每一个状态变量都可以根据式(4.70)独立地进行更新。在后面将会看到式(4.33)和式(4.34)中给出的通用描述形式，具有不同的特征值条件，能够被转换成一个完全等价的描述，其中新矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对角的，如式(4.72)所示。当存在复特征值时，这个对角状态空间表达式将必然有复数项。◀

4.5 非线性状态空间模型的平衡状态和线性化

第5章和第6章将关注LTI状态空间模型。这种关注的第一个理由是线性时不变系统具有值得进一步研究的丰富结构和行为。这使得处理它们的强有力的分析方法和计算工具得到了发展。其发展的必然结果就是，工程系统中的各种不同模型都可以基于LTI框架来设计——比如例4.2中的电子电路或者例4.4中的离散时间滤波器。

关注的第二个理由是LTI模型可以很自然地近似描述一个非线性时变模型的局部或者“小信号”行为，这个非线性时变模型表示了一组常数平衡值中的状态变量和输入发生小波动后所发生的情况。在例4.1倒立摆中，式(4.8)和式(4.9)的LTI状态空间模型表明了这一点。

这一小节给出了在非线性时变状态空间模型中定义平衡状态的条件，描述了在这种平衡条件下，线性化在得到小信号LTI模型时所扮演的角色。

4.5.1 平衡状态

DT情况

假设式(4.37)中的状态空间模型的输入 $x[n]$，对于所有 n 都保持常数值 $\bar{x}$。对应的状态平衡是一个状态数值 $\bar{\boldsymbol{q}}$，有如下特性，如果 $\boldsymbol{q}[n]=\bar{\boldsymbol{q}}$ 并且 $x[n]=\bar{x}$，那么 $\boldsymbol{q}[n+1]=\bar{\boldsymbol{q}}$。等价地，如果对于所有的 n，$x[n]=\bar{x}$，并且系统初始化为 $\bar{\boldsymbol{q}}$，系统后续将保持在 $\bar{\boldsymbol{q}}$，那么状态空间中的 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 点是一个平衡(或者平衡点)。平衡是系统的一个稳定状态。从式(4.37)中可知，这在DT例子中是等价的，要求有

158

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{x}) \tag{4.74}$$

对应的平衡状态的输出为

$$\bar{y} = g(\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{x}) \tag{4.75}$$

在定义一个平衡的情况中，当在平衡点附近时，不会考虑给出了什么样的系统行为，也就是说，如果初始值逼近而不是准确的在 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 点，不用考虑这个系统表现如何。当在平衡状态附近讨论局部行为时，以及在特殊的局部稳定性中，平衡状态或者稳定状态的稳定性问题将受到关注。

特别地，考虑一个DT二阶非线性时不变状态空间系统，有如下形式的状态演化方程：

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= f_1(q_1[n], q_2[n], x[n]) \\ q_2[n+1] &= f_2(q_1[n], q_2[n], x[n]) \end{aligned} \tag{4.76}$$

输出 $y[n]$ 由下式定义：

$$y[n] = g(q_1[n], q_2[n], x[n]) \tag{4.77}$$

时刻 n 的状态演化函数 $f_1(\cdot)$、$f_2(\cdot)$ 和输出函数 $g(\cdot)$ 都是两个状态变量 $q_1[n]$ 和 $q_2[n]$ 以及输入 $x[n]$ 的时不变非线性方程。这些式子是式(4.37)的通用形式的二阶版本。

在二阶的情况下，给定 $\bar{x}$，就会发现平衡是通过求解以下系统中，两个同时发生的非线性等式内的两个未知数来实现的：

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{x}) \\ \bar{q}_2 &= f_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{x}) \end{aligned} \tag{4.78}$$

通常不能保证对于一个指定的常数输入 $\bar{x}$，存在一个平衡状态，并且当一个平衡状态

确实存在的时候，也不能保证它是唯一的。

例 4.8 病毒传播模型中的平衡

在例 4.3 中考虑的病毒传播简化二阶模型的状态演化方程采用了如下的形式：

159

$$\begin{aligned} s[n+1] &= s[n] - \gamma(i[n]/P)s[n] + \beta(P - s[n]) - \beta P x[n] \\ i[n+1] &= i[n] + \gamma(i[n]/P)s[n] - \rho i[n] - \beta i[n] \end{aligned} \tag{4.79}$$

其中，$s[n]$记作时刻 n 易受感染的人数，$i[n]$记作在那一时刻被感染的人数，$x[n]$是新出生人口中的免疫比例。参数 P 为人口总数，包括第三个子群体，称为恢复人群 $r[n]$。出生率和死亡率都是 β，恢复率为 ρ，γ 记作耦合系数(coupling coefficient)，表示感染者引起易受感染者传染病毒的影响效率。这里也引进了基本再生率 $R_0 = \lambda/(\beta+\rho)$。

假定免疫率保持常数 $x[n] \equiv \bar{x}$，其中，$0 \leqslant \bar{x} \leqslant 1$。对应的平衡状态变量对叫作易受感染者 $\bar{s}$ 和感染者 $\bar{\imath}$，必须满足：

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{s} - \gamma(\bar{\imath}/P)\bar{s} + \beta(P - \bar{s}) - \beta P \bar{x} \\ \bar{\imath} &= \bar{\imath} + \gamma(\bar{\imath}/P)\bar{s} - \rho\bar{\imath} - \beta\bar{\imath} \end{aligned} \tag{4.80}$$

一些直接的计算显示上面的方程有两个可能的解，对应两个可能的平衡态，将其标注为 IFE(Infective-Free Equilibrium)和 EE(Endemic Equilibrium)，分别对应“无感染平衡态”和“传染病平衡态”，分别：

$$\text{IFE}: \bar{s} = P(1-\bar{x}) \quad \text{并且} \quad \bar{\imath} = 0 \tag{4.81}$$

$$\text{EE}: \bar{s} = P/R_0 \quad \text{并且} \quad \bar{\imath} = (\beta P/\gamma)[R_0(1-\bar{x}) - 1] \tag{4.82}$$

在 IFE 中，没有受感染者。这像是图 4.3 中稳定状态的平衡，并且它在 $\bar{s} = P(1-\bar{x}) = 10000 \times 0.5 = 5000$ 时确实发生了。

另一方面在 EE 中，当 $R_0 > 1/(1-\bar{x})$ 时，受感染者的数目为正。如果 $R_0 = 1/(1-\bar{x})$，在平衡状态中将没有感染者，实际上，在这种条件下，IFE 和 EE 平衡值合并为一个单一平衡状态。如果 $R_0 < 1/(1-\bar{x})$，正如图 4.3 的系统仿真一样，那么非负人口下的唯一可能的平衡状态就是 IFE。◀

CT 情况

这里能够将同样的观点应用于计算 CT 非线性时不变状态空间系统的平衡状态中。定义式(4.43)中系统的平衡状态为 $\bar{\mathbf{q}}$，作为一个状态值，当初始化为该值并且输入固定在 $x(t) = \bar{x}$ 时，系统不会发生移动。在 CT 情况中，需要的是状态的变化速率，称为 $\dot{\mathbf{q}}(t)$，它在平衡状态时为 0，并且产生以下条件

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{x}) \tag{4.83}$$

通常用 $\mathbf{0}$ 来表示所有项都为 0 的任意向量或者矩阵，正确的维数从场景中获取。

再一次考虑这个二阶系统的具体情况：

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= f_1(q_1(t), q_2(t), x(t)) \\ \dot{q}_2(t) &= f_2(q_1(t), q_2(t), x(t)) \end{aligned} \tag{4.84}$$

并且

$$y(t) = g(q_1(t), q_2(t), x(t)) \tag{4.85}$$

对于这个二阶情况，其条件有如下形式

160

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{x}) \\ 0 &= f_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{x}) \end{aligned} \tag{4.86}$$

这又是一个带有两个未知数的同时发生的非线性方程组，对于给定的 $\bar{x}$，可能无解，可能有一组解，也可能有多组解。

例 4.9 倒立摆中的平衡状态

在例 4.1 中，倒立摆的状态演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t} = q_2(t) \tag{4.87}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathcal{I}}(mg\ell\sin(q_1(t))-\beta q_2(t)-x(t)) \tag{4.88}$$

如果输入矩 $x(t)$ 保持常数值 $\overline{x}$，对应的状态变量平衡值分别为 $\overline{q}_1$ 和 $\overline{q}_2$，那么设置在平衡状态下，状态变量的变化率为 0，可得

$$0=\overline{q}_2 \tag{4.89}$$

$$0=\frac{1}{\mathcal{I}}(mg\ell\sin(\overline{q}_1)-\beta\overline{q}_2-\overline{x}) \tag{4.90}$$

因此平衡速度 $\overline{q}_2$ 为 0，平衡位置 $\overline{q}_1$ 满足

$$\sin(\overline{q}_1)=\overline{x}/(mg\ell) \tag{4.91}$$

由于函数 $\sin(\overline{q}_1)$ 可能达到的最大值为 1，当且仅当 $|\overline{x}|\leqslant mg\ell$，式(4.91)存在解 $\overline{q}_1$。对于 $|\overline{x}|>mg\ell$，将没有平衡状态，实际上摆将呈现出连续的旋转。

如果 $\overline{x}=mg\ell$，则式(4.91)在 $[-\pi,\ \pi]$ 范围内存在唯一解 $\overline{q}_1=\pi/2$，对应于摆将固定在水平位置处，摆将用它自身质量提供的最大可能力矩来抵消外部施加的力矩 $\overline{x}$。如果 $\overline{x}=-mg\ell$，平衡位置在 $\overline{q}_1=-\pi/2$，也是水平位置。

否则，对于 $mg\ell>\overline{x}>0$，将会存在两组解：第一个是在 $[0,\ \pi/2]$ 范围内的角度 $\overline{q}=\arcsin(\overline{x}/(mg\ell))$，第二个是角度 π 减去这个角度。这两个平衡状态对应于摆稳定在通过中心点的水平线以上的某个角度或者稳定在水平线以下的相同角度。在这两种情况下，摆自身质量引起的力矩平衡外部施加的力矩 $\overline{x}$。对于 $0>\overline{x}>mg\ell$，将会在这些角度的负角度处有一对对称的平衡值对。如果外部施加的力矩为 0，即 $\overline{x}=0$，然后可能的平衡位置为 $\overline{q}_1=0$ 和 $\overline{q}_1=\pi$，分别对应于摆竖直向上平衡或者竖直向下悬挂。◀

4.5.2 线性化

现在检查一个时不变非线性状态空间模型在平衡点附近的系统表现。举个具体例子，再一次考虑式(4.76)中的二阶 DT 非线性系统。然而，下面的讨论将直接以通用化的 L 阶 DT 系统形式进行展开，同样应用于 CT 系统，这将在下面分别描述。假定 $x[n]$ 不是固定于一个跟平衡状态有关的常数值 $\overline{x}$，而是偏离这个平衡态的值 $\widetilde{x}[n]$，因此 161

$$\widetilde{x}[n]=x[n]-\overline{x} \tag{4.92}$$

假定状态变量相对于期望的平衡值具有一定量的扰动，记为

$$\widetilde{q}_1[n]=q_1[n]-\overline{q}_1,\quad \widetilde{q}_2[n]=q_2[n]-\overline{q}_2 \tag{4.93}$$

输出的扰动为

$$\widetilde{y}[n]=y[n]-\overline{y} \tag{4.94}$$

这里的目标是找到一个模型，能够准确或者近似描述这些相对于平衡点的各种扰动的行为。如果这些扰动或者偏离相对于平衡点来说很小的话，那么这就允许用截断的泰勒级数来很好地近似不同的非线性方程，所以这个目标就是可实现的。线性化意味着泰勒级数截断到一阶(比如，在偏离量处是线性的)，并且在这里考虑的场景中，就会产生一个 LTI 状态空间模型。这个 LTI 模型称为平衡点处的线性化，或者小信号模型。

为了线性化式(4.76)中的原始 DT 二阶非线性模型，依据扰动情况，使用式(4.92)和式(4.93)中定义的量，重写模型中的变量，然后在平衡值处进行一阶泰勒级数展开：

$$\begin{aligned}\overline{q}_i+\widetilde{q}_i[n+1]&=f_i(\overline{q}_1+\widetilde{q}_1[n],\overline{q}_2+\widetilde{q}_2[n],\overline{x}+\widetilde{x}[n]),\quad i=1,2\\&\approx f_i(\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{x})+\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\widetilde{q}_1[n]+\frac{\partial f_i}{\partial q_2}\widetilde{q}_2[n]+\frac{\partial f_i}{\partial x}\widetilde{x}[n]\end{aligned} \tag{4.95}$$

上面所有的偏导数都在平衡值处估算，因此是跟时间索引 n 无关的常数。同时注意上面的偏导数是关于连续状态变量和输入量的；没有关于离散时间变量索引 n 的“微分”，n 是离散变化时间的索引。

式(4.78)中关于平衡值的定义显示了上式左边部分的 $\overline{q}_i$ 项完全等于右边的 $f_i(\overline{q}_1,\ \overline{q}_2,\ \overline{x})$ 项，因此剩下的就是近似关系：

$$\widetilde{q}_i[n+1] \approx \frac{\partial f_i}{\partial q_1}\widetilde{q}_1[n] + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\widetilde{q}_2[n] + \frac{\partial f_i}{\partial x}\widetilde{x}[n] \tag{4.96}$$

其中 $i=1, 2$。用等号(=)代替掉这组式子中的约等号(≈)，就会产生平衡点处的线性化模型。这个线性化模型可以写为下面的矩阵形式：

162

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\widetilde{q}_1[n+1]\\ \widetilde{q}_2[n+1]\end{bmatrix}}_{\widetilde{q}[n+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial q_1 & \partial f_1/\partial q_2\\ \partial f_2/\partial q_2 & \partial f_2/\partial f_2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\widetilde{q}_1[n]\\ \widetilde{q}_2[n]\end{bmatrix}}_{\widetilde{q}[n]} + \underbrace{\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x\\ \partial f_2/\partial x\end{bmatrix}}_{b}\widetilde{x}[n] \tag{4.97}$$

这里已经得到了线性化模型中状态演化的一个标准 DT LTI 的状态空间描述，其中状态和输入变量都分别是下面的非线性模型平衡值处的偏差。对应的输出方程同样可以推导出来，并且具有以下形式：

$$\widetilde{y}[n] = \underbrace{[\partial g/\partial q_1 \quad \partial g_1/\partial q_2]}_{c^{\mathrm{T}}}\widetilde{\boldsymbol{q}}[n] + \underbrace{[\partial g/\partial x]}_{d}\widetilde{x}[n] \tag{4.98}$$

式(4.97)中的偏微分矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，也叫作 Jacobian 矩阵，用矩阵符号表示为

$$\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}}\right]_{\bar{q},\bar{x}} \tag{4.99}$$

第 i 行第 j 列处的项是偏微分 $\partial f_i(\cdot)/\partial q_j$，估算的是在状态和输入变量平衡状态处的值。类似的，

$$\boldsymbol{b} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}\right]_{\bar{q},\bar{x}}, \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}}\right]_{\bar{q},\bar{x}}, \quad d = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{\bar{q},\bar{x}} \tag{4.100}$$

例 4.10 病毒传播的线性化模型

回到例 4.3 中讨论的病毒传播二阶模型的状态演化方程，也就是

$$\begin{aligned} s[n+1] &= s[n] - \gamma(i[n]/P)s[n] + \beta(P - s[n]) - \beta P x[n] \\ i[n+1] &= i[n] + \gamma(i[n]/P)s[n] - \rho i[n] - \beta i[n] \end{aligned} \tag{4.101}$$

这个系统的两个状态平衡值集合 $\bar{s}$ 和 $\bar{\imath}$ 在例 4.8 中已经确定了。计算合适的 Jacobian 矩阵，可得线性化模型为

$$\begin{bmatrix}\widetilde{s}[n+1]\\ \widetilde{\imath}[n+1]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-(\gamma\bar{\imath}/P)-\beta & -\gamma\bar{s}/P\\ \gamma\bar{\imath}/P & 1+(\gamma\bar{s}/P)-\rho-\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{s}[n]\\ \widetilde{\imath}[n]\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\beta P\\ 0\end{bmatrix}\widetilde{x}[n] \tag{4.102}$$

原始系统的输出方程在式(4.21)中进行了定义，且已经是线性的，因此线性化输出方程可以简单得到

$$\widetilde{y}[n] = \phi\,\widetilde{\imath}[n] = [0 \quad \phi]\begin{bmatrix}\widetilde{s}[n]\\ \widetilde{\imath}[n]\end{bmatrix} \tag{4.103}$$

通过把这些问题参数代入例 4.8 中得到的平衡值 $\bar{s}$ 和 $\bar{\imath}$ 的表达式中，式(4.102)中的状态演化矩阵就能够按照问题参数进行重写。在无感染者平衡状态的情况下，其中 $\bar{\imath}=0$，状态演化矩阵估计为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{IFE}} = \begin{bmatrix}1-\beta & -\gamma(1-\bar{x})\\ 0 & 1+\gamma[(1-\bar{x})-(1/R_0)]\end{bmatrix} \tag{4.104}$$

对于传染病平衡状态，其中 $\bar{\imath}>0$，并且只有当 $R_0>1/(1-\bar{x})$ 时，这种情况才会存在，状态演化矩阵估计为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{EE}} = \begin{bmatrix}1-\beta R_0(1-\bar{x}) & -\gamma/R_0\\ \beta[R_0(1-\bar{x})-1] & 1\end{bmatrix} \tag{4.105}$$

163

◀

除了 CT 平衡状态由式(4.83)而不是式(4.74)中的条件指定以外，连续时间线性化状态空间模型的推导也是采用同样的方法。其结果是一个带有以下形式的演化方程的模型

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_{\overline{q},\overline{x}}\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\overline{q},\overline{x}}\widetilde{x}(t) \tag{4.106}$$

输出方程为

$$\widetilde{y}(t)=\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_{\overline{q},\overline{x}}\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{\overline{q},\overline{x}}\widetilde{x}(t) \tag{4.107}$$

例 4.11　倒立摆的线性化模型

在这个例子中，回到例 4.1 中讨论的倒立摆二阶状态演化方程：

$$\frac{dq_1(t)}{dt}=q_2(t) \tag{4.108}$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt}=\frac{1}{\mathcal{I}}(mg\ell\sin(q_1(t))-\beta q_2(t)-x(t)) \tag{4.109}$$

跟这个系统有关的平衡状态已经在例 4.9 中进行了计算。估计相关的 Jacobian 矩阵，线性化模型为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\widetilde{q}_1(t)\\ \widetilde{q}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ (mg\ell/I)\cos(\overline{q}_1) & -\beta/\mathcal{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{q}_1(t)\\ \widetilde{q}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1/\mathcal{I}\end{bmatrix}\widetilde{x}(t) \tag{4.110}$$

注意在垂直平衡状态处的线性化情况，有 $\overline{q}_1=0$，可以重新获得从例 4.1 的式(4.8)中得到的模型。

在原始的非线性模型中的输出由 LTI 表达式 $y(t)=\theta(i)=q_1(t)$ 进行定义，由于这个表达式已经是线性的，因此小信号模型的输出可以简单地写为

$$\widetilde{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{q}_1(t)\\ \widetilde{q}_2(t)\end{bmatrix} \tag{4.111}$$

◀

第 5 章将致力于 DT 和 CT LTI 系统解的结构的详细分析，同时检测系统的内部行为、稳定性以及系统输入和输出的耦合。

4.6　延伸阅读

一个关于状态空间模型极好的介绍是文献[Lue]，它阐述了在各种有趣的应用中研究这些模型的动态行为、稳定性和控制的价值。比较容易理解的是文献[Str]，它关注于低阶非线性状态空间模型的复杂行为(包括极限环、分叉与混沌)，并且包含不同应用领域的例子。一个更加面向计算的文献是[Lyn]，它涉及了大量应用中的非线性行为。文献[Clo]展示了怎样建立机械、电子、机电、热学和流体系统的状态空间和其他模型，集中关注线性时不变模型和通过变换方法对它们进行分析。在如电路[Chu]、传染病模型[Dal]或者人口模型[Cas]这些领域的专业书籍中，也包含它们在各自领域中的状态空间建模和分析。这里引用的文献也是对第 5 章和第 6 章很有用处的延伸阅读。

164

习题

基础习题

4.1　使用合适的状态变量得到一个图 P4.1 所示的电路的二阶连续时间状态空间描述，然后用单标准的输入单输出形式将它写出来

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{d}x(t)$$

电阻、电感和电容都是线性时不变的元件，

$x(t)$是电压源，$y(t)$是电阻电压。

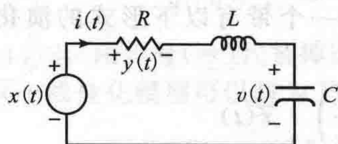


图 P4.1

4.2 图 P4.2 是一个二阶 CT LTI 系统框图。图中的方框代表积分器，三角形是放大器或者增益器件。积分器的输出是它的输入的积分。相反地，它的输入可以看作输出的微分。比如，如果积分器的输入为 $\dot{q}_1(t)$，那么它的输出就是 $q_1(t)$。增益器件的输出就是输入按照增益进行简单的比例放大。求出指定 9 个增益器件的增益系数，使得图中的系统与问题 4.1 中的电路拥有相同的状态空间描述。

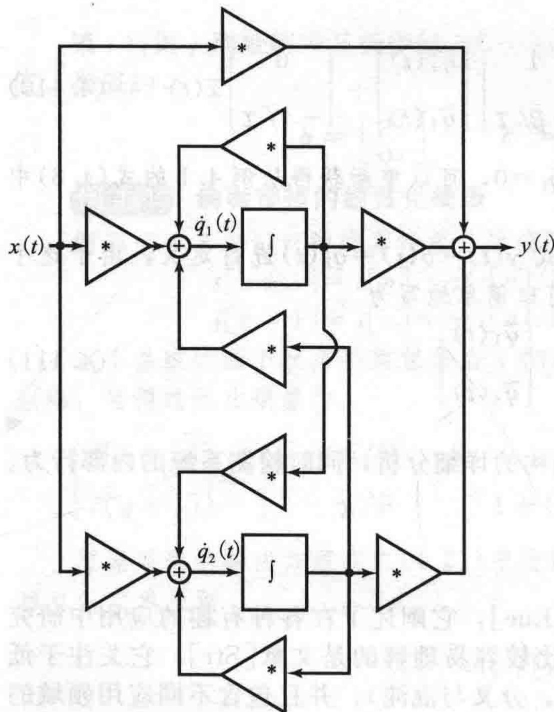


图 P4.2

4.3 (a) 选择合适的状态变量，得到图 P4.3 中的电路的二阶连续时间线性时不变状态空间描述。电阻、电感和电容都是线性时不变器件，$x(t)$是电流源，$y(t)$是电阻电流。用标准形式写出你的描述。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{d}x(t)$$

(b) 找到联系 $x(t)$和 $y(t)$的微分方程。直接的(预期的)方法就是使用你的状态方程

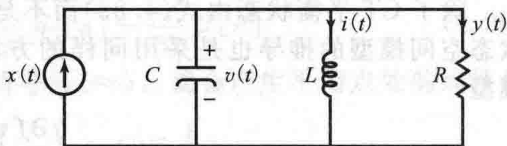


图 P4.3

来适当地消除变量。但是，也要通过使用阻抗的方法(如果你对这些很熟悉)计算从 $x(t)$到 $y(t)$的传递函数来确认你的答案，然后观察传递函数暗示着什么样的输入输出微分方程。

4.4 一个在笔直无摩擦轨迹上的质量块通过一个非线性弹簧固定在轨迹的一端，并且被一个外力 $x(t)$从另一端向上拉。它的运动可以通过以下方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}=-y^3(t)+x(t)$$

其中，$y(t)$是距离滑块固定端的距离。

(a) 把 $x(t)$作为输入，$y(t)$作为输出，选择合适的状态变量，然后写出系统的一个(非线性)状态空间描述。

(b) 如果输入 $x(t)=8$，计算你的模型中所有时刻 t 的状态变量的平衡状态。

(c) 求出系统的一个线性化的状态空间模型，以此来描述状态变量和输出稍微偏离(b)中的平衡状态的情况，响应在输入和状态变量初始值中的扰动。

4.5 假定代替问题 4.4 中的微分方程，系统描述为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}=-y^3(t)+\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)$$

(a) 你在问题 4.4 中选择的状态变量仍然有效吗？

(b) 针对这个新的微分方程模型，重做问题 4.4 中的(a)～(c)部分。

4.6 假定一个小物件的运动用如下的等式来建模

$$\frac{\mathrm{d}^2 p(t)}{\mathrm{d}t^2}+\phi\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}+p^3(t)-\mu^2 p(t)=x(t)$$

其中，$p(t)$表示物体的位置(相对于某个参考点)，$x(t)$是加在它上面的力，ϕ(如同 μ^2)是一个正常数。

(a) 写出系统的状态空间模型，选择一些合适的状态变量，把 $x(t)$作为输入，速度 $\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t$ 作为输出 $y(t)$。你得到的模型是线性的吗？是时不变的吗？

(b) 对于所有的时刻 t，当 $x(t)=0$，存在三个可能的平衡状态。对于这三个平衡状态中的每一个，详细说明你的状态变量和输出所对应的值。

(c) 在(b)步骤得到的三个平衡状态中，只

有一个有对应的0平衡位置。对于这个特殊的平衡状态，写出线性化状态空间模型，以此来描述它的状态变量和输出从它们所对应的平衡值微小偏移$\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)$和$\widetilde{y}(t)$的情况，相应地，$x(t)$从它的平衡值0也有微小偏移$\widetilde{x}(t)$。模型中的矩阵的项应该用参数$\phi$和$\mu$来表示。

(d) 类似地，求解另外两个平衡状态的线性化模型。

4.7 (a) 求图P4.7中的系统的如下形式的状态空间描述

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n]$$
$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n]$$

选择延迟器的输出作为状态变量，延迟器是标注了D的方框。从上到下标识状态变量为$q_1[n]\sim q_N[n]$。

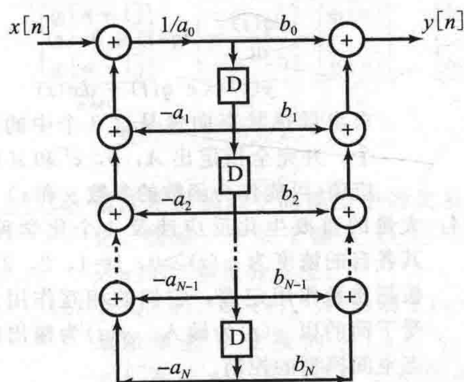


图 P4.7

(b) 求解联系$x[n]$和$y[n]$的差分方程。你也许会发现先通过在变换域中检测输入输出关系是最容易实现这个目标的，其中每一个延迟器都用乘以z^{-1}来替换。同样，在推广到一般情况之前，先计算$N=2$，3来看看显示出来的模式。

这个例子表明了(a)中的状态空间等式，在特定的$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$和$d$(这你在那个部分可以确定出)情况下，组成了(b)中的差分方程的一组可能的状态空间表示。因此，如果给你一个(b)中的差分方程并且让你去找到一个可能的状态空间表示或者实现它，就是你现在需要回答的了。

4.8 (a) 当输入$x[n]$保持一个非零常数值$\bar{x}$，找出以下DT二阶系统的可能平衡状态(也就是说，找到状态变量可能的平衡值$\bar{q}_1$和$\bar{q}_2$)：

$$q_1[n+1]=(q_1[n])^2x[n]$$
$$q_2[n+1]=q_1[n]$$

(b) 如果在(a)中做正确了，你应该会发现有两个可能的平衡状态。一个在状态空间的原点。在这一部分，感兴趣的是另外一个非零的平衡状态。

使用符号$\widetilde{q}_i[n]=q_i[n]-\bar{q}_i$，其中$i=1$，2，相似的，$\widetilde{x}[n]=x[n]-\bar{x}$，以得到一个从非零平衡状态控制的小扰动的线性化状态空间模型。

4.9 下面一对DT差分方程已经用于作为某些类型人口增长的模型：

$$p[n+1]=q[n]$$
$$q[n+1]=\mu q[n](1-p[n]),\quad \mu>0$$

这种模型是状态空间形式。

(a) 这是线性系统吗？是时不变的吗？

(b) 找到此模型的平衡点，即，$p[n]$与$q[n]$的值$\bar{p}$和$\bar{q}$，各自令$p[n+1]=p[n]=\bar{p}$和$q[n+1]=q[n]=\bar{q}$。

(c) 假设$p[0]=q[0]=\frac{1}{2}$，计算并绘出状态向量$(p[n],q[n])$，且$0\leqslant n\leqslant 500$，$\mu=1.8$，1.9，2.0，2.1和2.2(5个间断点)。描述当n增长时，每个μ值所对应的状态轨迹。

4.10 考虑因果单输入、单输出L阶CT LTI状态空间系统

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t),$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

其中，输入为$x(t)$，输出为$y(t)$。

上述系统的逆系统，在一般形式中，以$y(t)$作为输入信号并产生输出信号$x(t)$。

当且仅当$d\neq 0$时，上述状态空间系统才有一个因果逆系统与之对应，并且有一个涉及同样的状态向量$\boldsymbol{q}(t)$的状态空间表示，但是输入是$y(t)$，输出是$x(t)$。假设$d\neq 0$，确定这个状态空间表示，即根据$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$和$d$，在下面的状态空间表示中求出量$\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{b}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{c}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{T}}$和$d_{\mathrm{in}}$。

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}_{\mathrm{in}}y(t),$$
$$x(t)=\boldsymbol{c}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+d_{\mathrm{in}}y(t)$$

高级习题

4.11 (a) 考虑LTI微分方程

$$w^{(n)}(t)+a_{n-1}w^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0w(t)=x(t)$$

如果定义$q_i(t)=w^{(i-1)}(t)$，那么能得到一个n阶的状态空间形式的表示

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

其中，向量$\boldsymbol{q}(t)$的第i项为$q_i(t)$，$\dot{\boldsymbol{q}}(t)$的第i项为$\dot{q}_i(t)$。求出矩阵$\boldsymbol{A}$和向量$\boldsymbol{b}$。

(b) 定义

$$y(t)=b_{n-1}w^{(n-1)}(t)+\cdots+b_0w(t)$$

由于微分方程(a)是LTI的，令

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=b_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\cdots+b_0x(t)$$

也可显示为

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

其中，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$是一个你需要求出的行向量。

先前的研究建立起了状态演化和已经定义的输出方程，联合在(a)和(b)中的特定量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，能够构建一个可能的状态空间，表示为在(b)中给出的n阶微分方程。

4.12 考虑LTI差分方程

$$y[k]+a_{n-1}y[k-1]+\cdots+a_0y[k-n]=b_{n-1}x[k-1]+\cdots+b_0x[k-n]$$

将它写成状态空间形式

$$\boldsymbol{q}[k+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{b}x[k]$$
$$y[k]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[k]$$

通过定义状态变量

$$q_1[k]=-a_0y[k-1]+b_0x[k-1]$$
$$q_2[k]=-a_1y[k-1]+b_1x[k-1]+q_1[k-1]$$
$$\vdots$$
$$q_{n-1}[k]=-a_{n-2}y[k-1]+b_{n-2}x[k-1]+q_{n-2}[k-1]$$
$$q_n[k]=y[k]$$

求出矩阵$\boldsymbol{A}$和向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$。

4.13 考虑一个输入为$x(t)$，输出为$y(t)$的因果CT系统，它由两个因果CT系统级联而成，如图P4.13所示。

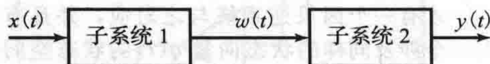


图 P4.13

中间变量$w(t)$通过微分方程与系统输入$x(t)$相关

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}+w(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\gamma x(t)$$

其中，γ是一个实参量。系统的输出$y(t)$通过微分方程与中间变量$w(t)$相关

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}-\varepsilon w(t)=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

其中，ε是另一个实参量。

(a) 若你的朋友Esmeralda、Faustus、Gayatri各自提议了3个向量，以作为此系统的状态模型中的状态向量$\boldsymbol{q}(t)$的候选。即，此模型形式

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t),x(t)),$$
$$y(t)=g(\boldsymbol{q}(t),x(t))$$

这3个候选为

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}}(t)=\begin{bmatrix}w(t)\\y(t)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{F}}(t)=\begin{bmatrix}w(t)-x(t)\\y(t)-w(t)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{G}}(t)=\begin{bmatrix}x(t)-y(t)\\y(t)-w(t)+1\end{bmatrix}$$

这3个候选中的哪一个能够实际作为系统的状态向量？(至少它们中有一个能够很好地起作用，但是你需要测试出是否不止一个能够很好地起作用。)简单地阐述一下选择一个或多个有效状态向量的理由。

(b) 只有一个候选状态向量能从(a)中产生此系统的一个LTI状态空间模型，其标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

求出候选状态向量是这3个中的哪一个，并完全指定出$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$和$d$的对应项(可能作为函数的参数$\gamma$和$\varepsilon$)

4.14 大量的重要生化反应涉及4个化学种类，其各自的浓度为$q_i(t)\geqslant 0$，i=1，2，3，4，根据质量作用定理，它们的相互作用大致受下面的以$x(t)$为输入、$y(t)$为输出的状态空间模型的控制。

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=-k_fq_1(t)q_2(t)+k_rq_3(t)+x(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=-k_fq_1(t)q_2(t)+(k_r+k_c)q_3(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t}=k_fq_1(t)q_2(t)-(k_r+k_c)q_3(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q_4(t)}{\mathrm{d}t}=k_cq_3(t)$$
$$y(t)=q_4(t)$$

最著名的例子涉及一个基质(种类1，通常表示为S)到一种酶(种类2，或E)的结合，然后形成一个复杂化合物(种类3，或者ES)，此复杂物之后会转化成产物(种类4，或P)和这种酶。净效应是指基质到产物的转换，其中酶作为此转换的催化剂，且不会消耗或者增加。k_f、k_r和k_c量表示反应速度，若温度保持恒定，那么这些量也为常数。在这种情况下，输入$x(t)\geqslant 0$表示添加基质的速率。

(a) 假定温度保持恒定，此模型是时不变还是时变的？是线性还是非线性的？

(b) 令$q_2(t)+q_3(t)$保持在其的初值$q_2(0)+q_3(0)$常量上。在上述的特定例子中，此和式是指所有酶的浓度，因此，这个结

果展示了酶是不会消耗和产生的，它仅仅催化反应的进行。

假设这个问题剩下的是当$\overline{x}\geqslant 0$时$x(t)$在某些值上是固定的。

(c) 当$\overline{x}=0$时，如果$q_2(t)+q_3(t)=E_0>0$，状态变量的平衡值为多少？

(d) 当$\overline{x}>0$时，整个系统可能没有平衡值，但前 3 个状态变量在此种情况下有常数值，依据$\overline{x}$和速率常量描述这 3 个常数值，并求出$y(t)$的增长速率（$y(t)$是上述例子中的产物 P)。

(e) 针对速率参数，输入值$\overline{x}$和初始条件的各种选择，在数值上对系统行为进行研究。

扩展习题

4.15 考虑 DT LTI 二阶模型

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix}}_{q[n+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}}_{q[n]} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b} x[n]$$

$$y[n] = \underbrace{[1 \quad 0]}_{c^{\mathrm{T}}} q[n]$$

(a) 通过使得状态空间模型中的关系具体化，找到一个关于输入$x[n]$与输出$y[n]$的二阶差分方程。

(b) 让$Q_1(z)$、$Q_2(z)$、$X(z)$和$Y(z)$各自表示单边z变换的$q_1[n]$、$q_2[n]$、$x[n]$和$y[n]$，其中信号$v[n]$的单边z变换定义为

$$V(z)=\sum_{n=0}^{\infty} v[n]z^{-n}$$

验证时移信号$v[n+1]$的单边z变换为

$$zV(z)-zv[0]$$

(c) 将(b)中的结果应用到状态空间模型，并验证

$$\boldsymbol{Q}(z)=\begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \end{bmatrix} = (z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}X(z) + z(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}[0]$$

$$Y(z)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(z)$$

然后，根据$H(z)$的$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，当$\boldsymbol{q}[0]=0$时，找到将$X(z)$转换为$Y(z)$的传递函数表达式。

(d) 根据a_1、a_2、b_1和b_2估计你在(c)中得到的表达式$H(z)$，并验证它与你在(a)中得到的差分方程是否一致。

4.16 接下来的单个 DT 状态空间方程力图描绘出两种相互作用的动物种群，在季节转换时候的种群密度的变化。其中一类（捕食者）以另一类（被捕食者）为食。典型的例子便是加拿大的山猫和雪兔。用$\ell[n]$和$r[n]$分别表示在季节n的种群密度，此模型为

$$\ell[n+1]=(1-d)\ell[n]+\mu\ell[n]r[n]$$

$$r[n+1]=(1+b)r[n]-v\ell[n]r[n]-\beta x[n]$$

其中，$0<d<1$表示当缺少雪兔时，山猫的种群衰减率，$b>0$表示缺少山猫时，雪兔的种群增长率。耦合系数$\mu>0$以及$v>0$各自决定了在两种物种相互作用下，山猫的优势和兔子种群的危险，并假定这些相互作用的发生与种群密度的乘积成比例关系。系数$\beta>0$决定了外部控制作用的效果，并以输入$x[n]$表现，旨在限制雪兔的数量。

(a) 当$x[n]$固定在值$\overline{x}$时，计算这个模型的两个平衡点。考虑一个平衡点作为初始状态，$\ell[0]=\overline{\ell}$并且$r[0]=\overline{r}$，当$n>0$时，系统状态不会发生移动。

(b) 对于每一个平衡点$\overline{\ell}$和$\overline{r}$，计算关联的线性化的（并且是 LTI DT 状态空间）模型，该模型能近似描述物种数量密度与这个平衡点的小偏离均为$\widetilde{\ell}[0]=\ell[n]-\widetilde{\ell}$和$\widetilde{r}[0]=r[n]-\overline{r}$。假设在高阶项都是可以忽略不计的情况下，线性化模型保持从平衡状态处的一阶偏离，这样，乘积项$\widetilde{\ell}[n]\widetilde{r}[n]$可以被忽略不计。

用以下形式写出你的线性化模型

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\ell}[n+1] \\ \widetilde{r}[1+1] \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \widetilde{\ell}[n] \\ \widetilde{r}[n] \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}$是一个2×2的矩阵。对于每一个不同的平衡值点，通常你将得到不同的$\boldsymbol{A}$。

(c) 现在从(b)中所分析的非平凡的平衡状态附近的一些初始值$\ell[0]>0$和$r[0]>0$开始，然后使用原始非线性模型仿真并且画出 700 个时间步里$\ell[n]$和$r[n]$的轨迹。仿真时，首先固定$b=d=0.05$，$\mu=v=0.001$并且$\beta=0$，然后探索这些参数的改变对结果会有怎样的影响。

4.17 (a) 通过仿真验证例 4.3 中的病毒传播情况，当免疫率下降到$x[n]=0.2$，而其他所有参数保持不变时，稳定状态会发生什么。画出跟图 4.3 类似的图形。

(b) 核实(a)中的仿真实际能够解决导致例 4.8 中的地方病平衡状态的计算问题。

(c) 对于你在(a)中使用的参数值，计算式(4.105)给定的矩阵$\boldsymbol{A}_{\mathrm{EE}}$，控制从地方病平衡状态的小偏差，并且计算矩阵的特征值和相关的特征向量。

165 ~ 173

第5章

LTI状态空间模型

第4章介绍了因果动态系统的状态空间模型。这些模型的状态演化特性允许系统使用数值方式的解决方案，从而得到系统从某个给定的初始状态开始在时间上不断向前演化，这些初始状态提供了从初始时刻开始的系统输入。这就产生了跟特定初始状态和输入相关的全部状态轨迹。对于非线性模型，不能在总体上给出广泛的定性结论，例如，当输入的模值有界时，空间轨迹是否必然总是限定在状态空间的某些有限区域内。然而，对于线性时不变(LTI)系统，无论是在离散时间还是连续时间上，对其结构和行为都可以进行细致的和概括性的分析。本章致力于对LTI状态空间模型的分析。从研究LTI系统过程中衍生出来的结论和分析工具，既是工程系统中各种模块和组件设计的强大基础，也能对非线性时不变系统在平衡点附近的小扰动特性进行分析。

5.1 连续时间和离散时间LTI模型

本章仅限于讨论单输入单输出的L阶连续时间(CT)LTI状态空间模型，如式(5.1)和式(5.2)所示

$$\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt}=\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{5.1}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{d}x(t) \tag{5.2}$$

或者离散时间(DT)LTI状态空间模型，如式(5.3)和式(5.4)所示

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n] \tag{5.3}$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n] \tag{5.4}$$

式(5.1)将CT LTI系统的动态行为表示为$\boldsymbol{q}(t)$中L个变量的一组耦合的、一阶的、线性的、常系数的差分方程，$\boldsymbol{q}(t)$由输入$x(t)$驱动。符号$\dot{\boldsymbol{q}}(t)$表示$\boldsymbol{q}(t)$分量形式的导数，其i阶分量是$\dot{q}_i(t)$。式(5.3)用耦合一阶差分方程为DT LTI系统的动态行为提供了类似的描述

求解LTI模型

确定LTI状态空间模型的通解过程，也是求解具有一个变量的线性常系数差分或者微分方程的过程。通解可以写成齐次解与系统特解的和，其中齐次解就是非受迫或者零输入情况下的解。在状态空间模型中，通常最感兴趣的齐次或者零输入响应(ZIR)是在某个起始时刻的特定非零初始状态下的响应，而在这个起始时刻及其之后的输入都为零。ZIR将在5.2节进行探讨。5.3节用ZIR和一个特定的特解的和描述了全解，这里的零状态响应(ZSR)是当初始状态为零时，由非零输入引起的。理解了初始时刻以来的ZIR和ZIR+ZSR的全解，就能够深入了解系统的稳定性，并且也能理解系统内部行为如何与系统的输入输出特性相联系。

表达式(5.1)～(5.4)所表示的CT和DT LTI状态空间模型由相关的矩阵$\boldsymbol{A}$、向量$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$、标量$d$完整地确定。它们各自的状态由向量$\boldsymbol{q}(t)$或$\boldsymbol{q}[n]$所体现。因此，对这些模型的分析涉及向量和矩阵的符号与运算，以及一些相关的线性代数知识。为了进行分析，下面的小节将先简要概述所需要的符号和因式。

向量和矩阵运算

这里假设读者已经熟悉了向量空间的概念，在向量空间里，向量加法和标量乘法的相关运算将再次生成这个空间里的向量。L个实数的行或列数组对应于一个L维实欧几里得

空间里的一个点或者一个向量，通常情况下，在二维和三维空间上表示为一个从原点到特定点的箭头。跟这个图形描述相关的两个向量的求和运算使用的是平行四边形法则，这个法则简单对应于相关数组的分量形式的加法。类似的，标量乘法仅是对数组进行比例缩放，也就是说，由给出的标量乘以数组的每一个分量。 175

这里考虑复数欧几里得空间是很有必要的，至少在涉及复特征值运算的中间阶段时是需要的。这种情况下的向量是 L 个复数的列或行数组，且标量也是复数。然而，在本书所涉及的场景中，并不需要特别考虑从实数欧几里得空间到复数欧几里得空间的扩展。正如实数情况下的代数运算扩展到复数情况时，会存在一些明显的修正。另外，在各种应用场景中，所得到的最终答案都能基于实数欧几里得向量的图形化形式书写和表达出来，这是因为在感兴趣的问题中，复数特征值都是以复共轭对的形式出现的。这样，通常就能依靠上下文内容弄清楚所处理的是实数的还是复数的向量和标量。

向量 $\boldsymbol{v}_1$，…，$\boldsymbol{v}_k$ 的集合表示了通过加权和或者线性组合的形式得到的所有向量，如 $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{v}_k$，其中 a_1，…，a_k 是任意的标量，$\alpha_i\boldsymbol{v}_i$ 表示标量乘以一个向量，“+”表示向量加法。在这个范围内的向量自己形成了一个向量空间，因此通常更倾向于将 $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{v}_k$ 作为由向量 $\boldsymbol{v}_1$，…，$\boldsymbol{v}_k$ 组成的向量空间范围。

在一个向量组里，如果没有一个向量能够表示为其他向量的加权和，这组向量就被称为独立向量。在一个向量空间里，能够形成独立向量集合的最大向量数就构成了这个向量空间的维度。这些独立向量构成的集合称为最大独立集。在一个二维平面上，任意两个向量被认为是独立的，当且仅当其中一个向量不能表示为另一个向量与标量的乘积时；在二维空间里，任意三个向量都是相关的，也就是说，不是独立的。在三维空间里，将由两个独立向量组成空间，其本身就是一个二维空间——一个通过原点的平面——嵌入到更大空间里，这也是一个子空间的例子，或者是由它本身形成的向量空间的一个子集合。尽管在前几章遇到过重要的无限维度向量空间，最明显的是 ℓ^2DT 信号空间，但是对于向量空间的应用还是将被限制在有限维度空间里。

在一个向量空间里，最大独立集的向量构成了这个空间的基础集，也就是说，在这个空间里的其他向量都可以写作基础集中的向量的加权和，并且这些权重值是唯一确定的。虽然这里省略了对上述声明的直接证明过程，但是这仍然是一个很重要的结论，并且下面章节将反复应用到。

另外，这里还需要用到矩阵运算的基础知识。一个矩阵通常可以看成标量的矩形数组，但是更实用的看法是，将矩阵作为列向量肩并肩排列起来的一个数组。因此，$L\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可以看成

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{p}_k] \tag{5.5}$$

矩阵 $\boldsymbol{P}$ 里，第 i 列 $\boldsymbol{p}_i$ 是一个在 L 维度空间里的列向量。在这里，矩阵向量乘积 $\boldsymbol{Pw}$ 可以解释为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量的加权线性组合，权重由向量 $\boldsymbol{w}$ 的相应项所给出 176

$$\boldsymbol{Pw}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{p}_k]\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_k\end{bmatrix}=\sum_1^k \boldsymbol{p}_i w_i \tag{5.6}$$

这样的解释将会被反复使用。正如 $\boldsymbol{w}$ 有各种可能性，形如 $\boldsymbol{Pw}$ 的向量集也是一个向量空间，该空间指明了矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的范围。范围的维度称为矩阵的秩。

通常，将矩阵看作行向量从上到下一个接一个排列起来的数组，或者简单地作为向量或矩阵映射为其他向量或矩阵的一种运算，也是很有用的。这里也假设读者已经熟悉了一个方阵的行列式和其逆的计算与使用，至少对 2×2 或者 3×3 的矩阵是熟悉的。在本章的后面几个例子会说明这些计算。

最后，L 维空间中 L 维列向量(或者行向量)的独立性可以通过 $L\times L$ 矩阵的形式来进

行测试，该矩阵的列(或行)就是这些向量，然后计算这个矩阵的行列式。当且仅当这个行列式非零时，这些向量是独立的。

5.2 零输入响应和模态表示

5.2.1 未驱动的CT系统

这里从一个CT LTI状态空间模型的例子开始。为了表示方便，考虑分析的初始时刻，或者说初始时刻设置为$t=0$。当处理的是时不变系统时，这样做不失一般性。如果初始时刻是实际上的其他时刻t_0，那么也只需要考虑初始时刻之后过去了的时间是$t-t_0$，而不是t。

考虑对应于式(5.1)的未驱动系统的响应，即在$t\geqslant 0$时，$x(t)=0$情况下的响应，但是这种情况下可能存在非零初始条件$\boldsymbol{q}(0)$。式(5.7)是系统的ZIR，而且是一个未驱动(非受迫或齐次)系统的解：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) \tag{5.7}$$

CT指数解和模式

当分析未驱动LTI系统时，寻找一个指数形式的解是非常自然的。这是因为未驱动LTI系统的解一定具有移不变和比例缩放的特性，而指数具有的独特性质，即在时间上的移动等于在幅度上的比例缩放。基于此，需要找的一个非零解的形式是

177

$$\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t},\quad \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0} \tag{5.8}$$

这里，每一个状态变量都是一个标量乘以相同的指数$\mathrm{e}^{\lambda t}$，这些标量乘法被组合到向量$\boldsymbol{v}$中。式(5.8)粗黑体字“$\boldsymbol{0}$”表示L个元素的列向量中的项全是0。$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$表示至少$\boldsymbol{v}$中有一个元素是非0的。

将式(5.8)带入式(5.7)中，可以得到下面的关系式：

$$\lambda\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.9}$$

从上式中可知，向量$\boldsymbol{v}$和标量λ必须满足

$$\lambda\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\quad \text{或者等价于} \tag{5.10}$$

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0} \tag{5.11}$$

这里，在$L\times L$矩阵情况下，$\boldsymbol{I}$表示单位矩阵。单位矩阵在对角线位置上(也就是行标等于列标的位置上)全是1，非对角线的位置上全是0。因此$\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$对所有向量$\boldsymbol{v}$都成立。这个矩阵被式(5.11)引入，这是因为$L\times L$矩阵$\boldsymbol{A}$只能从$L\times L$矩阵中减去，而不能从标量$\lambda$中减去。

式(5.11)要求矩阵$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$的列向量的非零加权线性组合加起来等于零向量，这里的权重都是向量$\boldsymbol{v}$中的项。换句话说，λ必须使得矩阵$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$的列向量相关。正如前面提到的，方阵列向量相关性的一个简单分析测试就是矩阵的行列式为0：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \tag{5.12}$$

对于L阶系统，前面的多项式总是一个具有λ的L次方首一多项式(monic polynomial)(即λ的L次方的项的系数为1，首一多项式就是首项系数为1的多项式)，该多项式称为这个系统或者矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=a(\lambda)=\lambda^L+a_{L-1}\lambda^{L-1}+\cdots+a_0 \tag{5.13}$$

(“首一”这个标签表明最高次方的系数为1。)这符合式(5.8)假设的指数形式解$\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\lambda t}$是未驱动系统的非零解，其条件为当且仅当$\lambda$是特征多项式$L$个根$\{\lambda_i\}_{i=1}^{L}$中的一个。这些根称为系统的特征根或者自然频率，也可以称为矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值。

式(5.8)中的向量$\boldsymbol{v}$对应于式(5.14)中系统的非零解$\boldsymbol{v}_i$

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}_i\neq\boldsymbol{0} \tag{5.14}$$

向量$\boldsymbol{v}$也称为与λ_i相关的特征向量。值得注意的是，对于相同的特征值，由一个非零标量乘以任何一个特征向量又能产生一个特征向量。因此特征向量仅仅取决于非零缩放

178

比例，而且任何方便的非零缩放比例或者归一化都可以被使用。因此，这是一个由表征系统的特征向量所组成的一维空间(或者是过原点的直线)，而不仅仅表示特征向量本身。

总的来说，当且仅当 λ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时，未驱动系统有一个指数形式的解 $\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$，且非零向量 $\boldsymbol{v}$ 和特征值相关。

这里只考虑实系数的状态空间模型，即这些模型里所有信号和系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 和 d 的都是实数(尽管随后这些模型会转换成前一章出现的对角形式，也许会出现复数项，但是也是以非常结构化的形式表示出来)。系数 $\{a_i\}$ 定义了式(5.13)中的特征多项式 $a(\lambda)$ 是实值的，因此这个多项式的复数根会以共轭对的形式成对出现。如果 $\boldsymbol{v}_i$ 是与一个复特征根 λ_i 相关的特征向量，那么 $\boldsymbol{v}_i^*$——这个向量的项与对应的向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的项是复共轭的——是一个与 λ_i^* 相关的特征向量，λ_i^* 是 λ_i 的复共轭。这可以通过对式(5.10)两边取共轭的方法进行验证，当 $\lambda=\lambda_i$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_i$ 时，且 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，可以得到 $\lambda_i^*\boldsymbol{v}_i^*=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i^*$。

例 5.1 线性化单摆模型的特征值和特征向量

对于第4章中例4.1、例4.5、例4.9、例4.11引入的倒立摆，考虑了完全倒立和静止两种平衡位置下的小偏差所产生的未驱动LTI模型，并假设采用和例4.5一样的模型参数值：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t) \tag{5.15}$$

回忆一下，第一状态变量表示顺时针方向离垂直方向的角度误差，而第二状态变量表示顺时针方向角速度。只要都保持在非常接近于0的平衡值，那么线性化的模型就近似描述了这些参数的时间演化情况。

为了确定ZIR，需要得到矩阵的特征值和特征向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

因此，开始计算其特征多项式：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -8 & \lambda+2\end{bmatrix}=\lambda(\lambda+2)-(-8)\times(-1)$$

$$=\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda-2)(\lambda+4) \tag{5.17}$$

在行列式计算中，使用由式(5.18)给出的任意2×2矩阵行列式

$$\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=ad-bc \tag{5.18}$$

179

特征多项式的根是 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=-4$。为了确定 $\boldsymbol{v}_1$，需要找到式(5.19)的一个非零解

$$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{5.19}$$

由于特征向量仅仅取决于非零的缩放因子，所以可取 $v_{11}=1$，只要不是0就行，然后求出 v_{21}。如果非零 v_{11} 的假设不合理，那么，就会发现不能求出满足上面等式对的 v_{21}，然后就可以在取 $v_{11}=0$ 的情况下，再求解 v_{21}。在当前的例子中，令式(5.19)中的 $v_{11}=1$，求出 $v_{21}=2$ 能都满足这两个等式。因此

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

对于高阶情况，要求解特征向量剩下的 $L-1$ 个元素，更高阶的系统需要更系统性地求解 $L-1$ 个线性方程。

为了求出和 $\lambda_2=-4$ 有联系的特征向量 $\boldsymbol{v}_2$，对应的方程是

$$(\lambda_2 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -8 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{5.21}$$

再次取 $v_{12}=1$，求出 $v_{22}=-4$，因此

$$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix} \tag{5.22}$$

假设用一般的悬挂位置作为感兴趣的平衡位置，而不是采用倒立的位置。那么线性化的模型就会用 -8 代替式(5.16)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的8。可得矩阵

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -2\end{bmatrix} \tag{5.23}$$

那么矩阵的特征值就是式(5.24)的根

$$\lambda^2+2\lambda+8=(\lambda+1)^2+7 \tag{5.24}$$

也就是 $\lambda_1=-1+\mathrm{j}\sqrt{7}$，$\lambda_2=\lambda_1^*=-1-\mathrm{j}\sqrt{7}$。像前面一样计算出特征向量，进行适当的修改，就能发现

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1+\mathrm{j}\sqrt{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\mathrm{j}\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{7}\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}+\mathrm{j}\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1^*=\boldsymbol{u}-\mathrm{j}\boldsymbol{w} \tag{5.25}$$

这里，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别是向量 $\boldsymbol{v}_1$ 的实部和虚部。◀

当计算 3×3 矩阵的特征值时，下式所表示的 3×3 矩阵的行列式是很有帮助的

$$\det\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=(aei+bfg+cdh)-(gec+dbi+ahf) \tag{5.26}$$

一个普通且很有用的结论：上三角矩阵的特征值就是矩阵对角线上的元素，这里所谓的上三角矩阵是指所有非零项在对角线和对角线以上的矩阵。这条结论对下三角矩阵同样适用，也适用于对角矩阵(所有非零项全在对角线上的矩阵)。这些结论可以从以下事实中获得：如果 $\boldsymbol{A}$ 是上述类型的矩阵，那么 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式就可以简单地表示为矩阵对角线上的乘积。

180

式(5.8)的单指数形式的一个非零解是 $\lambda=\lambda_i$ 和 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_i$，称为式(5.7)中未驱动系统的第 i 个模式。相关的 λ_i——已经求出的一个特征频率或者自然频率——称为第 i 个波模频率或者模态频率，$\boldsymbol{v}_i$ 称为第 i 个振型或者模态振型，这是因为它的不同项值是与模式中不同状态变量的活跃程度成比例的。

值得注意的是，如果这个解正好是第 i 个模式

$$\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{v}_i e^{\lambda_i t} \tag{5.27}$$

那么对应的初始条件就是 $\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{v}_i$。它遵循状态演化的特性——应用于特定的零输入情况——对于初始条件 $\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{v}_i$，仅有第 i 个模式被激活。因此，为了仅仅激活一个单一模式，初始条件必须和特征向量相关，或者等价于，必须存在由特征向量定义的一维特征空间。

也可证明，和相异特征值对应的特征向量是线性独立的，也就是说，它们之中没有任何一个向量能写成剩余向量的线性组合。为简单起见，这里所有的讨论仅限于 $\boldsymbol{A}$ 的所有 L 个特征值都是独立的。这就能保证 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，…，$\boldsymbol{v}_L$ 形成一个独立集，因此也是 L 维状态空间的一个基(在一些 $\boldsymbol{A}$ 有重复特征值的情况下，找出全部 L 个独立的特征向量也是可能的，但这种情况并不是普遍存在的)。接下来将反复用到这样的一个事实：L 维状态空间中的任何向量，如任何时刻 t 的状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$，都可以写成这个空间中的任何 L 个独立向量的唯一线性组合，例如 L 个特征向量。

CT ZIR 的模态表示

因为式(5.7)中的未驱动系统是线性的，所以对于每一个特征根 λ_i，其对应的形如

式(5.27)的模态解的加权线性组合，都将满足这个等式。因此，对于零输入响应，一个更通用的解是

$$\boldsymbol{q}(t)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\mathrm{e}^{\lambda_i t} \tag{5.28}$$

为了验证这个表达式——对任意的权重 α_i——作为式(5.7)中的未驱动系统的一个解，将这个式子带入未驱动方程，并调用特征关系式 $\lambda_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\lambda_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}=\boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right) \tag{5.29}$$

181

式(5.28)中 $\boldsymbol{q}(t)$ 的表达式所对应的初始条件是

$$\boldsymbol{q}(0)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i\boldsymbol{v}_i \tag{5.30}$$

在相异特征值的假设下，由于 L 个特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 是无关的，可以通过 α_i 系数的合理选择，使得式(5.30)的右边等于任意期望的 $\boldsymbol{q}(0)$，且这些系数是唯一的。因此，通过给定式(5.7)中未驱动系统的初始条件，就能通过式(5.30)确定 α_i。一旦确定了这些系数，在相异特征值的假设条件下，式(5.28)就成了式(5.7)所表示的未驱动系统在 ZIR 情况下的显式通解。式(5.28)中右边的表达式就可以作为 ZIR 的模态表示或者解析形式。

例 5.2　线性倒立摆模型的 ZIR

在例 5.1 中，计算了关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量和特征值，该矩阵控制了倒立摆基于其倒立平衡位置的小摆动。未驱动 LTI 模型的两个模式的形式为 $\boldsymbol{v}_1\mathrm{e}^{2t}$ 和 $\boldsymbol{v}_2\mathrm{e}^{-4t}$。因此，可以分别看出，一个在幅度上呈现指数式增加，另一个在幅度上呈现指数式衰减。构建 ZIR 所需要的特定组合是由初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$ 决定的。

假设初始位置是 $q_1(0)=1.1$(选择合适的单位)，初始速度 $q_2(0)=-4$，为了确定初始条件对两个模式的激活程度，解出式(5.30)的 α_1 和 α_2，需要首先确定合适的数值代入：

$$\boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix}1.1\\-4\end{bmatrix}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} \tag{5.31}$$

解出这两个联立方程的两个未知数，可得 $\alpha_1=\frac{1}{15}$，$\alpha_2=\frac{31}{30}$。因此，由初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$ 初始化所得的 ZIR 就是

$$\boldsymbol{q}(t)=\alpha_1\boldsymbol{v}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\alpha_2\boldsymbol{v}_2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}+\frac{31}{30}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-4t} \tag{5.32}$$

在 LTI 模型中会得到这样一个解，其中的位置和速度最终均在幅度上呈现指数式的增长。然而，当位置和速度变得足够大时，也就是足够远离其平衡位置时，线性化的 LTI 模型行为就不再是非线性倒立摆模型的小信号行为的一个好的近似。

模态解的图形化描述具有启示意义。图 5.1 表示了具有两个坐标 q_1 和 q_2 的状态空间，也称为二阶系统中的相平面。特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 表示为一个从原点指向合适点的箭头。上述描述的解对应于图中最右边的轨迹。初始条件沿着 $\boldsymbol{v}_2$ 向量有较大的分量，沿着 $\boldsymbol{v}_1$ 向量有一个较小的分量。这些分量可以在图形上以平行四边形法则构造出来。然而，在 $\boldsymbol{v}_2$ 上的分量随

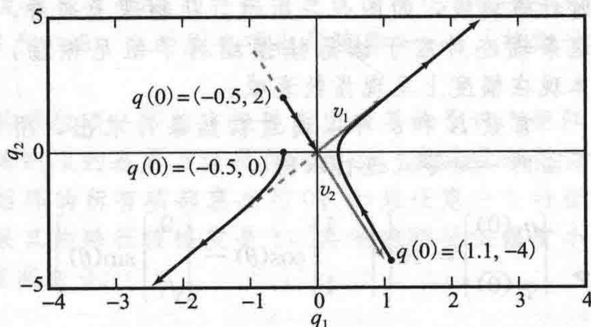


图 5.1　对于例 5.2 中线性化倒立摆模型的三个不同初始条件，在相平面上的 ZIR 的模态分解

182

着时间以 e^{-4t} 衰减，在 $\boldsymbol{v}_1$ 上的分量随着时间以 e^{2t} 增长。在 $t=1$ 附近，对应于相关指数的四倍常量，沿 $\boldsymbol{v}_2$ 方向的分量是可以忽略不计的，因此实际的运动是沿 $\boldsymbol{v}_1$ 方向的向外指数运动。

为了只激活模型的稳定模式，对于一些非零权重因子 α_2 来说，就需要初始条件具有 $\boldsymbol{q}(0)=\alpha_2\boldsymbol{v}_2$ 的形式，这样系统随后的运动就是 $\alpha_2\boldsymbol{v}_2e^{-4t}$。图 5.1 显示了一条对应于这样初始条件的轨迹，其中 $\alpha_2=-0.5$，初始角位置是 $q_1(0)=-0.5$，初始角速度 $q_2(0)=-2$。系统在角位置和角速度上的运动中都呈现指数衰减到 0 的情况，衰减系数是 e^{-4t}。因此，摆的运动呈现指数收敛，最终停在倒立位置上。

图 5.1 中的第 3 条轨迹显示倒立摆从停止处开始，因此 $q_2(0)=0$，初始位置 $q_1(0)=-0.5$，分解这个初始条件到各个特征向量的各个分量上，一个分量在幅度上以 e^{-4t} 衰减，另一个以 e^{2t} 在增长。当 $t=1$ 时，运动本质上是求指数向外的运动，这一次沿 $-\boldsymbol{v}_1$ 的方向。◀

CT 中的复模式对

例 5.2 中的特征值都是实数。一对复共轭特征值 λ_i 和 λ_i^* 对模态分解的贡献可以写为如下实数项的形式

$$\alpha_i\boldsymbol{v}_ie^{\lambda_i t}+\alpha_i^*\boldsymbol{v}_i^*e^{\lambda_i^* t} \tag{5.33}$$

记 $\lambda_i=\sigma_i+j\omega_i$，因此 σ_i 是特征值的实部，ω_i 是虚部，类似的有 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{u}_i+j\boldsymbol{w}_i$，一种代数形式表示如下：

183

$$\alpha_i\boldsymbol{v}_ie^{\lambda_i t}+\alpha_i^*\boldsymbol{v}_i^*e^{\lambda_i^* t}=K_ie^{\sigma_i t}[\boldsymbol{u}_i\cos(\omega_i t+\theta_i)-\boldsymbol{w}_i\sin(\omega_i t+\theta_i)] \tag{5.34}$$

常数 K_i 和 θ_i 在对式(5.30)两边进行匹配的过程中，能够由初始条件确定。因此，对模态解的上述贡献存在于由特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的实部 $\boldsymbol{u}_i$ 和虚部 $\boldsymbol{w}_i$ 组成的平面内。平面上的相关运动呈现指数螺旋，螺旋增长或衰减取决于 $\sigma_i=\mathrm{Re}\{\lambda_i\}$ 是正的还是负的，相应的特征根 λ_i 存在于右半开平面或者左半开平面。如果 $\sigma_i=0$，就说明这对复共轭特征值对存在于虚轴上，螺旋线退化成闭环线。螺旋线的转速取决于 $\omega_i=\mathrm{Im}\{\lambda_i\}$。

例 5.3 线性悬挂摆模型的 ZIR

回到关于正常悬挂位置附近的线性摆模型，如例 5.1 所示，可以发现特征值是

$$\lambda_1=-1+j\sqrt{7}=\lambda_2^*$$

相应的特征向量是

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+j\begin{bmatrix}0\\\sqrt{7}\end{bmatrix}=\boldsymbol{u}+j\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}_2^*$$

把这个结果直接应用到式(5.34)中，则这个例子中的系统 ZIR 是

$$\begin{bmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{bmatrix}=Ke^{-t}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\sqrt{7}t+\theta)-\begin{bmatrix}0\\\sqrt{7}\end{bmatrix}\sin(\sqrt{7}t+\theta)\right) \tag{5.35}$$

在相平面上，这个 ZIR 对应于一条收缩的顺时针螺旋线，如图 5.2 所示。从物理上来看，这条轨迹对应于该悬挂摆经过了阻尼振荡，体现在幅度上呈现指数衰减。

常数 K 和 θ 可以通过初始条件求出，用下面的一对等式进行求解。

$$\begin{bmatrix}q_1(0)\\q_2(0)\end{bmatrix}=K\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\theta)-\begin{bmatrix}0\\\sqrt{7}\end{bmatrix}\sin(\theta)\right) \tag{5.36}$$

◀

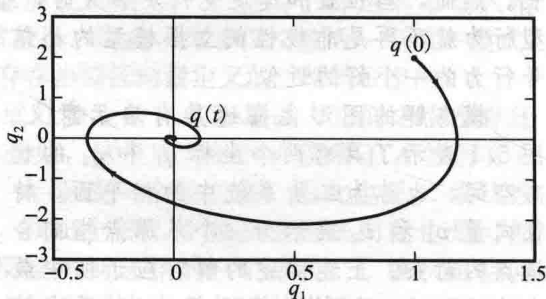


图 5.2 对于例 5.3 中摆围绕普通悬挂位置的 ZIR 的相平面

184

5.2.2 未驱动的 DT 系统

对于式(5.3)中 DT 情况下的系统 ZIR，可以运用上述类似方法进行推导，也就是说，未驱动系统的解可以写为

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] \tag{5.37}$$

与 CT 情况的一个区别是，DT 系统的 ZIR 轨迹在状态空间上组成了一个离散点的序列，而不是一条连续的轨迹。另外一个区别是式(5.37)很容易从 0 时刻向前步进，从而得到显式解

$$\boldsymbol{q}[n]=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0] \tag{5.38}$$

然而，随着时间的变化，除非已经了解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的项与矩阵 $\boldsymbol{A}^n$ 的项之间的联系，否则对于随时间变化的状态轨迹的定性行为，这个表达式并不能传达出太多信息。

例 5.4 随 n 增加的 A^n 项

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的 n 次幂矩阵 $\boldsymbol{A}^n$ 的项之间并不是直接相关的。在这里特征值起到了关键的作用。考虑下面这个例子：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0.6 & 0.6\\0.6 & 0.6\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}101 & 100\\-101 & -100\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}100.5 & 100\\-100.5 & -100\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0.6 & 100\\0 & 0.5\end{bmatrix} \tag{5.39}$$

所有四个矩阵都有着特殊的结构，每一个都可以很容易写出它的 n 次幂矩阵的表达式。矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的所有项在幅度上的数值都小于 1，然而它的 n 次幂矩阵($n>1$)是

$$\boldsymbol{A}_1^n=(1.2)^n\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.5 & 0.5\end{bmatrix} \tag{5.40}$$

$\boldsymbol{A}_1^n$ 的所有项随着 n 的增大呈现指数式增加。这个行为是因为矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值是 1.2 和 0，在另一方面，尽管 $\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$、$\boldsymbol{A}_4$ 的项的数值很大，对于 $n>1$，它们各自的 n 次幂矩阵是

$$\boldsymbol{A}_2^n=\boldsymbol{A}_2$$
$$\boldsymbol{A}_3^n=(0.5)^n\begin{bmatrix}201 & 200\\-201 & -200\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_4^n=\begin{bmatrix}0.6^n & 1000\times(0.6^n-0.5^n)\\0 & 0.5^n\end{bmatrix} \tag{5.41}$$

因此，$\boldsymbol{A}_2^n$ 的特征值是 0 和 1，保持非零但是有界；$\boldsymbol{A}_3^n$ 的特征值是 0.5 和 0，它的所有项随着 $n\to\infty$，趋向于 0；$\boldsymbol{A}_4^n$ 的特征值是 0.6 和 0.5，它的所有项也是随着 $n\to\infty$，趋向于 0。

从上面观察中得出的结论是：一个矩阵的单独项并不能直接显示出太多关于这个矩阵的幂矩阵的行为信息。矩阵的特征值决定矩阵的项的幂是否以及如何增长、衰减或者保持有界。当所有特征值都有小于 1 的幅度时，矩阵的所有项都衰减到 0；如果任意一个特征值大于 1，那么这些项都呈现指数增长；如果某些特征值幅度是 1，其他的特征值幅度小于 1，那么矩阵的项的幂保持有界但都不会衰减到 0。 ◀

DT ZIR 的模态分解

式(5.38)表明矩阵 $\boldsymbol{A}^n$ 的行为决定了 DT LTI 系统的 ZIR。为了更进一步阐明这个 ZIR，再次假设 DT 情况下的一个指数解具有如下形式

185

$$q[n] = v\lambda^n, \quad v \neq 0 \tag{5.42}$$

把上式代入式(5.37)中，将产生与 CT 情况下完全相同的特征值/特征向量条件，也就是说，

$$\lambda v = Av, \quad 或者等价于 \quad (\lambda I - A)v = 0, \quad v \neq 0 \tag{5.43}$$

假设 A 有 L 个相异的特征值 λ_1，…，λ_L，保证对应的特征向量 v_1，…，v_L 是独立的。在 DT 情况下，ZIR 通解的模态分解可以采用如下的形式：

$$q[n] = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i v_i \lambda_i^n \tag{5.44}$$

这里的系数 α_i 可以由初始条件通过式(5.45)求出：

$$q[0] = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i v_i \tag{5.45}$$

DT 情况下的复模式对

如果实矩阵有一个复特征值

$$\lambda_i = \rho_i e^{j\Omega_i}, \quad \rho_i > 0, \quad 0 < \Omega_i < \pi \tag{5.46}$$

这里写成一个更适合代入 DT 情况的形式，那么这个特征值的复共轭也就是 $\lambda_i^* = \rho_i e^{-j\Omega_i}$，也是 A 的特征值。此外，如果 $v_i = u_i + jw_i$ 是 λ_i 对应的特征向量，那么它的复共轭也就是特征值 λ_i^* 所对应的特征向量。对于 ZIR，模式的这个复共轭对的贡献可以表达成基于实数项的形式：

186

$$\alpha_i v_i \lambda_i^n + \alpha_i^* v_i^* (\lambda_i^*)^n \tag{5.47}$$

运用一些代数运算，式(5.47)中的实表达式可以简化为

$$\alpha_i v_i \lambda_i^n + \alpha_i^* v_i^* (\lambda_i^*)^n = K_i \rho_i^n [u_i \cos(\Omega_i n + \theta_i) - w_i \sin(\Omega_i n + \theta_i)] \tag{5.48}$$

常数 K_i 和 θ_i 可以在对式(5.45)两端的匹配过程中，由初始条件求出。因此，这个模式对将会对 ZIR 产生振荡形式的贡献。

带有相位 $\Omega_i = \pm\pi$ 的特征值 λ_i 的情况值得特别注意。这相当于 λ_i 是一个负实数 $-\rho_i$，而不是复数值对中的一个。然而，由于 $(-\rho_i)^n$ 具有交替的符号，所以它对 ZIR 的贡献是交替振荡的。实际上，这个符号交替表明了 DT 系统具有最快速的振荡。

5.2.3 LTI 系统的渐进稳定性

如果一个 LTI 状态空间系统的 ZIR 对所有初始条件都会衰减到 0，那么这个系统称为渐进稳定或者内在稳定。有时候系统也会出现边缘稳定的情况，这时系统不是渐进稳定的，但是存在一个 ZIR 在所有初始条件下的所有时间内都保持有界。如果一个系统不是渐进稳定的，则这个系统称为不稳定。因此一个边缘稳定的系统也可以认为是不稳定的。LTI 系统的稳定性跟它的模式的行为有直接关系，而且特别地与特征频率或者自然频率 λ_i 的值有关系，这个 λ_i 是特征多项式的根。

CT 系统

对于 CT 情况，可以写成 $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$，因此 σ_i 和 ω_i 表示自然频率的实部和虚部。

$$e^{\lambda_i t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \tag{5.49}$$

式(5.49)所示的复信号在幅度上呈现指数衰减到 0，当且仅当 $\sigma_i < 0$ 时，也就是说，当且仅当 $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$ 时。式(5.28)中 ZIR 的模态分解现在表示的条件是对所有的 $1 \leqslant i \leqslant L$，$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$，这是一个 CT LTI 系统渐近稳定的充分必要条件。因此所有的自然频率必须在复平面的左半平面，即要严格位于左半平面。

一个相关联的观察点可以从 ZIR 模态分解内不同项的相对模值中获得。注意到对于足够大的时间 t，在模态分解中占主导地位的项将包含最大实部 $\sigma_{\max}$ 的特征值，其称为主特征值，如图 5.3 所示。其他的模态项跟这些特征值的相关性更小。$\sigma_{\max}$ 称为矩阵 A 的谱横坐标。现在，式(5.28)的模态分解表明，当 t 足够大时，状态轨迹 $q(t)$ 将会限制于一个空间

范围内，这个空间由对应于主特征值的特征向量组成。如果 $\sigma_{\max}=0$，系统是边缘稳定的。

如果 LTI 系统是对潜在非线性时不变系统的平衡点附近进行线性化的结果，那么这个线性化过程的渐进稳定性表明非线性系统在某种情况下是局部渐进稳定的，这个情况可以精确得到，但是这里不做详细描述。另一方面，如果这个线性化至少有一个指数增长的模式——比如在 $\sigma_{\max}>0$ 时——那么这个非线性系统是局部不稳定的。在边缘情况下，线性化不是渐进稳定的，而是不具有增长模式——当 $\sigma_{\max}=0$ 时——那么这个线性化就不包含足够的信息来得出关于非线性系统的局部行为的结论；如果需要建立局部行为，那么就需要比在线性化里保留的项更高阶的项。

187

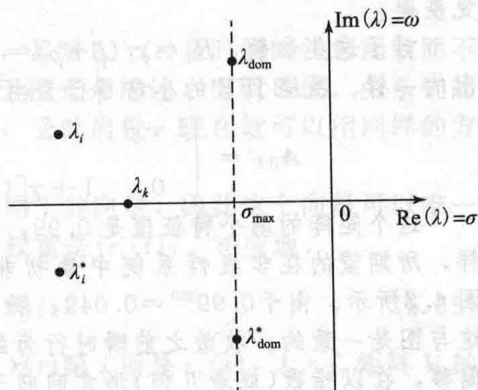


图 5.3　对于一个渐进稳定系统的主模式

例 5.1 和 5.2 中的摆的线性化模型阐述了部分的上述结果。关于倒立平衡点附近的线性模型有特征频率 2 和 -4，因此不是渐近稳定的。例 5.1 和 5.2 中的图形分析也表明 ZIR 中的主导项与特征值 2 相关，而且对于足够大的 t，状态轨迹实际上是沿着与这个主特征值对应的特征向量变化的。与此相反，一般悬挂平衡点附近的线性模型的特征频率是 $-1\pm\sqrt{7}$，因此系统是渐近稳定的。这一对复特征值一起共同构成了这种情况下的主集。

DT 系统

对于 DT 情况，可以写成 $\lambda_i=\rho_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_i}$，$\rho_i\geqslant 0$，因此 ρ_i 和 Ω_i 是自然频率的幅度 $|\lambda_i|$ 和角度 $\angle\lambda_i$，那么复信号

$$\lambda_i^n = \rho_i^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_i} \tag{5.50}$$

当且仅当 $\rho_i=|\lambda_i|<1$，幅度会衰减到 0。对于特征值等于 0 的特殊情况，在一个单步长下相关的模式就会下跌到 0。在式(5.44)中 ZIR 的模式分解表明对于所有 $1\leqslant i\leqslant L$，$|\lambda_i|<1$，这是 DT LTI 系统渐进稳定的充分必要条件。因此所有自然频率必须在复平面的开单位圆区间，也就是说，严格地在单位圆内。

188

同样，主模式的概念也可以应用到 DT 情况中。在 DT 情况下，最大幅度 $\rho_{\max}$ 的特征值是主特征值，$\rho_{\max}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱半径。对于 n 足够大的情况，$\boldsymbol{q}[n]$ 的轨迹实际上限制在一个空间范围内，这个空间是由对应于主特征值的特征向量组成的。如果 $\rho_{\max}=1$，系统边缘稳定。

与 CT 情况一样，如果 DT LTI 系统是对潜在非线性时不变系统的平衡点附近进行线性化的结果，那么线性化的渐进稳定性表明非线性系统是局部渐进稳定的。如果这个线性化至少有一个指数增长的模式——比如 $\rho_{\max}>1$——那么这个非线性系统是局部不稳定的。在边缘情况下，线性化不是渐进稳定的，而是不具有增长的模式——当 $\rho_{\max}=1$——那么这个线性化就不包含足够的信息来得出关于非线性系统的局部行为的结论；如果需要建立局部行为，那么就需要比在线性化里保留的项更高阶的项。

式(5.28)和式(5.44)的模态分解可分别用于验证 CT 和 DT 系统渐进稳定性的有关条件声明，但是这些模态分解是在相异特征值的假设下得到的。虽然如此，它还是可以表明，通常情况下的渐近稳定条件和上述假设下的渐进稳定条件是相同的。

例 5.5　线性病毒传播模型的渐进稳定性

对于第 4 章例 4.3 中提到的 SIR 病毒传播模型，在例 4.8 中得到这个模型有两个平衡点，无感染平衡态(IFE)和传染病平衡态(EE)。紧接着在后面的例 4.10 中，推导出了每一个平衡点位置处的线性化状态空间描述。

现在考虑与仿真结果相关的参数值和输入，由这个仿真结果得到了图 4.3 中的图形

$$\beta=0.01,\quad \gamma=0.2,\quad \rho=0.1,\quad P=10000,\quad x[n]=\overline{x}=0.5$$

这里β是普通出生和死亡率，γ是感染率，ρ是恢复率，P是总的人口大小，$x[n]$是免疫率。

187

对于这些参数，$R_0=\gamma/(\beta+\rho)=1.818<1/(1-\overline{x})=2$，因此没有EE，正如例4.8给出的一样。围绕IFE的小信号行为由状态演化矩阵所控制：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{IFE}}=\begin{bmatrix}1-\beta & -\gamma(1-\overline{x}) \\ 0 & 1+\gamma[(1-\overline{x})-(1/R_0)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.99 & -0.1 \\ 0 & 0.99\end{bmatrix} \tag{5.51}$$

这个矩阵的两个特征值是0.99，其模值<1，则这个线性化的模型是渐进稳定的。这样，所期望的在非线性系统中最初非常接近于平衡点的轨迹，最终会收敛于IFE，如图4.3所示。由于$0.99^{300}=0.049$，所以预计在时间$n=300$时偏移低于初始值的5%以下，这与图是一致的。收敛之前瞬时行为的特定特征——特别的是平衡点处某个方向上的单一偏移，在以指数(或者几何)形式回归于这些平衡值之前——与重复的特征值0.99是一致的。这里省略了这种重复特征值情况的进一步分析(但是可以参考例5.13中$\boldsymbol{A}_2$的讨论)。

189

对于解决EE情况下的问题，可以使用与上面相同的参数，只是用更小的免疫率$x[n]=\overline{x}=0.2$，则$R_0=1.818>1/(1-\overline{x})=1.25$，这样就允许采用一个正的感染平衡值，$\overline{i}>0$。图5.4给出了这个情况下的一个系统模拟，考虑了$i[0]$的几种选择。这些状态变量针对的是设置为稳定状态的平衡值，这个平衡值针对式(4.82)中的EE情况给出。在稳定状态下，式(4.82)中有关EE的平衡值的状态变量设置为

$$\overline{s}=P/R_0=5500$$

且

$$\overline{i}=(\beta P/\gamma)[R_0(1-\overline{x})-1]\approx 227$$

围绕EE附近的小信号行为由式(5.52)中的状态演化矩阵所控制：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{EE}}=\begin{bmatrix}1-\beta R_0(1-\overline{x}) & -\gamma/R_0 \\ \beta[R_0(1-\overline{x})-1] & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9855 & -0.11 \\ 0.0045 & 1\end{bmatrix} \tag{5.52}$$

这个矩阵的特征值是一对复特征值$0.993\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}0.021}$。这样就可以看到稳定于一个平衡值之前的振荡情况，振荡周期是$2\pi/0.021\approx 296$时间步进。由于$0.993^{296}=0.125$，一个振荡周期结束的幅度预计衰减到周期开始的值的12%。这些在图5.4中都得到了证实。

188

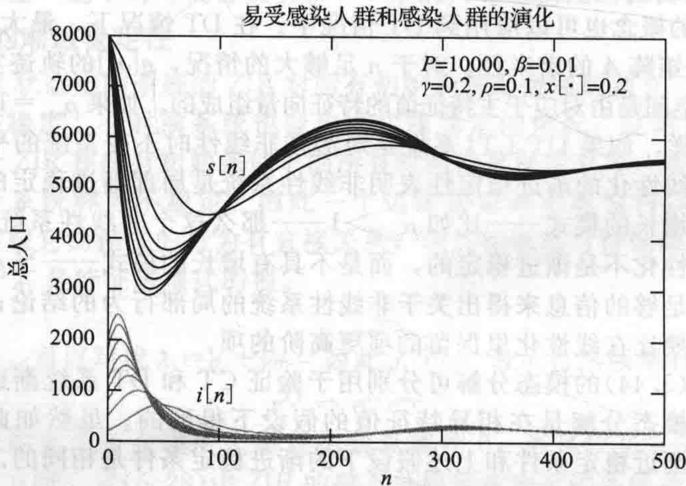


图5.4 与例4.3中所选择参数相同情况下的SIR模型的响应，但是免疫率下降到$x[n]=0.2$。获得的稳定状态对应于传染病平衡态 ◀

190

5.3 模态坐标下的通用响应

这一节致力于推导出CT和DT情况下全驱动系统的解，并再次得到一个模态描述。

5.3.1　被驱动的 CT 系统

考虑式(5.1)和(5.2)中的 CT LTI 状态空间描述，其输入 $x(t)$ 是时间的任意函数而不是保持为 0。由前面的讨论可知，ZIR 可以简单地基于模式来描述，也就是说，由系统的 L 个独立特征向量所对应的状态向量分量的行为得到，受此启发，现在就可以用同样的方法来推导被驱动系统的情况。

在任何时刻 t 的状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$ 是一个 L 维状态空间下的向量，因此这个向量可以唯一地写成 L 个独立特征向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的一个加权线性组合，权重是 $\{r_i(t)\}$。相应地，

$$\boldsymbol{q}(t)=\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i r_i(t)=\boldsymbol{V}\boldsymbol{r}(t) \tag{5.53}$$

式中第二个等式表示了作为矩阵向量乘积的和。向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 第 i 项是 $r_i(t)$，$L\times L$ 矩阵 $\mathbf{V}$ 的第 i 列是第 i 个特征向量 $\boldsymbol{v}_i$：

$$\mathbf{V}=[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{v}_L] \tag{5.54}$$

矩阵 $\mathbf{V}$ 称为模态矩阵。$r_i(t)$ 是时刻 t 的模态坐标。

在 ZIR 这种特定情况下，式(5.28)中的模态展开式表明函数 $r_i(t)$ 是由下式给出的：

$$r_i(t)=\alpha_i e^{\lambda_i t} \tag{5.55}$$

其中，$\{\alpha_i\}$ 由式(5.30)给出的初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$ 确定。对于被驱动的情况，这里可以预计到会有一个对于 $r_i(t)$ 更复杂的表达式，这个表达式将涉及输入轨迹 $x(\cdot)$。

接下来，将式(5.53)中的表达式 $\boldsymbol{q}(t)$ 带入式(5.1)的状态演化描述中，以此来确定为了满足状态演化方程，模态坐标函数 $\{r_i(t)\}$ 需要满足什么样的约束条件。然而，一个重要的预处理步骤是根据对应于特征向量的分量，将式(5.1)中的输入向量 $\boldsymbol{b}x(t)$ 表达出来。由于 $\boldsymbol{b}$ 是一个在与 $\boldsymbol{q}(t)$ 相同的 L 维空间下的 L 维向量，可以表示为

$$\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i\beta_i=V\boldsymbol{\beta} \tag{5.56}$$

191

其中，一些唯一确定的权重 β_i 是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 个分量。在这种符号表示下，将式(5.53)代入状态演化方程，就像未驱动情况下得到式(5.29)的做法一样，可得

$$\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i\dot{r}_i(t)=\boldsymbol{A}\Big(\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i r_i(t)\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i\beta_i\Big)x(t)=\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i\big(\lambda_i r_i(t)+\beta_i x(t)\big) \tag{5.57}$$

式中调用了 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i$ 来得到第二个等式。

式(5.57)的左边和右边用两种不同的方式把一个向量表达成了特征向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的一个加权线性组合。然而，由于特征向量构成了一个独立集，所以用来表达向量的权重是唯一的。可以得到

$$\dot{r}_i(t)=\lambda_i r_i(t)+\beta_i x(t),\quad i=1,2,\cdots,L \tag{5.58}$$

这些 L 个方程中的每一个都是一个单变量的一阶 LTI 差分方程。它们可以显式求解，且独立于其他方程，从而得到其对应的以时间为函数的模态坐标。如下所示，从 0 时刻向前经过任意时间间隔，求解第 i 个方程仅仅需要初始值 $r_i(0)$ 和经过相同间隔的输入 $x(\cdot)$。因此，尽管这里是从系统的 L 个耦合的一阶方程开始，仍然可以运用式(5.53)和式(5.58)来得到基于 L 个非耦合的标量一阶方程的解，这些方程都可以直接求解。

求解式(5.58)中的标量 LTI 差分方程需要用到初始条件 $\{r_i(0)\}$，该初始条件可以从初始状态 $\boldsymbol{q}(0)$ 得到，由式(5.53)可得

$$\boldsymbol{q}(0)=\sum_{i=1}^{L}\boldsymbol{v}_i r_i(0) \tag{5.59}$$

这样就需要使用权重 $r_i(0)$ 来表示基于特征向量的系统初始状态。与式(5.30)比较可知，这些权重恰好是在推导 ZIR 的模态表示中引入的 α_i，因此

$$r_i(0)=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,L \tag{5.60}$$

现在可以发现，$t \geqslant 0$ 时，式(5.58)中的第 i 个标量一阶 LTI 差分方程的显式解，可以由任何一个求解单变量下的受迫 LTI 差分方程的标准方法得到。例如，全解是一个齐次或者未驱动系统的解与一个受迫的或者被驱动系统的任意特解的和，选择齐次分量幅度以使得全解与特定的初始条件相匹配。这个解也可以由拉普拉斯变换方法获得，正如后面 5.4 节所示。现在，式(5.58)的解的最常用形式可写为

192

$$r_i(t) = \underbrace{e^{\lambda_i t} r_i(0)}_{\text{ZIR}} + \underbrace{\int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \beta_i x(\tau) d\tau}_{\text{ZSR}}, \quad t \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant L \tag{5.61}$$

上面的大括号表明了各个部分对全解的各自贡献，这个全解的第 1 部分响应仅取决于初始状态，称为零输入响应或者 ZIR，第 2 个部分响应仅取决于系统输入，称为零状态响应或者 ZSR。ZIR 是未驱动系统的解；ZSR 是一个特解，称为对应于初始状态为 0 的解。式(5.61)中解的正确性可以直接通过验证其是否满足式(5.58)来确立，且在 $t=0$ 时刻有右初始条件(right initial condition)$r_i(0)$。

求出式(5.1)中 LTI 状态演化方程全解的一种显而易见的方法就是：首先使用式(5.59)给出的 $\boldsymbol{q}(0)$ 确定模态坐标的初始值 $r_i(0)$；然后使用这些值和给定的 $x(t)$，通过式(5.61)来确定时间函数 $r_i(t)$；最后使用这些时间函数，通过式(5.53)中的通用模态分解来确定状态轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$。

为了求出相应的输出 $y(t)$，从式(5.2)中可以注意到

$$\begin{aligned} y(t) &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}(t) + dx(t) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \Big(\sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{v}_i r_i(t) \Big) + dx(t) \\ &= \sum_{i=1}^{L} (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_i) r_i(t) + dx(t) = \sum_{i=1}^{L} \xi_i r_i(t) + dx(t) \end{aligned} \tag{5.62}$$

其中，

$$\xi_i = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_i \tag{5.63}$$

式(5.61)也可以用来表明，对于一个所有的 λ_i 都有负实部的渐进稳定系统，在任意初始条件的情况下，一个有界的输入总会导致一个有界的状态轨迹。对于一个渐进稳定的系统，式(5.61)右边的第一项的幅度将限定于 $|r_i(0)|$。如果对所有的 t，都有 $|x(t)| \leqslant M < \infty$，那么式(5.61)右边的第二项也受到如下限定：

$$\left| \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \beta_i x(\tau) d\tau \right| \leqslant |\beta_i| M \int_0^t \left| e^{\lambda_i (t-\tau)} \right| d\tau \tag{5.64}$$

并且对于一个渐进稳定的系统，这个表达式右边的积分也是有界的。这里也可以声明，渐进稳定性足够保证有界输入有界状态的稳定性，并且也保证有界输入有界输出(BIBO)的稳定性。

193

5.3.2　被驱动的 DT 系统

对于式(5.3)和式(5.4)中的 DT LTI 状态空间系统，可以采用一种与前面非常接近的平行方法来进行处理，用 DT 指数替换 CT 指数即可。基于模态坐标，可以把状态向量 $\boldsymbol{q}[n]$ 写为

$$\boldsymbol{q}[n] = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{v}_i r_i[n] = \boldsymbol{V} \boldsymbol{r}[n] \tag{5.65}$$

其中，$\boldsymbol{V}$ 也是模态矩阵，它的列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。给定的初始条件 $\boldsymbol{q}[0]$ 可以通过式(5.66)来确定模态变量的初始值 $r_i[0]$。

$$\boldsymbol{q}[0] = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{v}_i r_i[0] \tag{5.66}$$

把式(5.65)中的模态表示代入状态演化方程，可以看到模态坐标 $r_i[n]$ 由形如式(5.67)的非耦合一阶 DT LTI 状态向量方程所控制。

$$r_i[n+1] = \lambda_i r_i[n] + \beta_i x[n], \quad i = 1, 2, \cdots, L \tag{5.67}$$

与之前一样，其中 β_i 可以根据式(5.56)中的关系来进行准确的定义。

每一个这样的方程的解都可以通过简单的前向步进迭代来确定，因此解的通用表达式可以写成

$$r_i[n] = \underbrace{\lambda_i^n r_i[0]}_{\text{ZIR}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^{n-k-1} \beta_i x[k]}_{\text{ZSR}}, \quad n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant L \tag{5.68}$$

根据模态变量，相应的输出可以表达为

$$y[n] = \sum_{i=1}^{L} \xi_i r_i[n] + \mathrm{d}x[n] \tag{5.69}$$

与之前一样，其中 ξ_i 可以根据式(5.63)来进行定义。同样，系统的渐进稳定性能够保证系统是有界输入有界状态稳定，因此是BIBO稳定的。

下面的例子把CT和DT情况放在一起，这就是一种关于DT控制CT系统的方式。

例 5.6 采样数据模型

假设式(5.1)和式(5.2)中CT LTI的输入 $x(t)$ 由计算机产生，计算机从 $t=0$ 时刻每隔 T 秒更新输入的值，一直保持 $x(t)$ 为常数，直到下一次更新。因此

194

$$x(t) = x[n], \quad nT \leqslant t < nT + T \tag{5.70}$$

其中，$x[n]$ 是由计算机确定的输入值序列。在这个例子中，$\boldsymbol{q}(nT+T)$ 和 $y(nT)$ 可以写成 $\boldsymbol{q}(nT)$ 和 $x[n]$ 的LTI函数，因此就为采样的状态向量 $\boldsymbol{q}(nT)=\boldsymbol{q}[n]$ 提供了一个DT LTI状态空间向量模型。这种情形如图5.5所示。

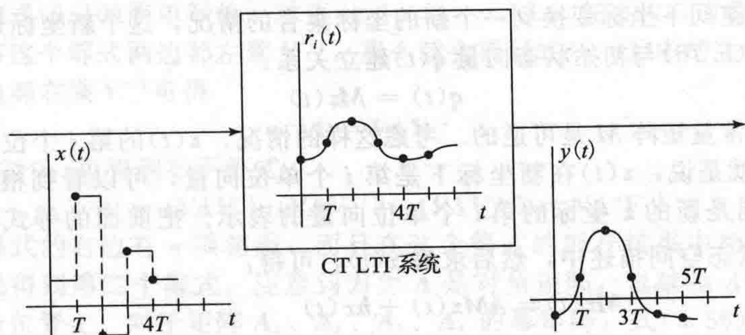


图5.5 例5.6中的CT系统与DT采样数据表示之间的关系

得到这个结果的关键是对于每一个从 $1\sim L$ 的 i，将 $r_i(nT+T)=r_i[n+1]$ 与 $r_i(nT)=r_i[n]$ 和 $x[n]$ 联系起来。对此，重新写出式(5.61)中的解，以应用到开始时间是 nT，结束时间是 $nT+T$ 的情况，可得

$$\begin{aligned} r_i(nT+T) = r_i[n+1] &= \mathrm{e}^{\lambda_i(nT+T-nT)} r_i(nT) + \int_{nT}^{nT+T} \mathrm{e}^{\lambda_i(nT+T-\tau)} \beta_i x(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_i T} r_i[n] + \mathrm{e}^{\lambda_i T} \left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda_i \sigma} \mathrm{d}\sigma \right) \beta_i x[n] \end{aligned} \tag{5.71}$$

第二个等式从变量变化到 $\sigma=\tau-nT$ 的情况得出结果，因为 $\mathrm{e}^{\lambda_i T}$ 和 $\beta_i x[n]$ 与 σ 无关，所以可以把它们移到积分符号的外面。如果 $\lambda_i=0$，可以简化DT LTI标量状态演化方程为

$$r_i[n+1] = r_i[n] + (T\beta_i)x[n] \tag{5.72}$$

如果 $\lambda_i \neq 0$，那么可以简化DT LTI标量状态演化方程为

$$r_i[n+1] = (\mathrm{e}^{\lambda_i T}) r_i[n] + \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i} \beta_i \right) x[n] \tag{5.73}$$

在 T 的整数倍数时刻，可得模态坐标 $r_i(t)$ 的采样值，然后在 T 的整数倍数时刻，得到状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$ 的采样值，因此也得到输出 $y(t)$ 的采样值。采用矩阵的标识方式可以让表达式更简短，这里各种各样的标量表达式可以集合到一个简单的矩阵形式中，这个矩阵可以看成是对于

195 采样状态和输出的 DT LTI 状态空间模型。接下来，在例 5.7 中将进行详细描述。◀

5.3.3 相似变换和对角化

在更进一步应用从上面得到的模态分解之前，再看一下得出这个分解的论证，但是现在使用矩阵代数运算来描述是已经完成了的。这就为状态空间表示提供了另一个虽然不同，但是有价值的视角。

CT 系统

回到式(5.53)，重复下面的事情，这个等式把初始状态向量 $\mathbf{q}(t)$ 和模态坐标的向量 $\mathbf{r}(t)$ 联系了起来，这里使用了模态矩阵 $\mathbf{V}$：

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{V}\mathbf{r}(t) \tag{5.74}$$

当特征向量被用作状态空间的一组基时，$\mathbf{r}(t)$ 的项代表了状态空间中一个点(例如：一个状态)的分量。在这些模态坐标中，特征向量 $\mathbf{v}_i$ 构成了用于第 i 个模态坐标的基向量，正如前面图 5.1 中相平面图中所表示的那样。

在相异特征值的假设下，特征向量 $\mathbf{v}_i$ 是独立的，这就会保证 $\mathbf{V}$ 是可逆的，因此式(5.74)暗示出：

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{q}(t) \tag{5.75}$$

式(5.74)和(5.75)表明模态坐标向量 $\mathbf{r}(t)$ 完全等价于初始状态向量 $\mathbf{q}(t)$；其中的每一个都可以从其他的向量中恢复出来。然而这个等价关系并不能马上清晰地表明 $\mathbf{r}(t)$ 本身是否满足一个 LTI 状态空间方程。在接下来的部分，所需要建立的是对新坐标的一个任意集合的线性变换，这不是针对特殊的模态坐标情况，而更主要是完成一些更通用性的工作。

考虑在状态空间下坐标变换到一个新的坐标集合的情况，这个新坐标是向量 $\mathbf{z}(t)$ 的分量，$\mathbf{z}(t)$ 通过式(5.76)与初始状态向量 $\mathbf{q}(t)$ 建立关系：

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{M}\mathbf{z}(t) \tag{5.76}$$

其中，所选择的常量矩阵 $\mathbf{M}$ 是可逆的。考虑这样的情况，$\mathbf{z}(t)$ 的第 i 个位置都是 1，其他位置都是 0，也就是说，$\mathbf{z}(t)$ 在新坐标下是第 i 个单位向量，可以看到根据旧的 $\mathbf{q}$ 坐标，矩阵 $\mathbf{M}$ 的第 i 列是新的 $\mathbf{z}$ 坐标的第 i 个单位向量的表示。把前面的等式代入式(5.1)和式(5.2)的初始状态空间描述中，然后求解 $\dot{\mathbf{z}}(t)$，可得：

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{z}(t)+\mathbf{b}x(t)$$

或者等价于

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{z}(t)+(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})x(t) \tag{5.77}$$

$$y(t)=(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{M})\mathbf{z}(t)+dx(t) \tag{5.78}$$

196 式(5.77)和式(5.78)仍然具有状态演化描述和 LTI 状态空间模型的输出描述的形式，但是有状态向量 $\mathbf{z}(t)$ 和修正的系数矩阵。由于式(5.76)允许从 $\mathbf{z}(t)$ 中得到 $\mathbf{q}(t)$，所以这个模型完全等价于初始模型，且 $\mathbf{M}$ 的可逆性也使得能从 $\mathbf{q}(t)$ 中得到 $\mathbf{z}(t)$。

上面的可逆变换称为相似变换，应用相似变换得到的 LTI 状态空间描述称为与原方程的相似等价，或者说相似。由于在状态空间中相似变换是到新坐标系统下一个简单的变换，所以相较于式(5.1)和式(5.2)中的原始描述的基本动态性质，推导出的式(5.77)和式(5.78)中的变换描述的基本动态性质是不会改变的，这样来理解就一点也不会感到惊讶了。举例来说，由于变换描述的 ZIR 是通过式(5.76)中的常数矩阵变换与原始描述的 ZIR 联系在一起的，所以两个 ZIR 表达式就表现出相同的模态频率。这就说明 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{A}$ 的特征值是相同的，而仅仅这些特征向量变化，$\mathbf{v}_i$ 变换到 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_i$。这也很容易在代数上进行验证，如

$$\lambda\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{v}\quad 当且仅当\quad \lambda(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v})=(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}) \tag{5.79}$$

还要注意的是，输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 不受状态变换的影响。对于一个给定的输入，且假设变换描述中的初始状态 $\mathbf{z}(0)$ 通过式(5.76)与 $\mathbf{q}(0)$ 联系在一起，可以得到相同输出，正如已经从式(5.1)和式(5.2)的原始描述中所得到的一样。因此，系统的输入输出关系式不受相似变换的影响。

DT 系统

对于式(5.3)和式(5.4)中的 DT 情况，相似变换可以用完全相同的方式来定义，写为

$$\boldsymbol{q}[n] = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}[n] \tag{5.80}$$

$\boldsymbol{M}$ 是一个可逆矩阵，可以推导出

$$\boldsymbol{z}[n+1] = (\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})\boldsymbol{z}[n] + (\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b})x[n] \tag{5.81}$$

$$y[n] = (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\boldsymbol{z}[n] + dx[n] \tag{5.82}$$

模态坐标的相似变换

式(5.53)中的变换 $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{r}(t)$ 可以被认为是一个相似变换，使用模态矩阵 $\boldsymbol{V}$ 作为变换矩阵。关于这个模态变换有趣和有用的是，它是一个对角变换，在这个场景中状态演化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变换成对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \text{diadonal}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_L\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_L \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{5.83}$$

197

一个简单的证明方式是验证 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$，即

$$[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_L] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_L \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_L] \tag{5.84}$$

式(5.84)和式(5.10)简单等价，对于 $i=1, 2, \cdots, L$，左边和右边都可以写成矩阵的列累加起来。将这个等式两边都左乘 $\boldsymbol{V}^{-1}$，那么就会得到式(5.83)中的关系式。

将上式两边都右乘 $\boldsymbol{V}^{-1}$ 可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1} \tag{5.85}$$

对于整数 $n>0$，可得到如下等式：

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})\cdots(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{V}^{-1} \tag{5.86}$$

其中在第一个等式的右边有 n 项相乘，而且在这个等式的展开结果中相邻的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}^{-1}$ 抵消，然后就可以得到第二个等式。注意到因为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵，也就是 $\boldsymbol{\Lambda}^n$ 也是对角矩阵，λ_i^n 在第 i 个对角位置上。对于矩阵 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$、$\boldsymbol{A}_4$ 的幂矩阵，式(5.86)中的关系式可以用来对例 5.4 中给出的表达式进行验证。

对角化的 CT 系统

根据使用模态相似变换所得到的系统描述，可以用 $\boldsymbol{V}$ 替换式(5.77)和式(5.78)中的 $\boldsymbol{M}$ 来确定，结果是

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})\boldsymbol{r}(t) + (\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b})x(t) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{\beta}x(t) \tag{5.87}$$

$$y(t) = (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V})\boldsymbol{r}(t) + dx(t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}(t) + dx(t) \tag{5.88}$$

其中，列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和行向量 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 的定义为

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_L \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_L] \tag{5.89}$$

重写第一个定义式 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta} = \sum \boldsymbol{v}_i\beta_i$，这表明标量 β_i 是在式(5.56)中精确定义的。第二个定义式表明 $\xi_i = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i$ 恰好是式(5.63)所给出的定义。考虑这些定义，以及式(5.87)中的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵这一事实，式(5.87)中的单独行可以产生出由式(5.58)得到的一阶 LTI 差分方程的非耦合集，同时，式(5.88)中的输出等式正好和(5.62)中的一样。因此，前面的非耦合描述可以使用在初始描述上的矩阵运算恢复出来。非耦合是下面这个事实的推论，即在这些模态坐标上矩阵控制着状态演化，这些矩阵记为 $\boldsymbol{\Lambda}$，是对角矩阵。

198

图 5.6 给出了非耦合描述。这实际上是图 4.8的 CT 版本，图 4.8 显示了一个系统自然的状态空间实现，这个系统的单位采样响应是一个 DT 指数的和。对现在要建立的 CT 情况，DT 情况恰好与之是一个平行的情况，所以任何有着相异自然频率的 LTI 状态空间系统都可以认为是基于这样的非耦合的或者对角化的表示。本章末尾的例 5.13 说明了当有重复的自然频率时，图形将如何变化。

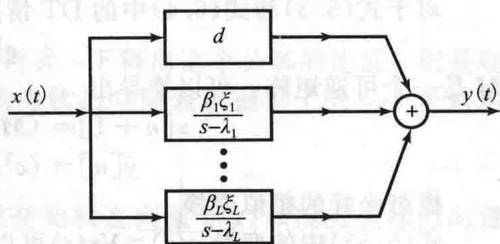


图 5.6 在模态坐标中 CT LTI 系统的非耦合结构

CT 矩阵指数

单独的模态变量 $r_i(t)$ 的解在式(5.61)中表示出来。这些解也可以集合成一个展示矩阵的形式(revealing matrix form)。为此，定义 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的矩阵指数为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \mathrm{diagonal}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_L t}\} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_L t} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Lambda}t + \boldsymbol{\Lambda}^2 \frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{\Lambda}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{5.90}$$

其中，上面的第二个等式是对一个标量指数调用泰勒级数展开，记为

$$\mathrm{e}^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots \tag{5.91}$$

这就允许合并式(5.61)中的 L 个方程为下面的单个矩阵等式：

$$\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}(t-\tau)}\boldsymbol{\beta}x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0 \tag{5.92}$$

这里，一个向量的积分可以理解为分量方式的积分，且 $\boldsymbol{\beta}$ 是在式(5.89)中定义的。因此对 $\boldsymbol{r}(t)$ 的这个向量表达式就是式(5.87)中 L 维状态演化方程的解，而且对于式(5.87)中的标量状态演化方程有着与式(5.61)中标量解一样的形式。

199

用式(5.53)中的表达式来合并式(5.92)，把 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{q}(t)$ 联系在一起，可得

$$\boldsymbol{q}(t) = (\boldsymbol{V}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{q}(0) + \int_0^t (\boldsymbol{V}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}(t-\tau)}\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{b}x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.93}$$

$$= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{q}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}x(\tau)\mathrm{d}\tau, t \geqslant 0 \tag{5.94}$$

这里，通过与式(5.90)进行类比，可知已经定义的矩阵指数为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{V}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Lambda}t + \boldsymbol{\Lambda}^2 \frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{\Lambda}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)\boldsymbol{V}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{5.95}$$

如果初始时刻是 t_0 而不是 0，式(5.94)中的解可以修正为

$$\boldsymbol{q}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}x(\tau)\mathrm{d}\tau, t \geqslant t_0 \tag{5.96}$$

用简洁的矩阵标识，这个等式提供了式(5.1)中 CT LTI 状态演化描述的通解。解的正确性也可以通过直接把它代入状态演化方程中进行验证，而且使用下面的矩阵指数的乘积和微分性质，可得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}, \quad \frac{d}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A} \tag{5.97}$$

式(5.96)也可以用来显式地验证一个 LTI 状态演化方程的解集合的线性和时不变性质。合起来看，状态轨迹在初始状态上和输入轨迹上是线性的。两个实验中，各自的初始条件和

输入轨迹的叠加产生了一条状态轨迹，这条轨迹和单个实验上状态轨迹的叠加是相同的。

为了考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重复特征值的情况，$\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数也可以通过式(5.95)中的无穷级数来定义。式(5.97)中的性质也保持了这种更通用的情况。式(5.96)中给出的解实际上是对于所有情况下给定的LTI系统的解，而不仅仅是针对那些有着相异特征值的情况。

例 5.7 矩阵形式中的采样数据模型

200

这里，首先回到例5.6的分析中，该例中的采样数据模型产生于一个具有分段常数输入的 $x(t)$，应用于式(5.1)中的CT LTI状态空间系统的情况，即

$$x(t)=x[n],\quad nT\leqslant t<nT+T$$

对于式(5.71)中给出的模态变量的采样数据模型，在这里再重复一下，即

$$r_i[n+1]=\mathrm{e}^{\lambda_i T}r_i[n]+\mathrm{e}^{\lambda_i T}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda_i\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\beta_i x[n],\quad i=1,2,\cdots,L$$

基于可以利用的概念和结论，能够得到下面采样数据模型的简化和通用表示，在原始坐标中可以写出如下表达式，这甚至对于有重复特征值的情况也适用。

$$\boldsymbol{q}[n+1]=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T})\boldsymbol{q}[n]+\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(T-\sigma)}\boldsymbol{b}\mathrm{d}\sigma\right)x[n] \tag{5.98}$$

这是一个DT LTI状态空间模型，可以使用已经开发出的各种方法和工具对其进行分析。

例如，假设以CT LTI系统开始，

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{q}(t)+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}x(t) \tag{5.99}$$

这个简单的模型产生于对于刚性物体的运动的描述，这个刚体做与速度相关的阻尼运动，且除了外部输入 $x(t)$，没有受到其他力的作用，例如没有复位弹簧力。这种情况下的第一个状态变量 $q_1(t)$ 是这个物体的位置，第二个状态变量 $q_2(t)$ 是它的速度。$\boldsymbol{A}$ 的特征值和相应的特征向量是

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\gamma,\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -\gamma\end{bmatrix} \tag{5.100}$$

如果力 $x(t)$ 是由计算机控制的激励器所产生的，是分段常数，并且在间隔 $nT\leqslant t<nT+T$ 范围内取值为 $x[n]$，那么一个采样数据状态空间模型就可以用来跟踪从时刻 nT 到时刻 $nT+T$ 的状态。采样数据模型中调用的矩阵在式(5.98)中提供，对于 $\gamma T\ll 1$ 的情况，其近似值可以在下面进行估计，这种情况将在后面列出。

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}&=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/\gamma\\ 0 & -1/\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \Delta\\ 0 & \mathrm{e}^{-\gamma T}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\boldsymbol{b}&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\gamma}(T-\Delta)\\ \Delta\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}T^2/2\\ T\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.101}$$

其中，

$$\Delta=\frac{1}{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-\gamma T})\approx T-\gamma\frac{T^2}{2} \tag{5.102}$$

在刚体运动情况下，限制条件 $\gamma T\ll 1$ 对应于非常小的阻尼。那么，根据牛顿定律，物体有一个正比于外部输入 $x(t)$ 的加速度，实际上对于式(5.99)CT模型中选择的单位，它实际

是等于 $x(t)$ 的。因此在第 n 个采样间隔的过程中，常数力 $x(n)$ 导致速度随着时间呈现直线变化，从 $q_2[n]$ 变到 $q_2[n+1]=q_2[n]+Tx[n]$。另外，位置随着时间呈现平方的变化，从 $q_1[n]$ 变化到 $q_1[n+1]=q_1[n]+Tq_2[n]+(T^2/2)x[n]$。这些结论与状态演化模型具有一致性，状态演化模型是把式(5.101)的近似表达式代入式(5.98)中的采样数据模型所得到的。◀

201

对角化的 DT 系统

求出式(5.93)和式(5.94)中的 CT 状态解的平行演化方法，也可以将其应用到 DT LTI 情况。式(5.3)的解的对应表达式如下：

$$\boldsymbol{q}[n]=(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{q}[0]+\sum_{k=0}^{n-1}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{n-k-1}\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{b}x[k] \tag{5.103}$$

$$=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{q}[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{A}^{n-k-1}\boldsymbol{b}x[k],\quad n\geqslant 0 \tag{5.104}$$

式(5.104)正是从式(5.3)随着时间的前向步进迭代中所得到的，即从 $\boldsymbol{q}(0)$ 得到 $\boldsymbol{q}[n]$。然而，这个表达式在式(5.103)的模态分解形式上提供了一个额外的视角，这是因为它把 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(即 DT 系统的自然频率)的角色去掉了，这个特征值用来确定系统性质，特别是它的稳定性。

5.4 传递函数、隐藏模式、可达性和可观测性

这里的关注点不再是状态空间模型的内在或者状态行为，而是转到检查如何把输入和状态耦合在一起，如何把状态和输出耦合在一起，以及如何把输入和输出耦合在一起。后面，将通过检查一个 LTI 状态空间模型的输入输出传递函数来开始讨论。这将引入一些其他有趣的结合点，先探讨 CT 系统，然后再探讨 DT 系统。

5.4.1 CT 系统的输入-状态-输出结构

输入输出关系

对于在 $t=0$ 时的特定初始条件，以及在 $t\geqslant 0$ 时的特定输入的情况下，为了分析因果系统的响应行为，采用单边拉普拉斯变换是特别有用的。对于一个信号 $w(t)$，单边拉普拉斯变换定义为

$$W(s)=\mathcal{L}_+\{w(t)\}=\int_{0-}^{\infty}w(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{5.105}$$

收敛范围是右半平面。积分下限是从 0－开始，表明这个变换可以捕获时刻 0 的任何脉冲。因此如果 $w(t)=\delta(t)$，那么 $W(s)=1$。有了这个定义，信号 $w(t)$ 的导数的单边拉普拉斯变换是

202

$$\mathcal{L}_+\{\dot{w}(t)\}=\int_{0-}^{\infty}\dot{w}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sW(s)-w(0-) \tag{5.106}$$

如果 $w(t)$ 在 $t=0$ 是连续的，也就是说，如果 $\dot{w}(t)$ 在 $t=0$ 处没有脉冲，那么在这个等式中就可以用 $w(0)$ 替换掉 $w(0-)$。如果初始条件是 $w(0)=0$，那么在时间上的微分映射到变换域上就是乘以 s。在第 2 章描述的双边拉普拉斯情况下，积分下限是 $-\infty$ 而不是 0－，在时间上的微分映射到变换域上是乘以 s，不用对初始值做调整。

对式(5.58)中的非耦合模态方程采用单边拉普拉斯变换，重新写出结果：

$$R_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}(r_i(0-)+\beta_i X(s)),\quad i=1,2,\cdots,L \tag{5.107}$$

如果 $x(t)$ 在 $t=0$ 时没有脉冲，那么 $r_i(t)$ 在 $t=0$ 是连续的，式(5.107)中的 $r_i(0-)$ 可以用 $r_i(0)$ 替换。这个等式的逆变换正好得到了前面式(5.61)中 $r_i(t)$ 的时域解，该式表示了 ZIR 和 ZSR 的和。现在，又有了这个解的一个变换域-时域导数。

相似的，对式(5.62)中的输出方程进行拉普拉斯变换，并代入式(5.107)中的关系式，可得：

$$Y(s)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\xi_i R_i(s)\Big)+\mathrm{d}X(s)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{\xi_i r_i(0-)}{s-\lambda_i}\Big)+\Big(d+\sum_{1}^{L}\frac{\xi_i\beta_i}{s-\lambda_i}\Big)X(s)\quad(5.108)$$

当其他输入或者激励，如初始条件，都设为0时，在CT LTI系统给定的输入和输出之间的传递函数 $H(s)$ 都可以认为是输出变换与输入变换的比值。相应地，在前面的等式中设 $r_i(0-)=0$，求解比值 $Y(s)/X(s)$，得到下面对式(5.1)和式(5.2)的状态空间模型的传递函数表达式，即

$$H(s)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{\xi_i\beta_i}{s-\lambda_i}\Big)+d\quad(5.109)$$

从这个表达式中可以推导出如下几个有用的事实。如果式(5.109)被写成多项式的比值，那么分母多项式是

$$a(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_L)\quad(5.110)$$

由于这是 L 阶的首一多项式，它的根是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，那么这个多项式一定是式(5.13)定义的特征多项式，因此

203

$$H(s)=\frac{\eta(s)}{a(s)}\quad(5.111)$$

式(5.109)表明，当且仅当直接馈通增益非零时，上述表达式中的分子多项式 $\eta(s)$ 才是 L 阶的。在这种情况下，分子和分母的阶数相同，这个传递函数称为恰好正则(exactly proper)。如果 $d=0$，那么 $\eta(s)$ 的阶数可以是 $0\sim L-1$ 中的任意数，因为分子的阶数严格小于分母的阶数，所以传递函数称为严格正则(strictly proper)。在任何情况下，状态空间系统的传递函数都是正则有理的(proper rational)，也就是说，分子的阶数不会超过分母的阶数。

$H(s)$ 的极点是 $H(s)$ 具有极大幅度值时 s 的值，零点是 $H(s)$ 幅度为0时 s 的值。由式(5.111)和(5.110)给出的 $H(s)$ 表达式表明极点全部都是系统的自然频率。然而，并不能保证反之也成立：因为 $\eta(s)$ 和 $a(s)$ 的项 $(s-\lambda_j)$ 可能被约掉，所以并不是所有的自然频率都一定是极点。这就是指普通的极点-零点相消，尽管消掉的因式既不是 $H(s)$ 的极点，也不是零点。每一个约掉的自然频率称为系统的一个隐藏模式。这里将会简短地更多介绍是什么引起了这些极点-零点相消或者隐藏模式。当具有极点-零点相消时，随着所有的对消，$H(s)$ 就可以写成简化的形式，产生的分母(或分子)的根正是 $H(s)$ 的极点(或零点)。

式(5.109)中的传递函数形式也提供了一种得到任意确定的正则有理传递函数 $H(s)$ 的状态空间实现的方法，这个传递函数有 L 个相异极点(所有极点-零点相消后，可以写成简化形式)。这里寻找的就是有确定的传递函数的状态空间模型。首先按照部分分式展开法展开 $H(s)$，可得

$$H(s)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{k_i}{s-\lambda_i}\Big)+d\quad(5.112)$$

其中，

$$k_i=H(s)(s-\lambda_i)\big|_{s=\lambda_i},\quad d=H(\infty)\quad(5.113)$$

然后选择一个非零 $\beta_i(i=1,2,\cdots,L)$ 的任意集合，再接着选择 $\xi_i=k_i/\beta_i$，就可以集合由式(5.58)和式(5.62)以及图5.6说明的非耦合形式的状态空间实现。这个状态空间模型将会具有确定的从 $x(\cdot)$ 到 $y(\cdot)$ 的传递函数。

给定的正则有理传递函数有 L 个极点，所以在所有的对消之后分母的阶数是 L，它的 L 阶实现就称为是最小实现，这是因为 $H(s)$ 的实现不可能具有更少的阶数。为了验证这一点，假设一个更少阶 $L'<L$，则有一个传递函数 $H'(s)=H(s)$，$H'(s)$ 的极点不超过 L'，由于它只有 L' 个自然频率，但是又已知 $H(s)$ 有 L 个极点(在所有的相消之后)。可以看出，传递函数的任何两个最小状态空间实现都可以通过相似的变换建立起相互关系。

204

式(5.109)中的传递函数可以用矩阵标识的方法重新写为

$$H(s)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\beta}+d\quad(5.114)$$

这个等式是从式(5.89)中的$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}$的定义中产生出来的，且$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$是一个对角矩阵，它的逆也是个对角矩阵，逆矩阵的对角元都是初始矩阵相应对角元的倒数。代入定义关系式$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b}$中，回顾$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$，按照初始坐标，而不是模态坐标中矩阵定义的状态空间描述来写出$H(s)$的上述表达式：

$$H(s)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b}+d \tag{5.115}$$

为了简化式(5.115)，可以运用下面这个事实，即对于可逆矩阵$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{P}$，其逆$(\boldsymbol{MNP})^{-1}$是按照相反顺序的每个矩阵逆的乘积，也就是$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}$，这是因为乘以$\boldsymbol{MNP}$会产生一个单位矩阵。式(5.115)中的表达式可进一步简化为

$$H(s)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}+d=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d \tag{5.116}$$

式(5.116)中$H(s)$也可以直接由对式(5.1)和式(5.2)中的初始方程的拉普拉斯变换得到

$$s\boldsymbol{Q}(s)-\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{b}X(s) \tag{5.117}$$

$$Y(s)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(s)+dX(s) \tag{5.118}$$

其中，$\boldsymbol{Q}(s)$表示$\boldsymbol{q}(t)$分量形式的拉普拉斯变换，也就是，向量的第i项是$q_i(t)$的拉普拉斯变换。上面的第一个等式可以重写，并求解$\boldsymbol{Q}(s)$，即

$$\boldsymbol{Q}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}(0)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}X(s) \tag{5.119}$$

对式(5.119)的反变换可产生式(5.94)中得到的时域解，但是没必要假设有相异的特征值。比较这两个表达式，也可以发现得到矩阵指数的另一个方法，即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\text{ 的拉普拉斯反变换} \tag{5.120}$$

205

其中反变换是分量形式的计算，也就是说，矩阵$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$的每一项分开求逆。

假设式(5.119)中的$\boldsymbol{q}(0)=0$，然后把$\boldsymbol{Q}(s)$的结果表达式代入式(5.118)的输出关系中，可以得到式(5.116)中传递函数$H(s)$的表达式。这个推导的好处是不需要假设特征值是相异的。这个表达式普遍成立。然而为了简单，下面的求解是建立在模态坐标中的表达式$H(s)$有着相异特征值的假设上——比如式(5.109)或者式(5.114)所示——是很有帮助的。

CT 系统可达性、可观测性和隐藏模式

式(5.109)已经证明$H(s)$通常有L个极点，而且正好都是系统的自然频率。然而，假设对于某一些j，$\beta_j=0$。式(5.56)中对$\{\beta_i\}$的定义表明当$\boldsymbol{b}$表征为特征向量而不是$\boldsymbol{v}_j$的线性组合时，这种情况正好会发生。在这种情况下，式(5.109)表明，虽然λ_j仍然是系统的一个自然频率，且对于几乎所有的初始条件它都会出现在状态$\boldsymbol{q}(t)$的ZIR中，但它还是没有作为传递函数的极点出现。

这个隐藏模式——隐藏在输入输出传递函数的内在模式——的潜在原因可以从式(5.58)或者式(5.107)中看出：对于$\beta_j=0$，输入没有激励第j个模式。在这种情况下，该模式与λ_j相关，被称为是一个不可达到的模式。相反，如果$\beta_k\neq0$，第k个模式被称为可以达到的。(术语 controllable 也用作表示可达性；严格意义上讲，在DT情况下这两个概念的定义有细微差别，但是在这里不考虑这个差异。)

如果系统的所有L个模式都是可达的，那么这个系统本身称作可达的，否则就称为不可达的。在一个可达系统中，输入可以完全地激励状态变量，而且事实上在有限时间内，输入都可以从任意特定的初始条件下传输状态向量到任意想要的目标状态下。在一个不可达系统里，这是不可能的。可达性的概念会出现在系统和控制理论中的某些地方。

对于一些j，当$\xi_j=0$时，会出现一种双重情境。同样在这样的情况下，式(5.109)表明λ_j没有作为传递函数的极点出现，虽然它仍然是系统的一个自然频率，且对于几乎所有的初始条件都会出现在状态$\boldsymbol{q}(t)$的ZIR中。再一次，这里出现了一个隐藏模式。这次的原因在式(5.62)或者式(5.108)中可以很明显地看到：$\xi_j=0$，第j模式没有出现在输出中，甚至当它出现在状态响应中时。在这种情况下，与λ_j相对应的模式称为不可观测的。反之，如果$\xi_k\neq0$，第k个模式称为可观测的。

如果系统的所有L个模式都是可观测的，那么这个系统本身称为可观测的，否则就称

为不可观测的。在一个可观测系统中，状态向量的行为可以毫不含糊地从一些量测中推断出，这些量测针对的是经过一些时间间隔的输入和输出，然而对于不可观测系统来说这却是不可能的。可观测性的概念也会在系统和控制理论中的某些地方出现。

特别地，如果隐藏模式是不稳定的，那么它们就会引起一些困难。然而，如果这里所有考虑的是描述一个传递函数，或者等价的来说，在零初始条件下描述LTI系统的输入输出关系式，那么隐藏模式就可能没有什么重要的意义。要得到一个简化阶数的状态空间模型，可以通过简单地放弃式(5.58)中的所有方程以及式(5.62)中对应的项来实现，式(5.58)对应于不可达和不可观测模式。 206

反之也为真：如果一个状态空间模型是可达的和可观测的，那么就没有更低阶的状态空间系统会有相同的传递函数。换句话来说，一个具有可达性和可观测性的状态空间模型是其传递函数的最小实现形式。

复合系统的可达性和可观测性

考虑图5.7所示的复合系统，这个复合系统从两个子系统的级联或者串联得到。等式$x_2(t)=y_1(t)$定义了级联。输入$x_1(t)$设置为等于外部输入$x(t)$，总体系统输出$y(t)$设置为等于$y_2(t)$。每一个子系统由它的正则有理传递函数所标识，分别为$H_1(s)$和$H_2(s)$。由于仅仅给出了传递函数，所以假设或者约定每一个子系统对应的传递函数是最小LTI状态空间的实现形式，这个实现形式有着它们各自的状态向量，L_1个分量向量$\boldsymbol{q}_1(t)$和L_2个分量向量$\boldsymbol{q}_2(t)$。对于级联系统，状态变量最自然的选择就是两个子系统中状态变量的联合，对应的状态向量为

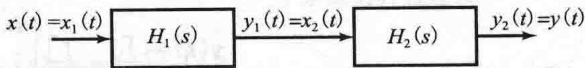


图5.7 由两个级联的子系统组成的系统

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1(t)\\ \boldsymbol{q}_2(t)\end{bmatrix} \tag{5.121}$$

引入符号

$$H_1(s)=\frac{\eta_1(s)}{a_1(s)},\quad H_2(s)=\frac{\eta_2(s)}{a_2(s)} \tag{5.122}$$

其中，$a_1(s)$、$a_2(s)$分别是L_1、L_2阶的，且它们各自的分子没有相消的项，所以从$x(t)$到$y(t)$的全体传递函数如下式所示：

$$H_{\text{ser}}(s)=H_2(s)H_1(s)=\frac{\eta_2(s)\eta_1(s)}{a_2(s)a_1(s)} \tag{5.123}$$

因此它必然是这样一种情况：级联系统的特征多项式正好是阶数为L_1+L_2的多项式$a_2(s)a_1(s)$。那么级联组合的自然频率是每个单独系统的自然频率的联合。

对于相消的唯一可能性是$a_1(s)$和$\eta_2(s)$有一个或者多个共同项，或者$a_2(s)$和$\eta_1(s)$有一个或者多个公因式。可以看到，前一种可能性与可观测性的损失相对应，而后一种与可达性的损失相对应。可观测性的损失是由于第二个系统的一个(或多个)零点阻止了第一个系统的自然频率(或多个频率)到达输出。相似地，可达性的损失是由于第一个子系统的一个(或多个)零点阻止了从第二个子系统的自然频率(或多个频率)所对应的激励输入。接下来将用一个简单的例子来说明这个问题。 207

例5.8 子系统串联组合的隐藏模式

假设图5.7中有

$$H_1(s)=\frac{1}{s-1},\quad H_2(s)=\frac{s-1}{s+3}=1-\frac{4}{s+3} \tag{5.124}$$

这就得到一个带有隐藏模式的整体传递函数：

$$H_{\text{ser}}(s)=\frac{1}{s+3} \tag{5.125}$$

为了确定隐藏模式是由于可观测性的损失和不可达性造成的，这里为每一个子系统构建一阶状态空间模型，按照图 5.7 中的约束合并两个子系统，得到一个二阶状态空间模型，最后检查合并后的系统的可观测性和可达性。

两个子系统传递函数已经具有式(5.112)中所假设的部分分式展开形式，该式作为起点来得到传递函数的一个最小状态空间实现形式。根据这里概述的方法，下面可以直接得到每个独立的状态空间实现

$$\dot{q}_1(t) = q_1(t) + x_1(t), \quad y_1(t) = q_1(t) \tag{5.126}$$

$$\dot{q}_2(t) = -3q_2(t) - 4x_2(t), \quad y_2(t) = q_2(t) + x_2(t) \tag{5.127}$$

把这些进行合并，并考虑级联约束，可得下面的整体系统的状态空间方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & -3\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{b}x(t) \tag{5.128}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}}_{c^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}$$

如预计的一样(而且这个系统看起来是不稳定的)，这个系统的自然频率是 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=-3$，使用式(5.116)中的公式来检查整体传递函数，跟预期一样可以得到：

208

$$H(s) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ 4 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+3)}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+3 & 0\\ -4 & s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s+3} \tag{5.129}$$

这个运算使用的 2×2 矩阵的逆由下式给出

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} \tag{5.130}$$

这个结论可以通过两边同时乘以正在求逆的矩阵来验证，结果是两边都产生单位矩阵。注意到虽然系统不是内在的渐进稳定的，但是对于所有提供的从零初始条件(或者初始条件仅仅激励起稳定模式)开始的有界输入，系统都有有界输出。BIBO 稳定性的原因是 $H(s)$ 的极点是负的，可产生绝对可积的冲激响应 $h(t)$。

为了检查可观测性和可达性，首先确定特征向量，它们是

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{5.131}$$

由于 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_1=0$，与 $\lambda_1=1$ 相对应的模式就确实是不可观测的，这就解释了它为什么会隐藏在传递函数中。至于可达性，既然 $\boldsymbol{b}$ 不能写成只是 $\boldsymbol{v}_1$ 或者只是 $\boldsymbol{v}_2$ 的倍数，那么为了生成 $\boldsymbol{b}$，就必需是两个特征向量的一个加权线性组合，这证明了这两个模式的可达性。这个例子也可以用来指出两个普遍的事实：输入向量 $\boldsymbol{b}$(在原始坐标中，而不是模态坐标中)中 0 的项并不意味着可达性的损失；输出向量 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$(在原始坐标中，而不是模态坐标中)中的所有项非零也并不能保证可观测性。

如果两个子系统以相反的顺序连接，使用像上面相同的过程，可以得出结论：$\lambda_1=1$ 是可观测的但是不可达的，而且尽管原因不同，但是还是隐藏的。◀

图 5.8 显示了由两个子系统互联得到的两个其他形式的类似复合系统：一个闭环的或者有反馈的结构和一个并联的结构。两种情况都可以用上面研究串联形式所使用的方法来

研究，这里就只是简单总结一下结果。像前面那样假设 $\eta_1(s)$ 和 $a_1(s)$ 没有公因式，对于 $\eta_2(s)$ 和 $a_2(s)$ 也是这样。

对于反馈结构，传递函数是

$$H_{\mathrm{fb}}(s) = \frac{\eta_1(s)a_2(s)}{a_1(s)a_2(s) + \eta_1(s)\eta_2(s)} \tag{5.132}$$

分母 $a_1(s)a_2(s)+\eta_1(s)\eta_2(s)$ 是系统的特征多项式。因此，通常情况下，反馈导致自然频率不同于子系统的自然频率，这是因为自然频率不再是 $a_1(s)a_2(s)$ 的根。对式(5.132)的验证表明分子和分母之间的任何约分都是由 $a_2(s)$ 和 $\eta_1(s)$ 之间的公因式所引起的。这些公因式代表着反馈回路上的子系统的极点或者模式，它们被前向支路上的子系统的对消零点掩盖或者隐藏了起来，最后造成了系统是不可达的和不可观测的。因此，这些模式作为闭环系统的自然频率被保留下来，不受反馈影响。

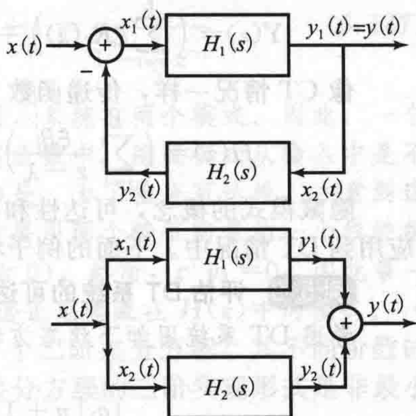


图 5.8 上图表示了两个子系统的反馈连接；下图标识两个子系统的并行连接

209

对于并行结构，传递函数是

$$H_{\mathrm{par}}(s) = \frac{\eta_1(s)a_2(s) + \eta_2(s)a_1(s)}{a_1(s)a_2(s)} \tag{5.133}$$

分母 $a_1(s)a_2(s)$ 是系统的特征多项式。因此，并行连接的自然频率是子系统自然频率的联合。在这种情况下，$a_1(s)$ 和 $a_2(s)$ 有公因子，就会产生相消。然而，这些相消对应于整体系统具有的重复的自然频率，而不是相异的自然频率，所以基于相异自然频率的假设下，用来研究可达性和可观测性的定义和方法就不能再使用了。在包含重复自然频率的更通用框架中，所表现出来的是，当 $a_1(s)$ 和 $a_2(s)$ 有公因式时，相关的隐藏模式既是不可达的，又是不可观测的。原因是两个子系统的共同模式是由输入按固定比例驱动的，通过输出就可以看作是固定的线性组合，因此它们不能被认为比一个系统具有更大的多重性。本章末的例 5.13 将进一步阐明这种情况。

5.4.2 DT 系统的输入-状态-输出结构

DT 系统的传输关系

一个极其相似的方法可以应用到 DT 情况中。为了分析在初始条件 $n=0$ 时刻和在 $n\geqslant 0$ 时，输入对于 DT 状态空间模型响应的行为，最有用的变换是单边 z 变换。对于一个信号 $w[n]$，单边 z 变换定义为

210

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n} \tag{5.134}$$

收敛域是以 $z=0$ 为中心的圆以外的区域，向前进一个时刻的信号 $w[n+1]$ 的单边 z 变换是

$$\sum_{n=0}^{\infty} w[n+1]z^{-n} = zW(z) - zw[0] \tag{5.135}$$

如果初始状态 $w[0]=0$，那么在时域上前进一步就对应于在变换域上乘以 z。在第 1 章介绍的双边 z 变换中，求和的下限是 $-\infty$ 而不是 0，在时间上前进一个时刻则只要在变换域上乘以 z，不需要对初始值做调整。

考虑式(5.67)中的非耦合 DT 模态方程的单边 z 变换，重写这个结果，即

$$R_i(z) = \frac{1}{z-\lambda_i}(zr_i[0] + \beta_i X(z)), \quad i = 1,2,\cdots,L \tag{5.136}$$

它的反变换恰恰是式(5.68)中的 $r_i[n]$ 的时域解，这个时域解在前面等式中写成了 ZIR 与 ZSR 的和。现在则有了这个解的变换域的推导。

类似的，考虑式(5.69)中输出方程的 z 变换，代入上面的关系式中，可得到

$$Y(z)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\xi_i R_i(z)\Big)+dX(z)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{z\xi_i r_i[0]}{z-\lambda_i}\Big)+\Big(d+\sum_{i=1}^{L}\frac{\xi_i\beta_i}{z-\lambda_i}\Big)X(z) \tag{5.137}$$

像 CT 情况一样，传递函数 $H(z)$是

$$H(z)=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{\xi_i\beta_i}{z-\lambda_i}\Big)+d=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\beta}+d=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d \tag{5.138}$$

隐藏模式的概念，可达性和可观测性的定义，最小实现形式，这些都可以不用改变地应用到 DT 情况中。下面的例子将说明这些问题。

211

例 5.9 评估 DT 系统的可达性和可观测性

考虑 DT 系统用如下状态方程表示：

$$\begin{bmatrix}q_1[n+1]\\q_2[n+1]\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&\frac{5}{2}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}q_1[n]\\q_2[n]\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}x[n] \tag{5.139}$$

$$y[n]=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}q_1[n]\\q_2[n]\end{bmatrix}+x[n] \tag{5.140}$$

式(5.139)和式(5.140)表示的一个延迟-加法-增益的框图如图 5.9 所示。

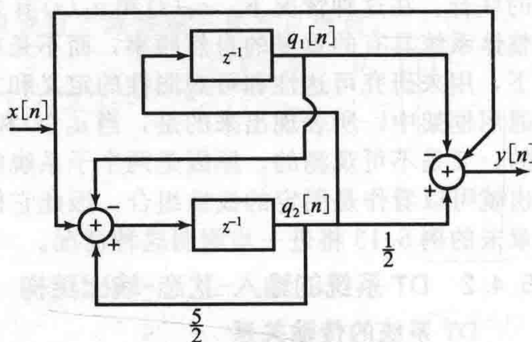


图 5.9 例 5.9 中系统的延迟-加法-增益框图

这个系统的模式对应于特征多项式的根，特征多项式是

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^2-\frac{5}{2}\lambda+1 \tag{5.141}$$

根是

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\frac{1}{2} \tag{5.142}$$

因为$|\lambda_1|>1$，系统不是渐进稳定的，通过求解式(5.143)，可以得到对应的特征向量：

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda-\frac{5}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{5.143}$$

可得 $\lambda=\lambda_1=2$，以及 $\lambda=\lambda_2=\frac{1}{2}$。于是

212

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \tag{5.144}$$

这个系统的输入输出传递函数是

$$H(z)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d \tag{5.145}$$

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\begin{bmatrix}z-\frac{5}{2}&1\\-1&z\end{bmatrix} \tag{5.146}$$

$$H(z)=\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\left\{\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-\frac{5}{2}&1\\-1&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}+1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{z-2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{5.147}$$

由于极点在单位圆内，系统是输入输出稳定的。然而，系统有两个模式。因此，一个模式必定是隐藏的，也就是说，它不出现在输入输出传递函数中。隐藏模式从输入中是不可达的，或者在输出中也是不可观测的，或者两种情况都是。为了检查可达性，注意到这个例子中的输入向量 $\boldsymbol{b}$ 不能写成 $\boldsymbol{v}_1$ 或 $\boldsymbol{v}_2$ 的倍数，那么就要用两个特征向量的一个线性组合来得到 $\boldsymbol{b}$。系统因此是可达的(尽管 $\boldsymbol{b}$ 本身中的有一项为 0)。然而，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_1=0$，因此第一个模式是不可观测的(尽管 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的两项都是非零的)，而且这正是隐藏在 $H(z)$中的模式。◀

最小实现形式的概念有助于说明例 4.6，这里对于一个二阶差分方程，其不同阶数的状态空间的实现形式被构造了出来。下面的例子表明，差分方程的三阶实现形式是非最小的实现形式。

例 5.10 非最小实现

在例 4.6 中得到的二阶差分方程的三阶实现如下所示：

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{q}[n] + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \tag{5.148}$$

$$y[n] = \underbrace{[1 \quad 0 \quad 0]}_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{q}[n]$$

213

其二阶差分方程为

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \tag{5.149}$$

容易看出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1=0$，其中 $\boldsymbol{v}_1=[0 \quad b_2 \quad a_2]^{\mathrm{T}}$。从这里可以推断出 $\lambda_1=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，相应的特征向量是 $\boldsymbol{v}_1$，假设 b_2 和 a_2 并不全都为 0。现在 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_1=0$，这证明了这是系统的一个不可观测模式(尽管这是一个非常良好的情况，但是其对应的模态贡献在一个时间步进上就会消失)。这里推断出三阶系统不是最小的，因此式(5.149)的输入输出关系式可以由更低阶的系统实现。◀

对于 CT 和 DT 系统，可达性的概念是用从输入激活系统的所有模式的能力来引入的。下面的例子中，通过提出从状态空间的原点到达特定的目标状态的问题的关联性，以及通过输入信号的合理选择，拓展了可达性概念的范围。这里讨论的 DT 情况对 CT 情况也有类似的结论。

例 5.11 到达一个目标状态的输入设计

考虑 L 阶 DT LTI 状态空间模型，它的状态是

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{b}x[n] \tag{5.150}$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 有相异的特征值 λ_1，…，λ_L，相应的独立特征向量是 $\boldsymbol{v}_1$，…，$\boldsymbol{v}_L$。式(5.56)中定义的常量 β_1，…，β_L 作为权重来表征 $\boldsymbol{b}$ 为特征向量的一个线性组合：

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_1\beta_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_L\beta_L$$

假设系统是可达的，那就是说，所有的 β_i 都是非零的，在时刻 0 从原点开始，因此 $\boldsymbol{q}[0]=\boldsymbol{0}$。这里希望找到有 L 个输入的一个序列 $x[0]$，$x[1]$，…，$x[L-1]$，因此，对于确定但是任意的 γ_1，…，γ_L，时刻 L 的状态值是：

$$\boldsymbol{q}[L] = \boldsymbol{v}_1\gamma_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_L\gamma_L \tag{5.151}$$

换句话说，就是希望能找到 L 个输入的一个序列，能从原点开始，在 L 个步进内，就能到达任何特定的目标状态。

式(5.65)表示为

$$\boldsymbol{q}[L] = \boldsymbol{v}_1 r_1[L] + \cdots + \boldsymbol{v}_L r_L[L] \tag{5.152}$$

因此，L 个输入的序列必须保证 $r_i[L]=\gamma_i$，$i=1, 2, \cdots, L$，从 $r_i[0]=0$ 开始。式(5.68)的显式解是

214

$$\gamma_i = r_i[L] = \sum_{k=0}^{L-1} \lambda_i^{L-1-k} \beta_i x[k] \tag{5.153}$$

对所有的 i，上面的解都可以被排列到下面的矩阵形式中，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_L\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta_1 & \lambda_1\beta_1 & \lambda_1^2\beta_1 & \cdots & \lambda_1^{L-1}\beta_1\\ \beta_2 & \lambda_2\beta_2 & \lambda_2^2\beta_2 & \cdots & \lambda_2^{L-1}\beta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_L & \lambda_L\beta_L & \lambda_L^2\beta_L & \cdots & \lambda_L^{L-1}\beta_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[L-1]\\ x[L-2]\\ \vdots\\ x[0]\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{L-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{L-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_L & \lambda_L^2 & \cdots & \lambda_L^{L-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[L-1]\\ x[L-2]\\ \vdots\\ x[0]\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所有的 β_i 都是非零的，因为系统是可达的，所以后面等式右边的第一个矩阵是可逆的，第二个矩阵称为 Vandermonde 矩阵，当且仅当 λ_i 相异时，它是可逆的。(如果具有相异的 λ_i 的 Vandermonde 矩阵不可逆，那么它的列向量的某个非平凡线性组合加起来等于零向量，但是那就意味着可以构建一个有 L 个相异解的 $L-1$ 阶的多项式，这会产生矛盾。)

接下来，方程的上类集合可以被求解，以此来找出 $x[0]$，$x[1]$，$\cdots$，$x[L-1]$，

$$\begin{bmatrix}x[L-1]\\ x[L-2]\\ \vdots\\ x[0]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{L-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{L-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_L & \cdots & \lambda_L^{L-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_L\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_L\end{bmatrix}$$

在二阶系统的情况下，例如

$$\begin{bmatrix}x[1]\\ x[0]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{bmatrix}\lambda_2 & -\lambda_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1/\beta_1\\ \gamma_2/\beta_2\end{bmatrix} \tag{5.154}$$

这个二阶例子表明 λ_1 和 λ_2 越接近，需要得到一个给定的目标状态的输入值就越大。同时，比值 γ_i/β_i 的值越大，要求的输入也越大。

现在假设仅仅第一个模式是不可达的，即假设 $\beta_1=0$，其他的 β_i 都是非零的。前面的公式表明，通过控制输入，从原点——即 $\boldsymbol{q}[0]=\mathbf{0}$ 时——可达的状态集合被限定在状态空间的 $L-1$ 维子空间里，这个状态空间跨越与可达模式相关的特征向量的范围。与上面相似的计算证明，在这个可达的子空间内，通过输入的合理选择，任何目标状态可以从原点开始在 $L-1$ 步之内达到。

更一般来说，状态空间的一个部分通过输入控制能从原点可达，这个部分是可达模式的特征向量跨度范围内的子空间。这就意味着，当且仅当通过输入信号的合理选择，系统能从状态空间的原点到达一个任意的目标状态时，系统是可达的。(这些结论在 CT 系统中依然成立，尽管要求到达的一个目标状态的精确输入历史不能被清楚地计算出来。)

一个系统的自然动态和施加在系统上的外部输入产生的运动之间的相互影响，将在下面的观察中进行清楚的分析。对于阶数≥2 的 DT LTI 系统，强制状态从原点严格沿着特征向量向外移动是不可能的，例如它的第一个特征向量 $\boldsymbol{v}_1$。原因是这会要求所有的 $r_i[n]$ ($i\neq 1$，$n>0$)保持为 0，而 $r_1[n]$会从 0 移动到一连串的非 0 值。对于一个可达系统，这是不可能的，因为所有 $r_i[n]$都被输入同时激活。因此，在一个可达的 L 阶 DT 系统中，在 L 步内可以到达状态空间的任何点，包括形如 $\mathbf{q}[L]=\gamma_1\boldsymbol{v}_1$(对任意的 γ_1)的点，却没有必要在少于 L 步到达这个点。◀

215

可达性和可观测性矩阵

例 5.11 讨论的从原点到达目标状态的问题，也可以不参考模态坐标来解决，而是直

接用初始系统描述来完成。对于 DT 情况，可以从式(5.3)中的 LTI 状态空间模型开始。通过 $x[0]$的合理选择，在一步之后从原点可以达到的状态集合就是 $\boldsymbol{q}[1]=\boldsymbol{b}x[0]$，也就是说，状态在向量 $\boldsymbol{b}$ 组成的线上。通过 $x[0]$和 $x[1]$的合理选择，在两步之后从原点可以达到的状态集合的形式是

$$\boldsymbol{q}[2]=\boldsymbol{Ab}x[0]+\boldsymbol{b}x[1] \tag{5.155}$$

这就是说状态在向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Ab}$ 组成的平面上。照这样的方式继续，可以推断出——而且这已经明显体现在式(5.104)中——在 L 步之后从原点开始可以到达的状态集合是由 $L\times L$矩阵的列向量组成的空间

$$\boldsymbol{R}_L=[\boldsymbol{A}^{L-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^{L-2}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{Ab} \quad \boldsymbol{b}] \tag{5.156}$$

这个空间称为 $\boldsymbol{R}_L$ 的范围。注意到这个推理虽然并没有假设 $\boldsymbol{A}$ 有相异的特征值，但是在普遍情况上仍然成立。在相异特征值的假设下，可达空间必须等于由系统可达模式的特征向量组成的空间。矩阵 $\boldsymbol{R}_L$ 称为L 阶可达矩阵，或者简称为可达矩阵。如果系统仅有 $p<L$个模式是可达的，那么可达空间也是由 $\boldsymbol{R}_p$ 的列所组成的，且增加更多的列不会增加可达状态的集合。

对于如式(5.1)形式的 CT 系统，推导是不同的。这里省略细节，但是注意到和DT 情况有一样的结论：从 $\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0}$ 开始，使用一个合理选择的输入，在有限的时间内可达的状态集合正是上面矩阵 $\boldsymbol{R}_L$ 的范围。

类似于例 5.11 的一个方法可以用来提供可观测的几何图形。定义不可观测的子空间为对应于不可观测模式的特征向量组成的空间。那么可以证明，当且仅当初始条件在不可观测子空间中，对于给定的初始条件 $\boldsymbol{q}[0]$的系统零输入响应，当所有的 $n\geqslant 0$ 时，都是 0。那么对于 $n\geqslant 0$，从输入输出信号的认知中确定系统初始状态的任何尝试，都只能够确定以不可观测子空间为模的这个初始状态。换句话说，对于给定的输入，用一个不可观测子空间的向量置换初始状态不会改变输出。

这里也可以使用一个矩阵来确定不可观测子空间，该矩阵是式(5.156)中的 L 阶可达矩阵的“对偶(dual)”。特别地，考虑式(5.3)和式(5.4)表明不可观测的子空间正好是与下面$L\times L$矩阵的行的正交向量的集合，这个 $L\times L$ 矩阵称为 L 步可观测矩阵，即 216

$$\boldsymbol{O}_L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{L-2}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{L-1}\end{bmatrix} \tag{5.157}$$

这个空间称为 $\boldsymbol{O}_L$ 的零空间。

尽管这里一直关注的是 LTI 系统，某些已有的研究也可以应用到线性周期变化(LPV)系统中。下面的例子将显示如何评估 LPV 系统的渐进稳定性。

例 5.12 LPV 系统的渐进稳定性

LPV 系统的稳定性可以由接近于 LTI 系统使用的方法进行分析。例如，假设

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{q}[n],\quad \boldsymbol{A}[n]=\boldsymbol{A}_0,n\text{ 为偶数},\quad \boldsymbol{A}[n]=\boldsymbol{A}_1,n\text{ 为奇数} \tag{5.158}$$

那么

$$\boldsymbol{q}[n+2]=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{q}[n] \tag{5.159}$$

所以对于偶数 n，偶数采样的动态由 LTI 模型所控制，且偶数采样的稳定性由常数矩阵 $\boldsymbol{A}_{\text{even}}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_0$ 的特征值确定。

相似地，奇数采样的稳定性是由矩阵 $\boldsymbol{A}_{\text{odd}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1$ 的特征值所控制。矩阵 $\boldsymbol{A}_{\text{odd}}$ 的非零特征值与 $\boldsymbol{A}_{\text{even}}$ 是相同的，这是因为，如果 λ 是 $\boldsymbol{A}_{\text{even}}$ 的一个非零特征值，也就是说，对于非零的 λ 和 $\boldsymbol{v}$，如果 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$，那么 $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v}$ 必是非零的，且有$(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1)(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v})=\lambda(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v})$，因此 λ 也是 $\boldsymbol{A}_{\text{odd}}$ 的特征值。所以每一个矩阵都可以用来进行稳定性检测。

作为一个例子，可以假设

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4.25 & -1.25\end{bmatrix} \tag{5.160}$$

它们各自的特征值是(0，3)和(1.53，−2.78)，因此两个矩阵都有大于1的幅度特征值。现在

$$A_{\text{even}}=A_1A_0=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0.5\end{bmatrix} \tag{5.161}$$

它的特征值是(0，0.5)，这对应于一个渐进稳定系统。◀

用一个例子来总结本章，这个例子很好地、比较简短地且系统地解释了，当特征值并不相异的时候，系统的性质是如何变化，以及如何变得更复杂的。这个例子是 DT 情况下的，但对于 CT 情况也是类似的。

217

例 5.13 非相异特征值的可达性和可观测性

在本例中，考虑式(5.3)和式(5.4)所给形式的三个差分三阶 DT LTI 系统，对相应的状态演化矩阵 $\boldsymbol{A}$，具有下面的各自不同的选择。

$$A_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix} \tag{5.162}$$

所有这些矩阵都有三个特征值 λ_1，但在结构上不同。如图 5.10 所示，它们的结构差异非常明显，为了避免框图的杂乱，该图仅显示了对应的系统，忽略了输入信号 $x[n]$ 或者输出信号 $y[n]$。

矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 仅有一个独立的特征向量，如 $\boldsymbol{v}_1=[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$。满足 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 的任意一个其他向量都是 $\boldsymbol{v}_1$ 的线性乘积。

矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 有两个独立的特征向量，$\boldsymbol{v}_1$ 与前面的相同，但是还有 $\boldsymbol{v}_2=[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 的任一其他解 $\boldsymbol{v}$ 都是这两个向量的线性组合。

矩阵 $\boldsymbol{A}_3$ 有三个无关的特征向量，$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和前面一样，$\boldsymbol{v}_3=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$。$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 的任一其他解 $\boldsymbol{v}$ 都是这三个向量的线性组合。

在 $\boldsymbol{A}_3$ 情况下，系统已经是对角化的形式，因此本章中的一些分析可以直接被运用。相对应的系统状态的 ZIR 仅仅涉及指数形式 λ_1^n。系统的传递函数也表明，最多，在 λ_1 有一个单极点，没有重复的极点，这说明在这种情况下至少有两个隐藏模式。一旦可达性的概念拓展到重复特征值情况下(在这里不会对这种情况进行研究)，就可以证明，三个模式中的两个总是不可达的，即使图 5.10c 中从 $x[n]$ 到三条并行路径的耦合是非零的。原因是通过控制单一的输入信号 $x[n]$，不能使得系统的三个分支被其他的分支彼此独立地激活。相似地，一旦可观测性的概念扩展到重复特征值情况下(在这里不会对这种情况进行研究)，就可以证明，三个模式中的两个是不可观测的，即使图 5.10c 中从三条并行路径到 $y[n]$ 的耦合是非零的。原因是基于单一的输出信号 $y[n]$，系统的三个分支的响应不能分别测试出来。$\boldsymbol{A}_3$ 发生的事情本质上是 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 会发生的事情，$\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 λ_1，且含有 3 个与 λ_1 相关的独立特征向量。

对于 $\boldsymbol{A}_2$，状态 ZIR 以前用形式 λ_1^n 表示，也用形式 $n\lambda_1^{n-1}$ 表示。传递函数表明，最多有两个在 λ_1 的极点，这就是说至少有一个隐藏模式。事实上对于这个结构，至少有一个模式总是不可达的，且至少有一个模式总是不可观测的。$\boldsymbol{A}_2$ 发生的事情本质上是 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 会发生的事情，$\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 λ_1，且仅有两个与 λ_1 相关的独立特征向量。

对于 $\boldsymbol{A}_1$，状态 ZIR 以前用形式 λ_1^n 表示，也用形式 $n\lambda_1^{n-1}$ 和 $n^2\lambda_1^{n-2}$ 表示。传递函数被

证明有三个在 λ_1 的极点，当且仅当在图 5.10a 中，从 $x[n]$ 到三级中的第一级有非零耦合，且从三级中的最后一级到 $y[n]$ 有一个非零耦合时，该情况成立。等价的，在传递函数中发现三个极点，当且仅当输入向量 $\boldsymbol{b}$ 的最下面一项是非零的，且输出向量 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 最左边的项是非零的时候，该情况成立。在这些条件下，系统是可达的和可观测的。当这些条件不成立时，就会在可达性和可观测性上有更多的限制。所看到的 $\boldsymbol{A}_1$ 发生的事情在本质上是 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 会发生的事情，$\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 λ_1，且只有 1 个与 λ_1 相关的独立特征向量。 218

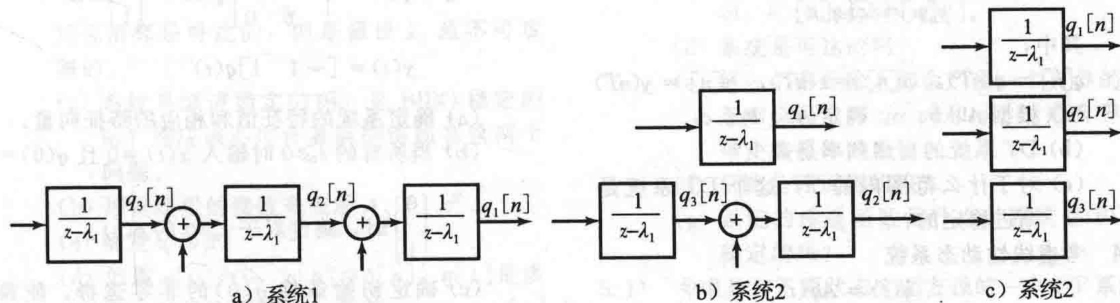


图 5.10 例 5.13 中三个系统的结构框图

第 6 章通过一个系统动态模型，检验如何认知一个系统的输入和输出波形，并推断系出统的内部状态。那么这将为设计一个反馈控制方案来调整系统行为，提供一个合理的基础。

5.5 延伸阅读

第 4 章结束时候的延伸阅读也可以用于本章。基本资料可以在[Edw]找到。LTI 系统的动态特性，通常包括第 6 章中的状态估计和状态反馈控制方法，在很多书中都有讨论，例如[Ant][Ch2][Ka1][Lue]和经典的[Zad]。对于非线性系统的拓展，可参考[Kha][Slo][Vid]。 219

习题

基础习题

5.1 考虑下面等式描述的非线性时不变状态空间模型

$$\dot{q}_1(t)=q_2(t)$$
$$\dot{q}_2(t)=-\beta q_1^3(t)+x(t)$$

其中，β 是某个正常数。

(a) 如果输入 $x(t)$ 是一个固定的正常数 $\bar{x}>0$，确定 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 各自分别对应的可能的平衡值 $\bar{q}_1$ 和 $\bar{q}_2$。

(b) 如果输入从它的平衡值偏离 $\tilde{x}(t)=x(t)-\bar{x}$，并且如果状态变量各自相应地从平衡位置偏离 $\tilde{q}_1(t)=q_1(t)-\bar{q}_1$ 和 $\tilde{q}_2(t)=q_2(t)-\bar{q}_2$，找出一个线性化的 LTI 状态空间模型，以近似地描述这些小的偏差与其他偏差是如何彼此联系起来的。换句话说，确定一个 $\tilde{q}_1(t)$ 和 $\tilde{q}_2(t)$ 作为状态变量、$\tilde{x}(t)$ 作为输入的 LTI 状态空间模型。

(c) 你的线性化模型是否渐进稳定？

5.2 一个单位质量的特定物体限制在一条直线上运动，并有一个外力 $x(t)$ 作用其上，且被一个立方弹簧控制。系统用下面的方程描述

$$\frac{\mathrm{d}^2p(t)}{\mathrm{d}t^2}+kp(t)-\varepsilon p^3(t)=x(t)$$

其中，$p(t)$ 表示物体的位置，$p^3(t)$ 表示位置的立方；k 和 ε 是已知的正常数。

(a) 使用物理意义上的状态变量，得到上述系统的状态空间模型。$x(t)$ 是输入，输出 $y(t)$ 是物体的位置。

(b) 假设对所有的 t，$x(t)=0$，系统在平衡状态中。你将会发现这个系统的三个可能的平衡条件。在每一种状态平衡下，确定你的状态变量的值，用参数 k 和 ε 表示结果。

(c) 对于在(b)中确定的三个平衡位置中的每一个平衡位置，得出一个线性化的状态空间模型，该模型可以近似地描述从平衡位置的小偏移。如果有的话，哪一个线性化的模型是渐进稳定的？

5.3 考虑下面一个 CT 系统的状态空间方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

其中，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{-1}$$

假设系统是渐进稳定的，要在数字计算

机上仿真这个系统，使用输入、状态、输出在 $t=nT$ 的采样值，一个前向差分在 $t=nT$ 时的逼近是 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$（这是前向欧拉逼近），例如

$$\dot{\boldsymbol{q}}(nT) \approx \frac{1}{T}[\boldsymbol{q}(nT+T)-\boldsymbol{q}(nT)]$$

所得到的 DT 系统可以写成

$$\boldsymbol{q}[n+1] \approx \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}_d x[n]$$
$$y[n] \approx \boldsymbol{c}_d^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}[n]$$

其中，

$$\boldsymbol{q}[n]=\boldsymbol{q}(nT),\quad x[n]=x(nT),\quad y[n]=y(nT)$$

(a) 根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，确定 $\boldsymbol{A}_d$、$\boldsymbol{b}_d$、$\boldsymbol{c}_d$。

(b) DT 系统的自然频率是多少？

(c) 对于什么范围内的 T，这个 DT 系统是渐进稳定的？

5.4 考虑线性动态系统

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

其中，

$\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵，特征值是 +1、−1，相应的特征向量是 $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$，且 $c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$。

(a) 当 $q(0)=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$ 时，确定 $t\geqslant 0$ 时的 $\boldsymbol{q}(t)$ 和 $y(t)$。

(b) 确定所有可能的初始状态 $\boldsymbol{q}(0)$，使得输出对于 $t\geqslant 0$ 有界。例如对所有的 $t\geqslant 0$ 存在某个 M，使得 $|y(t)|\leqslant M$。

5.5 考虑一个二阶的 CT 因果 LTI 系统，传递函数

$$H(s)=\frac{s+1}{s+3}$$

标准形式的状态空间描述为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

假设已知

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

也知道某个特定的初始状态 $\boldsymbol{q}(0)$，对所有的 t 输入 $x(t)=0$，得到

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$$

(a) 确定 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{c}^T$、d。

(b) 如果 $\boldsymbol{q}(0)$ 与 (a) 中的相同，但是现在对所有的 $t\geqslant 0$，输入为 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}$，确定 $y(t)$。

(c) 如果 $\boldsymbol{q}(0)$ 与 (a) 中的相同，但是对所有的 $t\geqslant 0$，输入为 $x(t)=q_1(t)-\frac{1}{8}q_2(t)$，则 $y(t)$ 的通用形式是什么？没必要计算出所有的常数，但是应该至少能够确定 $y(t)$ 是否衰减、增长或者振荡，有什么速率，或者确定它保持为常数。

5.6 考虑一个二阶状态空间模型描述的系统

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x(t)$$
$$y(t)=[-1\quad 1]\boldsymbol{q}(t)$$

(a) 确定系统的特征值和相应的特征向量。

(b) 当所有的 $t\geqslant 0$ 时输入 $x(t)=0$ 且 $q(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 时，确定对于 $t\geqslant 0$ 的 $\boldsymbol{q}(t)$。

(c) 确定初始条件 $q(0)$ 的非零选择，使得 $t\to\infty$，ZIR 衰减到 0

5.7 考虑一个特定因果系统的二阶状态空间模型

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

假设知道系统的传递函数

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{(s-3)(s+4)}$$

如果给定系统的零输入，对于所有的 $t\geqslant 0$，输入 $x(t)=0$，那么状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$ 的轨迹符合如图 P5.7 所示的轨迹（带箭头的实线），一些差分初始条件 $\boldsymbol{q}(0)=[q_1(0)\quad q_2(0)]^{\mathrm{T}}$，在图中用圆圈图案表示出来。

(a) 确定矩阵 $\boldsymbol{A}$。

(b) 系统是可达的吗？是可观测的吗？

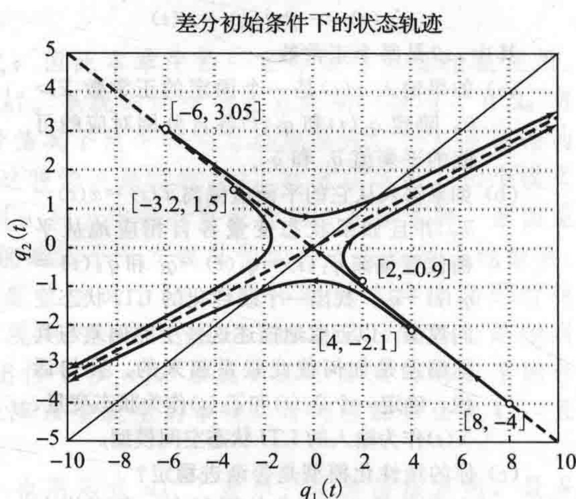


图 P5.7

5.8 考虑图 P5.8 中框图表示的因果 DT 系统，其中 D 表示一个延时单元。系统可以用二阶

状态空间模型来描述

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n]$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n]$$

其中，$\boldsymbol{q}[n]=\begin{pmatrix}q_1[n]\\ q_2[n]\end{pmatrix}$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$。两个特征值都是可达的，但是假设 λ_1 是不可观测的。

(a) 系统是渐进稳定的吗？是 BIBO 稳定的吗？你应该不用计算就能够回答这两个问题。

(b) 用框图里的参数来表示 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$。

(c) 确定 α 和 β。

(d) 如果 $\boldsymbol{q}[0]=0$，$x[n]=\delta[n]$，$\boldsymbol{q}[1]$ 是多少？对于这种情况，随着 $n\to\infty$，$q_1[n]$ 和 $q_2[n]$ 趋于 0 吗？

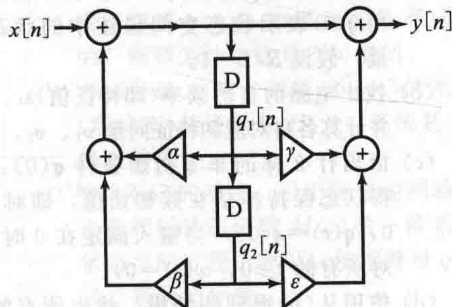


图　P5.8

5.9　考虑二阶差分方程

$$y[n]-3y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1]+4x[n-2]$$

(a) 确定上面差分方程的 4 阶、3 阶、2 阶状态空间模型。

(b) 对于(a)中的每一个状态模型，确定所有的模态频率，也就是特征值，以及相对应的模式形状，即特征向量。

(c) 对于(b)中的三阶模型的每一个模态频率，确定：

(i) 是否与这个频率相关的模式是可达的。

(ii) 是否它是可观测的。

结果能表明为什么这里可能有一个具有相同的输入输出行为的二阶模型吗？现在测试你的二阶模型的可达性和可观测性。还有其他原因能认为存在一个更低阶(如，一个一阶系统)且有相同的输入输出行为的模型吗？

5.10　给定下面一个因果系统的状态空间模型

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{q}[n]+\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[0\quad 1]\boldsymbol{q}[n]$$

(a) 系统的自然频率或者特征值是什么？

(b) 找到一个非零初始条件 $\boldsymbol{q}[0]$，在这种条件下，状态向量的 ZIR 渐进衰减到 0。解释你的原因。

(c) 找到一个非零初始条件 $\boldsymbol{q}[0]$，在这种条件下，状态向量的 ZIR 不会移动，例如，$k>0$，$\boldsymbol{q}[k]=\boldsymbol{q}[0]$。

(d) 系统是可达的吗？

(e) 每一个有界输入都会产生一个有界的状态响应吗？即 $q_1[n]$ 和 $q_2[n]$ 是有界的吗？解释你的原因。

(f) 系统是可观测的吗？

(g) 系统的传递函数是什么？系统是 BIBO 稳定的吗？

5.11　考虑具有下面状态空间方程的一个 DT 系统

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{q}[n]+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}\frac{6}{5} & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{q}[n]$$

(a) 找出系统的自然频率，并确定系统是否为渐进稳定的。

(b) 确定系统的哪个自然频率是可达的。

(c) 确定系统的哪个自然频率是可观测的。

(d) 假设对所有的 $n\geqslant 0$，输入 $x[n]=0$，确定 $\boldsymbol{q}[0]$ 的所有的值同时满足下面两个条件：

(i) $y[0]=5$

(ii) $n\to\infty$，$y[n]$ 衰减到 0。

5.12　一个因果 LTI 系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\mathrm{d}x(t)$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=[3\quad -2]$，$d=0$。

(a) 找出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1、λ_2，以及对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$。

(b) 系统是渐进稳定的吗？

(c) 系统是可达的吗？是可观测的吗？

(d) 找出系统函数 $H(s)=Y(s)/X(s)$。

(e) 当输入有界并且系统在零状态的初始条件下时，系统输出是有界的吗？使你的答案和(b)中的答案一致。

5.13　考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}x(t)$$

$$y(t)=[1\quad -1]\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{pmatrix}$$

(a) 系统是渐进稳定的吗？

(b) 系统是可达的吗？是可观测的吗？

(c) 确定系统的传递函数。

(d) 如果对所有的 $t\geqslant 0$，输入 $x(t)=0$，$y(t)=0$，可以推出 $\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 吗？如果可以，解释原因。如果不可以，找出 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 的非零解。

5.14 一个系统输入是 $x(t)$，输出是 $y(t)$，用状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$ 描述，如下面所示：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=[2 \quad -3]\boldsymbol{q}(t)$$

(a) 系统是可观测的吗？如果不是，找出不可观测的模式。

(b) 系统是可达的吗？如果不是，找出不可达的模式。

(c) 系统不是渐进稳定的。是 BIBO 稳定的吗？

5.15 考虑下面的因果 DT 状态空间系统

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n]$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n]$$

其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 未知。

(a) 确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1、λ_2，以及相关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$。

(b) 指出所有的可能初始条件(例如 $\boldsymbol{q}[0]$)，使得 ZIR 渐进衰减到 0。

(c) 指出下面的方程，如果有的话，能成为系统的 ZSR 系统函数吗？

(i) $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

(ii) $H(z)=\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

(d) 希望用新的状态变量集合来描述系统

$$f[n]=\begin{bmatrix} f_1[n] \\ f_2[n] \end{bmatrix}$$

其中，$f_1[n]=q_1[n]+q_2[n]$，$f_2[n]=q_1[n]-q_2[n]$。换句话说，希望用下面方程描述系统：

$$\boldsymbol{f}[n+1]=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f}[n]+\overline{\boldsymbol{b}}x[n]$$

$$y[n]=\overline{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}[n]+\overline{d}x[n]$$

(i) 根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$、d，来确定 $\overline{\boldsymbol{A}}$、$\overline{\boldsymbol{b}}$、$\overline{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}$、$\overline{d}$。

(ii) 希望用下面的通用形式来表示系统的 ZIR

$$\boldsymbol{f}[n]=\alpha_1\overline{\lambda}_1^n\overline{\boldsymbol{v}}_1+\alpha_2\overline{\lambda}_2^n\overline{\boldsymbol{v}}_2$$

其中，α_1 和 α_2 是常数，确定 $\overline{\lambda}_1$、$\overline{\lambda}_2$、$\overline{\boldsymbol{v}}_1$、$\overline{\boldsymbol{v}}_2$。

5.16 考虑图 P5.16 中的电路，源电压 $w(t)$ 作为输入，通过电阻后的电压 $u_R(t)$ 的电压作为输出。

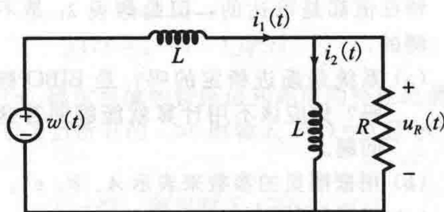


图 P5.16

(a) 选择 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 作为电路的状态变量，确定相应的状态空间方程。在下面，使用 $\boldsymbol{q}(t)$ 表示状态空间描述中的状态向量。假设 $R/L=1$。

(b) 找出电路的自然频率(即特征值) λ_1、λ_2，并计算各自对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$。

(c) 指出什么样的非零初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$，使得状态保持冻结在其初始值，即对 $t\geqslant 0$，$\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{q}(0)$，当输入固定在 0 时(即对所有的 $t\geqslant 0$，$w(t)=0$)。

(d) 使用从(b)得到的结果，找出所有的初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$，当输入固定在 0 时，随着 $t\to\infty$，使得 $\boldsymbol{q}(t)$ 的每一个分量都渐进地衰减到 0。

(e) 使用从(a)(b)得到的结果，找出所有的非零初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$，当输入固定在 0 时，随着 $t\to\infty$，使得输出 $u_R(t)$ 渐进地衰减到 0。

5.17 给定下面的一个 CT 因果系统的状态向量模型：

$$\dot{\boldsymbol{q}}[t]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{q}[t]+\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}x[t]$$

$$y[t]=[-1 \quad 0]q[t]+x(t)$$

对于下面所有的问题，在你的答案后面解释原因。

(a) 确定系统的自然频率，即控制状态演化的矩阵特征值 λ_1、λ_2，并找出各自对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$。

(b) 假设对于所有的 $t\geqslant 0$，输入 $x(t)=0$。确定所有可能的非零初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$，使得状态渐进为 0，即 $\boldsymbol{q}(0)$ 的分量 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 变为 0。系统是渐进稳定的吗？

(c) 对于 $x(t)\equiv 0$，假设初始条件不是(b)

中确定的任意一个。尽可能多地指出细节，确定状态在哪里结束，即$q(\infty)$是什么？

(d) 证明系统有一个不可达模式，并确定哪一个模式(或特征值)是不可达的。如果系统还是以$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0}$开始，且允许使用任意所希望的$x(t)$，那么对于任意的$t$，就存在某个二维状态空间的范围，可以保证$\boldsymbol{q}(t)$不在该范围之内。尽可能完整地确定出这个不可达范围。

(e) 假设$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0}$，对于所有的时间，$x(t)$是已知有界的，即$x(t)\leqslant M<\infty$，但是在其他方面是未知的。$q_1(t)$能保证是有界的吗？$q_2(t)$能保证是有界的吗？

(f) 证明系统是可观测的。

(g) 使用上面的状态空间模型，证明在任意时刻t，只需要用$x(t)$、$\dot{x}(t)$、$y(t)$和$\dot{y}(t)$，就能表示$q_1(t)$、$q_2(t)$，而不需要知道$\boldsymbol{q}(0)$。如果系统是不可观测的，解释为什么这是不可能的。

(h) 找出从输入$x(t)$到输出$y(t)$的系统的(零状态)传递函数$H(s)$，系统是BIBO稳定的吗？

(i) 按照给定的系统，写出有着相同输入输出和相同传递函数$H(s)$的一阶系统的状态空间方程。你可以使用符号$q(t)$来表示系统的标量。

5.18 考虑下面的状态空间模型：

$$\dot{\boldsymbol{q}}[t]=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{q}[t]+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x[t]$$

$$y[t]=[1\quad 0]\boldsymbol{q}[t]$$

回答下面的原因，并解释你的原因。

(a) 系统是渐进稳定的吗？

(b) 系统是可观测的吗？

(c) 如果对所有的$t\geqslant 0$，输入$x(t)=0$，是否存在非零初始条件$\boldsymbol{q}(0)$，使得输出响应$y(t)(t\geqslant 0)$恒等于0？若存在，给出一个这样的初始条件的例子。

(d) 系统是可达的吗？

(e) 系统是BIBO稳定的吗？

(f) 如果$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，初始状态是

$$\boldsymbol{q}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

状态向量会渐进到达哪个值，即$\boldsymbol{q}(\infty)$是什么？

(g) 如果输入是恒等于0，即$x(t)=0(t\geqslant 0)$，初始状态是

$$\boldsymbol{q}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

状态向量会渐进到达哪个值？

高级习题

5.19 考虑图 P5.19 中的 LTI 电路。使用电容电压$q_1(t)$、$q_2(t)$作为这个问题的状态变量。

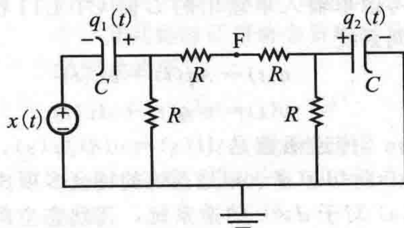


图　P5.19

(a) 假设电路中，对于所有的$t\geqslant 0$，输入$x(t)=0$，通过调用结果电路的对称性，回答下面的问题。

(i) 确定一个初始条件向量$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{w}_1$，使得随后的响应$\boldsymbol{q}(t)(t>0)$在通过F点的两个方向之一上，都包含0电流。证明在这种情况下，$\boldsymbol{q}(t)$的每一项仅仅是单指数$\mathrm{e}^{\mu_1 t}$的倍数，并且确定μ_1。

(ii) 确定一个初始条件$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{w}_2$，使得随后的响应$\boldsymbol{q}(t)(t>0)$在F点对地保持零电势。证明在这种情况下，$\boldsymbol{q}(t)$的每一个分量仅仅是单指数$\mathrm{e}^{\mu_2 t}$的倍数，并且确定$\mu_2$。

(b) 写出电路的二阶CT LTI状态空间描述，F点电势作为感兴趣的输出$y(t)$。在下面的模型中，估计出$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$和$d$。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

其中，$C=1$，$R=4$。

(c) 确定出在(b)中得到的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值λ_1、λ_2，并确定出它们各自相应的特征向量$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$。

(d) 解释由(a)和(b)的计算所得到的量之间的关系。

(e) 仍然假设电路中对所有的$t\geqslant 0$，输入$x(t)=0$，对于(b)中给出的状态演化方程的通解，用λ_1、λ_2、$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$进行表示，得出相应的表达式。对于由$q_1(0)=1$，$q_2(0)=5$所给出的电容上的初始电压的情况，这个表达式能推导出什么？

(f) 运用(b)中状态空间模型的相似变换，选择

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2]$$

$\boldsymbol{M}$的列是在(c)中计算得到的特征向量，

$$\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}(t)$$

确定作为结果的状态空间模型，用 $\dot{r}(t)$作为新的状态向量。

(g) 使用(f)中的结论，确定两个模式各自的可达性和可观测性，从物理意义上进行解释。

5.20 考虑单输入单输出的 L 阶 CT LTI 状态空间系统

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

传递函数是 $H(s)=v(s)/a(s)$，其中 $a(s)=\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$是系统的特征多项式。

(a) 对于 $d\neq 0$ 的逆系统，其状态空间描述涉及相同的状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$，但是这里输入是 $y(t)$，输出是 $x(t)$。确定这个状态空间表示，即用下面的状态空间表示 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$、$d$ 来描述 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{b}_{\mathrm{in}}$、$\boldsymbol{c}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{T}}$、$d_{\mathrm{in}}$。

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}_{\mathrm{in}}(t)$$
$$x(t)=\boldsymbol{c}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+d_{\mathrm{in}}y(t)$$

(b) 假设 $d\neq 0$，由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$、d 来确定 $v(s)$ 的表达式。$v(s)$是上面给出的 $H(s)$来定义的。

5.21 一个涉及单个质量的特定机械系统由差分方程控制，单个质量的位置 $r(t)$由如下方程确定

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)-5\times(1-r^2(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+r(t)=x(t)$$

其中，$x(t)$表示系统上的输入。考虑

$$y(t)=\int_0^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

是感兴趣的输出。

(a) 挑选合适的状态变量，写出一个(非线性)$t\geqslant 0$ 时的系统状态空间描述，该描述由状态演化方程和瞬时输出方程组成。(提示：模型不是二阶的。)你的状态空间描述是时不变的还是时变的？

(b) 确定你的模型中状态变量的平衡值，对应的常数输入为 $x(t)\equiv 0$。然后对于 $x(t)$和状态变量距各自平衡值的小偏差的情况，得到一个描述系统状态和输出行为的线性化模型。

5.22 考虑一个有支撑点悬挂的摆，这个支撑点允许摆在垂直平面内无摩擦力摆动。把摆理想化为一个质点 m，它位于一根无质量的、长度为 R 的杆的末端，用 $\theta(t)$表示摆和向下垂直线之间的角度。γ 表示因重力而产生的加速度。假设在摆上施加一个扭矩 $x(t)$。现在在平面上控制摆以固定角速度 ω_0 旋转，如图 P5.22 所示。

可以证明旋转摆的运动能用下面的方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(t)=\sin\theta(t)\left(\omega_0^2\cos\theta(t)-\frac{\gamma}{R}\right)+\frac{1}{mR^2}x(t)$$

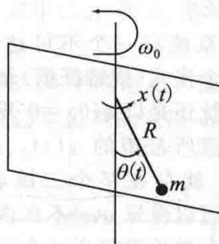


图 P5.22

(a) 选择合适的状态变量，并写出系统的(非线性)状态演化方程和输出方程，$x(t)$作为输入，$\theta(t)$作为输出。

(b) 假设输入扭矩恒等于 0，$x(t)\equiv 0$。如果 $\omega_0^2<\gamma/R$，那么仅有两个平衡点，对应于摆一直向下垂直悬挂，$\theta(t)\equiv 0$，或者在垂直的相反位置，$\theta(t)\equiv\pi$。对应于垂直悬挂的摆的平衡点附近，线性化你的状态空间模型，并计算系统的自然频率(即状态演化矩阵的特征值)。对于任意初始条件的线性化系统的 ZIR 是指数衰减的、指数增长还是振荡的？

(c) 如果输入扭矩恒等于 0，但是 $\omega_0^2>\gamma/R$，这将有 4 个平衡点。其中一个还是对应于向下垂直的悬挂位置，因此围绕这个平衡点的线性化模型与(b)中的模式相同，尽管对于一个参数来说会有变化的符号。计算系统新的自然频率。对于这种情况下的任意初始条件，线性化系统的 ZIR 是指数衰减的、指数增长还是振荡的？并确定线性化的模型是否是可达的，是否是可观测的。

5.23 (a) 假设图 P5.23 中的系统 1 由一阶状态空间模型描述

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma q_1(t)+x_1(t)$$
$$y_1(t)=q_1(t)+x_1(t)$$

其中，γ 是一个参数

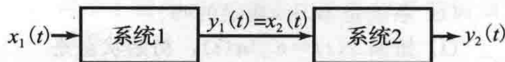


图 P5.23

(i) 求传递函数 $H_1(s)$。

(ii) 对于什么值的 γ，若有的话，状态空间模型是不可达的？是不可观测的？是渐进稳定的？

(b) 假设系统 2 的传递函数是 $H_2(s)=\dfrac{s+1}{s-2}$，找出系统 2 的一个一阶状态空间

模型，使用 $q_2(t)$ 表示它的状态变量。你的模型是可达的吗？是可观测的吗？

(c) (i) 合并(a)和(b)中的状态空间模型，得到整体系统的二阶状态空间模型，使用 $\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$ 作为状态向量，$x_1(t)$ 作为输入，$y_2(t)$ 作为输出。

(ii) 找出系统的自然频率(特征值) λ_1、λ_2。γ 取什么值时，系统是渐进稳定的？同时解释如何选择 $q_1(0)$、$q_2(0)$，使得系统状态向量的 ZIR 仅包含 $e^{\lambda_1 t}$、$e^{\lambda_2 t}$，反之亦然。

(iii) 使用(i)中的模型计算从 $x_1(t)$ 到 $y_2(t)$ 的传递函数 $H(s)$，验证它等于 $H_1(s)H_2(s)$

(iv) γ 取什么值时，若有的话，系统是不可达的？哪一个自然频率是不可达的？γ 取什么值时，系统是不可观测的？哪一个自然频率是不可观测的？用零极点相消来解释你的结果。

(d) 假设在整体系统中，系统 2 在系统 1 前面，颠倒上述系统级联的顺序，因此 $x_2(t)$ 作为整体系统的输入，$y_1(t)$ 作为整体系统的输出。对于这种级联方式，确定一个状态空间模型，并用上面的方法评估互联的可达性和可观测性。若没有细节的分析，对于这种情况下的改变，你如何进行有根据的推测，来回答前面(c)中的(iv)部分的问题。给出你的理由。

5.24 图 P5.24 描述了一个可达和可观测的二阶系统，后面级联了一个可达可观测的三阶系统，整体系统有一个隐藏模式。

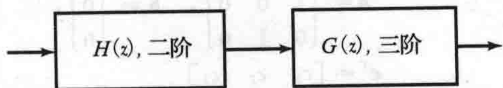


图 P5.24

如果这个隐藏模式在原来的二阶系统中对应于一个极点，整体系统的隐藏模式是不可达的吗？或者是不可观测的吗？请解释。

5.25 考虑一个未驱动的 CT LTI 状态空间模型，其形如 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)$，假设实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个复特征值 $\lambda=\sigma+j\omega$，其中 σ 和 ω 都是实数，$\omega\neq 0$

(a) 解释为什么 λ 对应的特征向量必须是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+j\boldsymbol{w}$ 的形式，对于某些实数 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 构成了一对独立向量(这也暗示 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0}$)。(提示：证明其他的不能满足定义式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$。)

(b) 证明 λ 的复共轭，即 $\lambda^*=\sigma-j\omega$，也是特征值，而且它对应的特征向量是 $\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{u}-j\boldsymbol{w}$。

(c) 对于一个任意初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$，在上面的未驱动方程 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}(t)$ 的模型解中，复共轭特征值将会贡献出具有下面的形式的项

$$\alpha\boldsymbol{v}e^{\lambda t}+\alpha^*\boldsymbol{v}^*e^{\lambda^* t}$$

其中，$\alpha=\gamma+j\xi$，是由特定值 $\boldsymbol{q}(0)$ 来确定的。证明上面的和可以简化成实表达式

$$e^{\sigma t}[\boldsymbol{v}_c\cos(\omega t)+\boldsymbol{v}_s\sin(\omega t)]$$

对于一些可以用给定的量来表达的实向量 $\boldsymbol{v}_c$、$\boldsymbol{v}_s$，你将会注意到这个表达式对应于一个平面上的运动，该平面是由特征向量 $\boldsymbol{v}$ 的实部和虚部组成的，分别记为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$。对于 $\sigma<0$，$\sigma=0$，$\sigma>0$ 的情况，定性地描述运动的趋势。

(d) 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 的矩阵，特征值是 λ 和 λ^*，剩下的特征值是 -10，例如，其相应的实特征向量是 $\boldsymbol{v}_r$。通过解释系统的模态解，定性描述从某个任意初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$ 开始的状态轨迹，即描述轨迹的通用几何形式，把它和 $\boldsymbol{v}_r$ 以及由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 组成的平面联系起来。在 $\sigma<0$，$\sigma=0$，$\sigma>0$ 的情况下完成。

扩展习题

5.26 一个银行研究了信用卡消费者账户的月度状态模型，如下：

账户可能在当前月份(状态 0)付清，或者可能在下个月(状态 1)付清，或者可能在两个月(状态 2)付清，或者可能在三个月(状态 3)付清。对于 $i=0,1,2,3$，令 $q_i[n]$ 表示账户在月 n 时是状态 i 的概率。为了方便，把这些状态可能性安排在一个向量 $\boldsymbol{q}[n]$ 里，令 p_{ij} 表示从当前时刻 n 的状态 j 进入下一个时刻 $n+1$ 的状态 i 的概率，对于所有的 n，假设 $p_{00}=0.9$，$p_{01}=0.5$，$p_{02}=0.3$，$p_{03}=0.2$。

(a) 证明对于某个你完全确定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]$。找出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量。注意这里有一个特征值是 1，而且它相对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 的所有分量全为正；把这个特征值称为 λ_1。同时也注意到其他三个特征值的幅度小于 1。另外，对应于这三个特征值的特征向量的各分量之和为 0，使用这个确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的定义、特征向量和性质，来解释这三个特征向量的

这个特性。(提示：**A** 的列向量加起来等于什么向量?)

(b) 现在详细地解释，对于 n 非常大的情况，不管初始状态占用概率 $\boldsymbol{q}[0]$ 是多少，特征值和特征向量证明状态占用概率是如何渐进一个常数稳定状态值的? 找出这些稳定状态概率，用 $\boldsymbol{q}[\infty]$ 表示相应的向量。接着证明对于 n 非常大(但是在稳定状态达到前)，选择合适的 μ 和 $\boldsymbol{w}$，对于 $\boldsymbol{q}[n]$ 的好的近似具有如下的形式

$$\boldsymbol{q}[n] \approx \boldsymbol{q}[\infty] + \mu^n \boldsymbol{w}$$

确定 $\boldsymbol{\mu}$。同时，对于 $q_0[0]=1$ 的情况，确定 $\boldsymbol{w}$。

5.27 (a) 图 P5.27 所示电路的一个状态空间方程形如

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{b}i(t)$$

$$\nu(t) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t) + di(t)$$

使用电感中的电流 $i_L(t)$ 和电容两端的电压 $\nu_C(t)$ 作为状态变量。在这个问题剩下的部分中，令 L 和 C 等于 1。

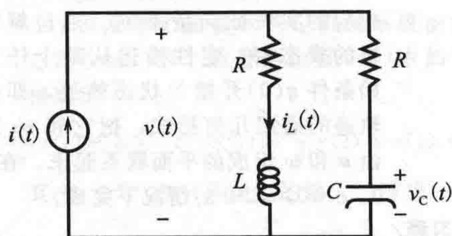


图 P5.27

(b) 根据 R 来计算 **A** 的特征值 λ_1、λ_2，并确定传递函数 $H(s)=V(s)/I(s)$，传递函数可以直接由确定它的输入阻抗得到，或者通过本章给出的表达式从状态空间表示中计算得到，记为

$$H(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d$$

$R\neq 1$，系统是可达的吗? 可观测的吗? 你应该从 $H(s)$ 的表达式中很容易地确定这个问题。

对于(b)中的 $H(s)$ 给出你的表达式，你或许(正确的)认为当 $R=1$ 仅有三个可能性：(i)两个模式都是不可达的；(ii)两个模式都是不可观测的；(iii)一个模式可观测不可达，另一个可达不可观测。然而，正是 $\lambda_1=\lambda_2$ 这个事实，使得对于 $R=1$ 时的可达性和可观测性的讨论变得复杂，而结果是从具有相异特征值的情况中得到的。虽然如此，基本观点仍然保持相同：不可达模式是不能从输入上被激励的模式；不可观测模式是在输出上看不到的模式。在重复特征值的情况下，随着不可达性和不可观测性所包含的概念的掌握，下面的(c)和(d)部分被设计用来帮助你排除上面(i)和(ii)的可能性。这个问题剩下的三个部分仅仅应用于 $R=1$ 的情况下。

(c) 找出从输入 $i(t)$ 到两个状态变量中每一个的传递函数。你可以推断出至少一个模式是可达的吗?

(d) 找出关于任意初始状态 $\boldsymbol{q}(0)$ 到输出 $v(t)$ 的变换域表达式，当输入恒等于 0，$i(t)\equiv 0$。你可以推断出至少有一个模式是可观测的吗?

(e) 对于参数的某个合适的选择，下面的等式中仅有一个能正确表示电路中可能的电压波形 $v(t)$，假设是任意的初始条件和一个任意输入 $i(t)$。确定是哪一个，给出系数，并解释你的原因。

(i) $\nu(t)=\alpha i(t)$

(ii) $[\mathrm{d}\nu(t)/\mathrm{d}t]+\beta\nu(t)=\alpha([\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t]+\beta i(t))$

(iii) $[\mathrm{d}^2\nu(t)/\mathrm{d}t^2]+\gamma[\mathrm{d}\nu(t)/\mathrm{d}t]+\beta\nu(t)=\alpha([\mathrm{d}^2 i(t)/\mathrm{d}t^2]+\gamma[\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t]+\beta i(t))$

5.28 这个问题的目的是帮助你认识当特征值重复时，本章中模态解和可达性的结果是如何改变的。完整的例子将更加负责，但也是基于这里已经给出的观点的(从例 5.13 中也能看出来)。

考虑状态空间模型

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{b}x[n]$$

$$y[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n] + dx[n]$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$$

d 是某个标量常数。

(a) **A** 的特征值是什么? 你可以找到多少个 **A** 的独立特征向量? **A** 可以对角化吗? 即能够用对角矩阵 **Λ** 和某个逆矩阵 **M** 表达成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{M}^{-1}$? (提示：如果一个表示是可能的，**A** 的对角线元素是 **A** 的特征值，**M** 的列向量是相对应的特征向量，**M** 的可逆性保证特征向量是独立的。)

(b) 对于 $k>1$，确定 $\boldsymbol{A}^k$。现在确定，给定一个任意的初始状态和零输入，状态需要经过多少步能变到 0? 因为状态向量的 ZIR 在有限步之内变成 0，所以系

统称为“有限拍的(deadbeat)”，而不是渐进衰减的。

(c) 画出系统的延迟—相加—增益框图，使用这个或者用其他方式，确定从 x 到 y 的单位采样响应 $h[n]$ 和传递函数 $H(z)$。它可以显示出系统有不可达的或者不可观测的特征值吗？对于重复特征值的情况，还没有正式定义过可达性和可观测性，因此在这里你要要求的是，使用任何非正式的概念去猜一个似乎合理的答案，并解释你的原因，

(d) 如果输入向量变成

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

(c)中的答案将如何改变？

5.29 说明一个传递函数的任意两个最小 LTI 状态空间实现形式与一个相似变换有关。

220
~
235

第6章

状态观测器和状态反馈

第5章研究了因果系统的线性时不变状态空间模型的模态表达形式，该形式明确给出了任意时刻的状态，也总结了这样的模式下，与未来行为有关的过去经过的一切情况。更加明确地讲，给出了状态向量在一些初始时刻的值，并给出了从起始时刻到一定时间间隔的整个输入轨迹，在该时间间隔内，可以确定模型的整个未来状态和输出轨迹。相同的一般结论也适用于非线性时变状态空间模型，尽管它们通常非常不易于分析。本章将继续聚焦LTI状态空间模型的分析。

一个典型的情况是，一个系统的完全状态的直接测量是不可得的，因此系统的初始状态是未知的。初始状态的不确定性造成了未来状态轨迹的不确定性，即使系统模型很完美，即使有系统输入的准确信息。因此，初始状态和随后的轨迹都需要进行推断，这种推断需要利用现有的可用信息，即已知的或测量到的信号，并按照这些信号在模型中的相互关联的方式来进行推断。

6.1节和6.2节主要在系统的初始状态不确定的情况下，解决状态轨迹估计的问题。这里将会看到状态实际上可以在适当条件下通过所谓的状态观测器来确定。为了渐进地推断状态轨迹，状态观测器采用了一个依据系统输入和输出轨迹的测量的系统模型。

236

6.3节和6.4节解释了如何控制系统输入以获得令人满意的系统行为。这里论证了对系统当前状态的信息的了解，能够为设计反馈控制达到稳定或者以其他方式提高所得的闭环系统的性能，提供有力的基础。当不能直接测量状态时，可以通过一个观测器所提供的状态估计来满足要求。

6.1 设备和模型

在对实际的、物理的、因果的系统进行学习、协同工作或者控制时，这里通常称这些系统为设备(plant)，区别设备与对设备进行理想建模后的模型是很重要的。通常设备是复杂的、非线性的以及时变的，通常要求状态变量和参数具有无限数量，甚至要用完全连续来进行表征，这样才能达到极限的、无失真的描述设备情况。在另一方面，相对低阶的模型通常是一个理想化的、简化的LTI表达式，旨在获得在某些限制性的运行要求下设备的行为描述，同时又保持对分析、计算、仿真和设计处理的简易性。

模型的输入作用于或者驱动实际设备，模型的输出代表了设备中可以进行测量的或者其他感兴趣的信号。在实际情况中，并不是该设备的所有输入都是已知的。通常会有不可测量的干扰输入，这些干扰只能够以某些通用的方法来表示，比如使用随机过程来表示。类似地，该设备测量的输出将不同于有限模型基础上的预测值。这些差异一部分源于建模误差和近似，一部分源于测量噪声。

首先关注DT情况，但是实质上，所有的一切在自然方式下都是CT的情况。这里将仅仅处理下面所示设备——它仅仅有非常有限的几种不同方式的模型。比如说，可以假设设备通过以下L阶的LTI状态空间方程式准确描述：

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n]+\boldsymbol{w}[n] \tag{6.1}$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n]+\zeta[n] \tag{6.2}$$

图6.1中描绘了这些表达式。这里$x[n]$为已知的标量控制输入，$\boldsymbol{w}[n]$为驱动该设备

的未知干扰向量，不需要与输入 $x[n]$ 通过相同的机制或驱动器或信道加入。例如，或许 $\boldsymbol{w}[n]=\boldsymbol{f}v[n]$，其中 $v[n]$ 为一个标量干扰信号，$\boldsymbol{f}$ 为一个描述该标量干扰如何驱动系统的向量，就如同 $\boldsymbol{b}$ 描述了 $x[n]$ 如何驱动该系统一样。$\boldsymbol{w}[n]$ 称为设备干扰。状态向量 $\boldsymbol{q}[n]$ 也是未知的。输出 $y[n]$ 为一个已知的或者是测量得到的量，$\zeta[n]$ 表示该测量输出的未知的噪声分量。$\zeta[n]$ 称为测量噪声。

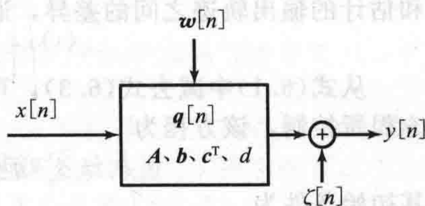


图 6.1　已知控制输入 $x[n]$ 和可用的输出测量 $y[n]$ 下的 DT LTI 设备描述，但是未知干扰输入向量 $\boldsymbol{w}[n]$、状态 $\boldsymbol{q}[n]$ 和测量噪声 $\zeta[n]$

237

有了以上表示真实设备的表达式，就可以寻找一个模型以仿真该设备，可以从所得到的测量值中推断出该设备的内部特性，或者可以对所支持的控制进行设计。假设不仅 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是已知的，而且矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，以及控制设备的 d 也是已知的。进一步假设 $\boldsymbol{w}[n]$ 中的干扰变量和测量噪声 $\zeta[n]$ 的任何信息都是未知的，或者二选一，也可以把它们表示为零均值的随机过程。构建设备行为的模型的最简单方法是忽略这些干扰和噪声变量。所产生的模型具有以下 LTI 状态空间形式：

$$\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{b}x[n] \tag{6.3}$$

$$\hat{y}[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}}[n]+dx[n] \tag{6.4}$$

驱动该模型的输入 $x[n]$ 与设备输入一样，因此是已知的。然而，该模型的状态 $\hat{\boldsymbol{q}}[n]$ 和输出 $\hat{y}[n]$ 通常会与该设备对应的真实状态 $\boldsymbol{q}[n]$ 和测量的输出 $y[n]$ 不同，这是因为该设备真实的初始状态 $\boldsymbol{q}[0]$ 是未知的，并且该设备的状态和输出还被额外的 $\boldsymbol{w}[n]$ 和 $\zeta[n]$ 所干扰。

正如已经注意到的那样，在这里几个不确定的源被忽略了。最基本的就是，实际和假设的参数值之间会存在差异，也就是说，在式(6.1)和式(6.2)中的实际 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 和 d 项与式(6.3)和式(6.4)中假设的矩阵的项之间分别会有差异。通过用式(6.3)和式(6.4)中的 $\hat{\boldsymbol{A}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$、$\hat{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}$ 和 d 来标识这些矩阵，而不是通过式(6.1)、式(6.2)中的那些相同符号来标识矩阵，就已经承认了这些差异。但是，在这里进行讨论时，还是要假设没有这些参数差异。

更典型地，实际的物理系统用一个非线性、时变的模型来描述会更好，这个模型会比假设的 LTI 模型有更高的阶数，而且还有各种额外的干扰信号作用在它上面。鲁棒控制理论的框架旨在研究和减缓这些额外的各种不确定信号的影响。在这里限制为只检查关于初始状态、设备干扰以及测量噪声的不确定性的影响。

238

6.2　状态估计和观测器

这一节主要关注的是运用这个设备模型，使用输入和输出信号的信息来因果地推断出设备的状态。这里根本的兴趣点是运用这些推断出来的状态实时产生合适的控制行为。实际存在一些不需要因果操作和实时操作的应用，这里就不对此进行讨论。

6.2.1　实时仿真

获得当前设备状态估计的一个自然方式是通过类似于仿真器那样实时向前运行的一个模型，且该运行过程与设备的运行同步。为此可以在某个初始时间来初始化式(6.3)中的模型。不损失一般性，初始时间选择为 $n=0$，并选择其初始状态 $\hat{\boldsymbol{q}}[0]$ 为该设备初始状态的猜测值或估计值，例如，$\hat{\boldsymbol{q}}[0]=0$。然后从时间 $n=0$ 开始前进，用已知的设备输入值 $x[n]$ 来驱动该模型，产生一个估计的或预测的状态轨迹 $\hat{\boldsymbol{q}}[n]$，其中 $n>0$。对应的预测输出 $\hat{y}[n]$ 能够通过式(6.4)计算得到。

为了检测该实时仿真器作为一个状态估计器表现得如何，考虑该状态误差向量的性能

$$\tilde{\boldsymbol{q}}[n]=\boldsymbol{q}[n]-\hat{\boldsymbol{q}}[n] \tag{6.5}$$

记$\widetilde{\boldsymbol{q}}[n]$为实际状态轨迹与估计或预测的状态轨迹之间的差异。以类似的方式表示实际和估计的输出轨迹之间的差异，通过以下表达式表达

$$\widetilde{y}[n]=y[n]-\hat{y}[n] \tag{6.6}$$

从式(6.1)中减去式(6.3)，可以看到状态估计误差$\widetilde{\boldsymbol{q}}[n]$本身就由一个LTI状态空间方程所控制，该方程为

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\,\widetilde{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{w}[n] \tag{6.7}$$

其初始条件为

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}[0]=\boldsymbol{q}[0]-\hat{\boldsymbol{q}}[0] \tag{6.8}$$

该初始条件表示了该设备初始状态的不确定性。通过从式(6.2)中减去式(6.4)，能够类似地得到输出误差：

$$\widetilde{y}[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{q}}[n]+\zeta[n] \tag{6.9}$$

式(6.7)中的模型称为实时仿真器的状态误差模型。注意，通过控制该设备和模型的相同矩阵$\boldsymbol{A}$，仿真器可以对动态特性进行仿真。因此，如果式(6.1)中的设备不稳定或者有其他不需要的动态因素，或者如果$\widetilde{\boldsymbol{q}}[0]$或$\boldsymbol{w}[n]$两者任一非零，那么实际的和估计的状态轨迹之间的误差$\widetilde{\boldsymbol{q}}[n]$就将会以指数方式增长，或者将会有其他不希望的性能表现。即使设备没有不稳定，从式(6.7)中可明显看出状态误差动态会被干扰过程$\boldsymbol{w}[n]$所驱动，并且没有方法来改变这些在估计误差上的干扰的影响。因此利用实时仿真器重构状态通常不是一个合适的方式。

239

对于CT情况下的设备进行同样的研究，其具有如下形式：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)+\boldsymbol{w}(t) \tag{6.10}$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)+\zeta(t) \tag{6.11}$$

产生的模型和实时仿真器形式为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{b}x(t) \tag{6.12}$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)+dx(t) \tag{6.13}$$

定义状态估计误差为

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{q}(t)-\hat{\boldsymbol{q}}(t) \tag{6.14}$$

相应的状态误差方程为

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}}(t)=\boldsymbol{A}\,\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{w}(t) \tag{6.15}$$

其初始条件为

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(0)=\boldsymbol{q}(0)-\hat{\boldsymbol{q}}(0) \tag{6.16}$$

对应的输出误差为

$$\widetilde{y}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\zeta(t) \tag{6.17}$$

接下来的例子将说明在估计特定设备的状态时，CT实时仿真器是如何运行的。

例6.1 估计一个悬吊摆的状态的实时仿真

这个例子选择这样的摆设备，它位于悬挂或者悬吊位置附近，并在该位置具有一个小的偏移，需要对该设备这样的摆动态给出一个线性描述，正如在例5.1的最后所描述的一样。假设该特定的设备描述为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -\beta\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}(x(t)+v(t))$$

$$y(t)=[1\quad 0]\boldsymbol{q}(t)+\zeta(t) \tag{6.18}$$

其中，$v(t)$为设备的干扰转矩，$y(t)$为角位置$q_1(t)$的带噪声的量测值，测量噪声为$\zeta(t)$。参数β决定了阻尼情况。对于无阻尼的情况，即$\beta=0$，该系统的自然频率为$\pm\mathrm{j}\sqrt{8}$，它产生了一个周期为$2\pi/\sqrt{8}\approx2.22\mathrm{s}$的正弦零输入响应。

240

该设备的一个实时仿真器具有如下形式：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -\beta\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t)$$

$$\hat{y}(t)=[1\quad 0]\,\hat{\boldsymbol{q}}(t) \tag{6.19}$$

这可以如例4.5一样进行实现(把增益8改为−8)。对应的误差动态为

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -\beta\end{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}v(t)$$

$$\widetilde{y}(t)=[1\quad 0]\,\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\zeta(t) \tag{6.20}$$

图6.2表示了在阻尼系数 $\beta=0.2$ 的情况下获得的仿真结果，其中脉动转矩输入 $x(t)$ 在前5秒取值为1，此后取值为0，并假设没有设备干扰。图中描绘了摆角 $q_1(t)$，从实时仿真器得到该摆角的估计值 $\hat{q}_1(t)$ 以及相关的估计误差 $\widetilde{q}_1(t)$。注意，该误差呈现的动态与设备本身潜在的动态是相似的。

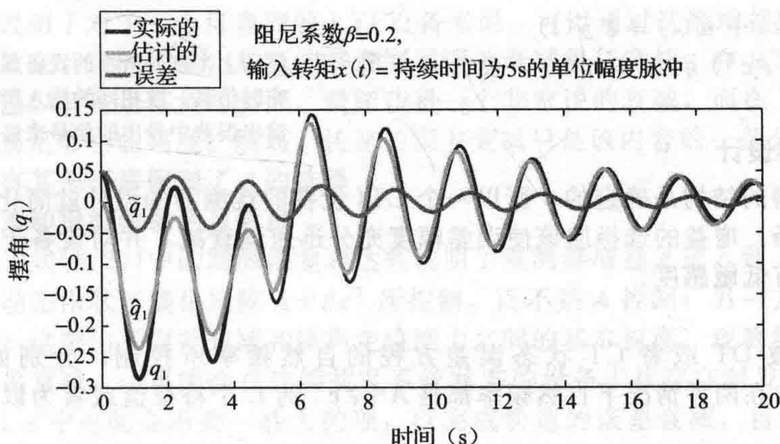


图6.2 对于例6.1中的摆加上阻尼系数 $\beta=0.2$，且没有设备干扰，该图表示了摆角 $q_1(t)$，从实时仿真器得到该摆角的估计值 $\hat{q}_1(t)$ 以及相关的估计误差 $\widetilde{q}_1(t)$ 的轨迹 ◀

6.2.2 状态观测器

在DT情况下，为了比式(6.3)中的实时仿真器表现得更好，这里不仅使用输入 $x[n]$，还要使用测量的输出值 $y[n]$。关键的思想是利用 $y[n]$ 与模型或者仿真器预测的输出 $\hat{y}[n]$ 之间的差异，也就是利用输出误差 $\widetilde{y}[n]$ 来对实时仿真器生成一个修正。相同的思想也适用于CT情况，但是这里首先关注DT情况。

241

插入一个按比例缩放的 $\widetilde{y}[n]$ 作为式(6.3)中实时仿真器的每个状态演化方程的一个附加修正，这会产生以下系统方程：

$$\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{b}x[n]-\boldsymbol{\ell}(y[n]-\hat{y}[n]) \tag{6.21}$$

这里所得的系统称为该设备的状态观测器，或者称为状态估计器。以上观测方程可通过显示其两个组成分量的方式来表示：其中一部分为设备的仿真，正在试图估计出该设备的状态；另一部分则是把修正项 $\widetilde{y}[n]=y[n]-\hat{y}[n]$ 馈送到仿真器中。应用修正项是通过一个有 L 个分量的向量 $\boldsymbol{\ell}$ 来进行的，该向量称为观测增益向量，其第 i 个分量记为 ℓ_i。在 $\boldsymbol{\ell}$ 前加上负号仅仅是便于简化后面所涉及的一些表达式。图6.3表示了所形成的结构。

从式(6.1)中减去式(6.21)，可以看出状态估计误差或观测器误差满足：

$$\tilde{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{w}[n]+\boldsymbol{\ell}\tilde{y}[n]$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\tilde{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{w}[n]+\boldsymbol{\ell}\zeta[n] \tag{6.22}$$

这又是一个 LTI 状态空间描述，其状态向量为$\tilde{\boldsymbol{q}}[n]$，输入为 $\boldsymbol{w}[n]$和 $\zeta[n]$，因此适合于第 5 章所讲的分析工具。这些工具可以用来选择观测增益向量 $\boldsymbol{\ell}$，以此来优化状态的误差动态，以及其对设备干扰和测量噪声的响应。

242

CT 情况下的观测器的描述是完全类似的。将式(6.12)中的实时仿真器修改为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{b}x(t)-\boldsymbol{\ell}(y(t)-\hat{y}(t)) \tag{6.23}$$

从而建立起对观测器的描述。那么相关的状态误差方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t)=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{\ell}\tilde{y}(t)$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\tilde{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{\ell}\zeta(t) \tag{6.24}$$

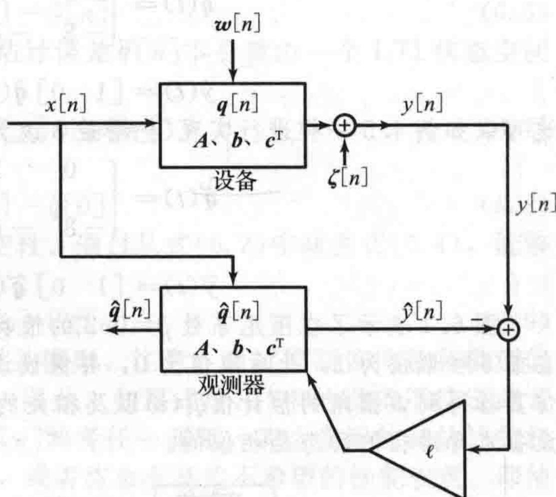


图 6.3 该图上半部分所示的设备观测器包括设备的实时仿真，被相同的输入所驱动，并且通过输出误差中导出的信号来进行校正

6.2.3 观测器设计

因为观测器的结构是确定的，所以一个 LTI 设备的观测器的设计就简化为对观测器增益向量 $\boldsymbol{\ell}$ 的选择。增益的选择应该使误差幅度充分迅速地衰减，并对设备干扰、测量噪声和建模误差具有低敏感度。

误差动态

误差动态被 DT 或者 CT 状态误差方程的自然频率所控制，分别如式(6.22)和式(6.24)所示。在两种情况下自然频率都是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的 L 个特征值或者为以下特征多项式的根：

$$\kappa(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})) \tag{6.25}$$
$$=\lambda^{L}+\kappa_{L-1}\lambda^{L-1}+\cdots+\kappa_{0} \tag{6.26}$$

对 $\boldsymbol{\ell}=\boldsymbol{0}$，观测器误差特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\{\lambda_i\}$，它就是其特征多项式的根：

$$a(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\prod_{i=1}^{L}(\lambda-\lambda_i) \tag{6.27}$$

这些根为实时仿真器和设备的自然频率。接下来将介绍关键的结果，该结果表现了非零观测增益 $\boldsymbol{\ell}$ 是如何影响误差动态的，并讨论一些隐含的意义。这些结果的解析证明将在这一小节的末尾(在例 6.3 之后)给出。

对非零增益 $\boldsymbol{\ell}$，该设备的不可观测的特征值会保留在 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的特征值中，且这些特征值不受 $\boldsymbol{\ell}$ 的选择的影响。其原因是关于不可观测的模式的信息不会在输出误差信号中起作用，即不能用来校正实时仿真器。矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的其他特征值能够通过 $\boldsymbol{\ell}$ 的合适选择，以任意实数或任意复数值给出，只是由于矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 是实的，对每一个复数特征值，在其复共轭位置必有一个相应的特征值。因此设备的可观测的特征值可以移动到复平面的任何自共轭位置集合中，但不可观测的特征值保持固定的位置。

243

紧跟之前的描述，在没有设备干扰和测量噪声的情况下，当且仅当设备所有不稳定的状态都可观测，或等价地说，所有不可观测的状态都是渐进稳定的时候才可以实现一个状态误差幅度衰减到 0 的观测器的设计。这个性质称为可检测性。对于一个可检测的系统，可以选择观测器增益 $\boldsymbol{\ell}$，使之能够产生渐进稳定的误差动态。从有界的输入、渐进稳定的 LTI 系统的有界状态特性可知，将会出现以下情况，有界的设备干扰和有界的测量噪声的

结果就会使得观测器的误差变得有界，该特性在第5章已证明过。

前面的结果也表明了确定设备不可观测的特征值的另一种方式：$\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\ell \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})]$的根不能移动，无论$\ell$选择为多少，因为这些根都恰恰是设备的不可观测的特征值。这种揭示不可观测模式的方法在许多问题上都比第5章所用的方法更简单，第5章的方法要求首先计算系统的特征向量$\boldsymbol{v}_i$，然后再检查哪一个i值满足$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i=0$。

以解析方式为低阶系统设计观测器时，可以通过指定用于观测器误差动态的自然频率ϵ_1，…，ϵ_L的一个期望的自共轭集合来开始设计，从而确定特征多项式$\kappa(\lambda)$为

$$\kappa(\lambda)=\prod_{i=1}^{L}(\lambda-\epsilon_i) \tag{6.28}$$

展开该乘积，使它等于$\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\ell \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})]$，如式(6.25)一样，在未知增益$\ell_1$，…，$\ell_L$中，同时产生$L$个同时的线性方程。当且仅当设备所有不可观测的特征值都包含在特定的观测器误差特征值ϵ_i之中时，这些方程对于观测器增益将是连续且可解的。另一个涉及模态坐标变换的观测器设计的方法在例6.3之后描述。对于更大的系统，需要使用专门的计算软件。

以上结果说明了对于一个可观测的LTI设备来说，可以通过选择增益向量ℓ，把观测器误差特征值放在合适的位置，从而使其观测器误差衰减得任意快。在CT情况中，通过选择这些特征值以具有足够负的实部，就能获得一个非常快的衰减，而在DT情况下，这些特征值则需要足够小的幅度。然而，快速的误差衰减只是该内容的一部分，正如接下来要讨论的，还有其他因素限制了ℓ的选择。

干扰、噪声和模型误差的灵敏度

式(6.22)和式(6.24)中的观测误差表达式说明了观测器增益ℓ进入到了两个地方：一方面使得误差动态由状态演化矩阵$\boldsymbol{A}+\ell \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$所控制，而不是$\boldsymbol{A}$控制；另一方面为了测量噪声的输入向量。这突出了误差衰减和噪声免疫能力之间的基本权衡。观测器增益可以用来获得快速的误差衰减，也可能会在连续扰乱系统状态的设备干扰存在时发挥作用。然而，在CT情况下，ℓ中可能会需要一些大的项，以完成快速的误差衰减，目的是将$\boldsymbol{A}+\ell \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$的特征值很好地放置在左半平面中。这在例6.2中进行说明。如果该模型是下面一些连续时间系统的一个样本-数据模型，那么在DT情况下大的增益同样也可能会需要，以便获得快速的误差衰减，这将会在例6.3中明显地看到。ℓ中这些大的项将会加剧测量噪声对状态误差的影响，并使得ℓ中存在不希望得到的影响。

244

一个大的观测器增益也许还会在观测器误差中产生大的过冲或振荡，甚至在最终的误差衰减很快的时候也会这样。例如，如果状态估计被反馈控制器所使用，那么这些瞬变可能导致一些问题。而且，一个大的观测器增益也许会增加观测器设计的敏感性，这种敏感性会在使用设备的一个简单的LTI模型时影响各种简化、近似和误差继承。在实践中，这些考虑会使得设计很保守，从而不会试图获得不必要的快速误差衰减动态。

以上权衡的一些方面可以在一个易处理的最优化问题中应用到。将设备干扰和测量误差定义为平稳的随机过程(将在第10章介绍)，这样就可以选取ℓ来最小化稳态变量在状态估计误差的分量中的某些量测值。这样所得到的观测器称为稳态卡尔曼滤波器。在开发出以分析平稳随机过程为目的的机器之后，就能制订和解决这类基本问题。对一个状态空间系统，更通用的卡尔曼滤波器仍然有一个观测器结构，但是带有一个时变的观测器增益，这是因为该滤波器在每个时刻都忙于完成所要求的更多优化估计性能的任务，而不仅仅只在稳定状态下工作。

例6.2　无阻尼悬挂摆观测器

返回例6.1所考虑的设备中，即无阻尼状态下，对于普通的悬吊或者悬挂位置周围的小偏差，该例给出了特定摆的动态线性化表达式：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}(x(t)+v(t))$$

$$y(t)=[1\quad 0]\boldsymbol{q}(t)+\zeta(t) \tag{6.29}$$

如之前所讲，该系统的自然频率为$\pm \mathrm{j}\sqrt{8}$，ZIR(零输入响应)是周期为$2\pi/\sqrt{8}\approx 2.22\mathrm{s}$的正弦响应。

该设备的一个观测器采用以下形式：

245

$$\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 0\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t)-\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}(y(t)-\hat{q}_1(t)) \tag{6.30}$$

对应的误差动态为

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}\ell_1 & 1\\ -8+\ell_2 & 0\end{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{q}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}v(t)+\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}\zeta(t) \tag{6.31}$$

其特征多项式为

$$\kappa(\lambda)=(\lambda-\ell_1)\lambda+(8-\ell_2)=\lambda^2-\ell_1\lambda+(8-\ell_2) \tag{6.32}$$

需注意选择合适的ℓ_1和ℓ_2可以将此转换成任何期望的二阶首一多项式(monic polynomial of degree 2)，该多项式能从指定的输出(即摆角中)立即确认系统是可观测的。

为了在摆的一个振荡周期内就获得误差衰减⊖，举个例子，可以让误差动态的自然频率为$\varepsilon_1=-2$，$\varepsilon_2=-5$。对应的ZIR为两个时间常数分别为$1/2=0.5\mathrm{s}$和$1/5=0.2\mathrm{s}$的指数的和，且瞬态将基本消失于主模式(dominant mode)的大约三个时间常数左右，即约为$3\times 0.5=1.5\mathrm{s}$。相关的特征多项式为

$$\kappa(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+5)=\lambda^2+7\lambda+10 \tag{6.33}$$

令此等于式(6.32)中的多项式，则$\ell_1=-7$，$\ell_2=-2$。

图6.4显示了在之前选择的观测器增益下，设备变量和观测器变量的图形：在一个已知的脉冲转矩$x(t)$作用下的摆角$q_1(t)$；从观测器中得到的摆角估计值$\hat{q}_1(t)$；相关的估计误差$\widetilde{q}_1(t)$。在这里显示的是在没有设备干扰和没有测量噪声情况下的特定结果。正如所期望的，在这种理想情况下估计误差基本上在1.5s左右就消失。

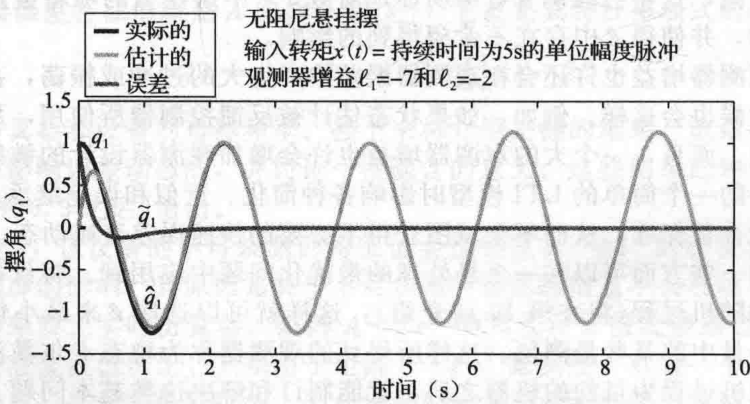


图6.4 例6.2中的无阻尼摆具有一个脉冲输入转矩$x(t)$，而没有设备干扰或测量噪声，该图显示了摆角$q_1(t)$，从观测器中得到的摆角估计值$\hat{q}_1(t)$，以及对应的估计误差$\widetilde{q}_1(t)$的轨迹，这里选择合适的观测器增益以得到具有0.5s的主导时间常量的误差衰减

图6.5描述了存在测量噪声的观测器的特性。在这种情况下，输入转矩$x(t)$和干扰转

⊖ 原文是摆的一个振荡周期的分数，有误。——译者注

矩 $v(t)$ 都设置为 0，而测量噪声 $\zeta(t)$ 每一毫秒都在[－1，1]范围内取一个随机值并保持不变。该图的观测器增益设为 $\ell_1=-30$，$\ell_2=-192$，这里依据式(6.32)里的表达式，得到观测误差方程的特征多项式： 246

$$\kappa(\lambda)=\lambda^2+30\lambda+200=(\lambda+10)(\lambda+20) \tag{6.34}$$

相关的指数函数里有时间常数 1/10＝0.1 和 1/20＝0.05，所以主导时间常数为 0.1s，瞬变期望在 3×0.1＝0.3s 左右稳定。注意，估计值 $\hat{q}_1(t)$ 里面的噪声相对于位置 $q_1(t)$ 的原始量测值 $y(t)$ 里面的噪声大大衰减了——测量噪声是[－1，1]范围内的取值，且该值每隔 1ms 就随机变化。而估计值里面的噪声只占据了这个范围的大约一半且具有更慢的变化。观测器因此提供了对这些测量噪声的滤波。此外，由观测器(虽然这里没有表示)给出的速度 $q_2(t)$ 的估计值也具有一定的可信度。然而，如果试图直接通过对噪声位置量测值 $y(t)$ 的近似导数(derivative)来估计速度 $q_2(t)$，那将会导致估计值被噪声分量影响完全湮没。◀

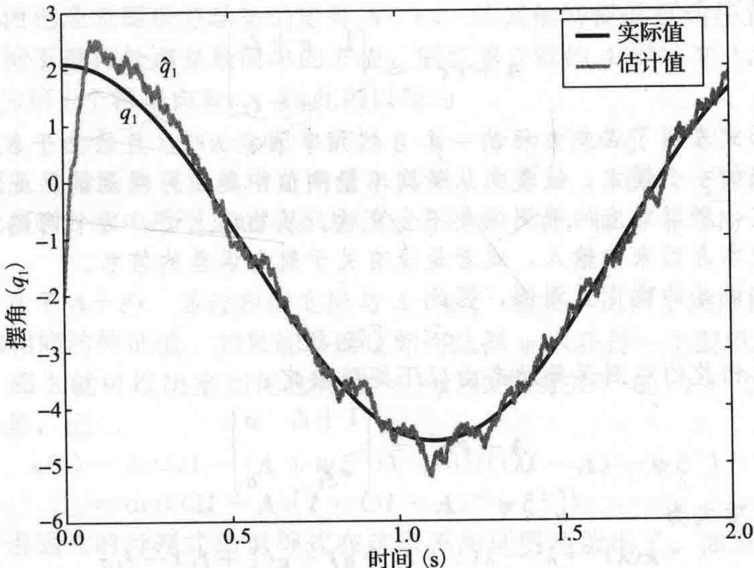


图 6.5　例 6.2 中的无阻尼摆，$x(t)=0$ 且没有设备干扰，但是有量测噪声 $\zeta(t)$，该量测噪声每 1ms 都在区间[－1，1]上取一个随机值并保持不变，该图显示了摆角 $q_1(t)$，以及从观测器中得到的摆角估计值 $\hat{q}_1(t)$ 的轨迹，这里选择观测器增益以得到具有 0.1s 的主导时间常量的误差衰减

接下来的例子将会说明对于 DT 系统的观测器设计，该 DT 系统是通过下面的 CT 系统的样本-数据模型而获得的。 247

例 6.3　船舶航向误差观测器

在这个例子中，考虑一艘船舶以恒定速度行驶时的转向动态的简化的样本-数据模型，其舵角由基于计算机的控制器进行控制，具有分段常数的形式：

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}q_1[n+1]\\q_2[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\sigma\\0&\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1[n]\\q_2[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\rho\\\sigma\end{bmatrix}x[n]=\mathbf{A}\mathbf{q}[n]+\mathbf{b}x[n] \tag{6.35}$$

状态向量 $\mathbf{q}[n]$ 包括了航向误差样本 $q_1[n]$，其为船舶相对于所期望的前进方向的误差，以及船舶转向率的样本 $q_2[n]$，它们都在时刻 $t=nT$ 时采样。在区间 $nT\leqslant t<nT+T$ 上，控制输入 $x[n]$ 为舵角的常数值。该舵角是通过相对于船舶前进的方向测量得到，且正的舵角趋于增加航向误差。这些变量都在图 6.6 中进行了显示。

正参数 α、σ 和 ρ 是由船舶的类型和速度决定的，采样间隔为 T。特别地，α 通常小于

1，但是对于大型油轮则会大于1。在任何情况下，式(6.53)中的系统都不是渐进稳定的。

针对以下包括了有阻尼情况下质点移动的CT系统，该模型与例5.7中推导的样本-数据模型具有相同的形式，外部输入力作用在该系统上。这种形式的样本-数据模型同样描述了，比如，一个输入为电压的DC电动机的运动，该电压通过基于计算机的控制器进行控制，且在长度为T的时间间隔内保持常数。在这种情况下，有$\alpha=1$，$\sigma=T$，并且（对于具有合适的单位的$x[n]$）$\rho=T^2/2$。

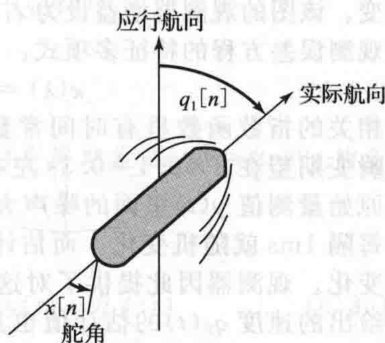


图6.6　例6.3中的船舶转向系统的航向误差和舵角

假设这里有转向率的噪声量测值，那么在式(6.2)中

248

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1]\tag{6.36}$$

并且$d=0$。利用这些测量值，该系统一个观测器的误差动态由以下矩阵决定：

$$\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & \sigma+\ell_1\\ 0 & \alpha+\ell_2\end{bmatrix}\tag{6.37}$$

该矩阵的三角形式表明了误差方程的一个自然频率固定为1，且独立于$\boldsymbol{\ell}$。这个自然频率对应于原始系统的一个模式，该模式从转向率量测值中是不可观测的。此外，这不是一个渐进稳定的模式，所以对应的观测误差不会衰减。从物理上讲，这个问题就是转向率没有包含从航向误差本身而来的输入，或者是没有关于航向误差的信息。

假设有航向误差的噪声量测值，因此

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[1\quad 0]\tag{6.38}$$

在该量测值下，相关的观测误差动态由以下矩阵决定：

$$\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1+\ell_1 & \sigma\\ \ell_2 & \alpha\end{bmatrix}\tag{6.39}$$

该矩阵的特征多项式为

$$\kappa(\lambda)=\lambda^2-\lambda(1+\ell_1+\alpha)+\alpha(1+\ell_1)-\ell_2\sigma\tag{6.40}$$

该多项式可以通过选择增益ℓ_1和ℓ_2变为任意的二阶首一多项式。这个情况也确立了设备模型利用输出量测值而具有的可观测性。

在这个情况下，观测器增益一个感兴趣的选择为$\ell_1=-1-\alpha$与$\ell_2=-\alpha^2/\sigma$；对于典型的参数值，这将导致ℓ_2的值变大。在此选择下，矩阵$\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$的特征多项式为$\kappa(\lambda)=\lambda^2$，因此观测器误差方程的两个自然频率都为0。到目前为止，还没有处理重复特征值的情况（除了在例5.13中有一个关于可能性的简要说明）。然而，对于这个特殊情况，系统的行为可以简单地从以下情况中推断出来，这里$\boldsymbol{\ell}$的特定选择为

$$(\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})^2=\begin{bmatrix}-\alpha & \sigma\\ -\alpha^2/\sigma & \alpha\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tag{6.41}$$

因此，式(6.22)中的观测器误差动态的ZIR最多在两个时间步长内就衰减到了$\mathbf{0}$，这可能是这个二阶DT系统最快的衰减。

这里知道了在DT LTI系统中，一个自然频率的幅值越小，则其相关的模式的衰减就更快。因此当所有的自然频率为0时，系统稳定得很快也就并不奇怪了。任何一个$L\times L$的特征值为0的矩阵$\mathbf{Z}$，都可以满足$\mathbf{Z}^L=\mathbf{0}$，$\mathbf{0}$表示零矩阵。更有可能的是，该矩阵的一个更低功率早就为$\mathbf{0}$了，这取决于这种矩阵更详细的结构。一个所有自然频率为0的DT LTI系统有时候称为无差拍系统，因为其ZIR在有限的时间内稳定到了0。

在有测量噪声的情况下，也许想要选择一个更慢的误差衰减，以保持观测增益向量，要比在无差拍情况下要小，从而不会加剧对于估计误差的测量噪声的影响。◀ [249]

证明

之前讲过但没有证明的一个关键结果是观测器增益 ℓ 的选择是如何影响观测器误差动态的。现在建立之前提出的那些声明。

为了证明设备的每个不可观测特征值保留在观测器误差动态的矩阵特征值中，回忆第 5 章对于设备中的一个不可观测的特征值 λ_j：

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j=0,\text{特征值}\boldsymbol{v}_j\neq\boldsymbol{0},\quad\text{其中},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j \tag{6.42}$$

不管 ℓ 被选择为多少，它都满足

$$(\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j\quad\text{其中},\boldsymbol{v}_j\neq 0 \tag{6.43}$$

观测器误差动态的矩阵因此具有特征值 λ_i，其关联的特征向量为 $\boldsymbol{v}_i$，该特征向量证明了期望的结果。

为了明白如何把观测器误差动态的矩阵 $\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的其他特征值放到任意自共轭的集合点上，在模态坐标下进行处理是最简单的方法。回忆第 5 章的 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{V}$ 为模态矩阵，其第 i 列为第 i 个特征向量$\boldsymbol{v}_i$。因此可以写为

$$\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{V}^{-1},\quad\text{其中}\ \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{V}^{-1}\ell,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} \tag{6.44}$$

所以 $\boldsymbol{\psi}$ 表示在模态坐标下的观测器增益向量，其第 i 项为 $\boldsymbol{\psi}_i$。同时，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 为$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 在模态坐标下的表示，这是在第 5 章中所引入的表示法。当 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 j 项，即 ξ_j 非零时，第 j 个状态恰好是可观测的。

式(6.44)确立了 $\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 通过相似变换与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 相关。这两个矩阵因此有相同的特征多项式 $\kappa(\lambda)$和相同的特征值。如果能够确定如何选择 $\boldsymbol{\psi}$ 以获得一个期望的对于 $\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 的特征多项式，那么就可以决定如何选择 $\ell(=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\psi})$以获得关于 $\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 的相同特征多项式。第一个步骤是，记

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda)&=\det(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}))=\det((\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})\\&=\det((\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})[\boldsymbol{I}-(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}])\end{aligned} \tag{6.45}$$

两个简化了之前表达式的行列式的恒等式在这里不加证明地给出了。如果 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 为同样维数的两个方阵，

$$\det(\boldsymbol{MP})=\det(\boldsymbol{M})\det(\boldsymbol{P}) \tag{6.46}$$

同时，对于各维数分别相同的长方形矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$，

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})=\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}) \tag{6.47}$$

单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 在表达式左边和右边可能会有不同的维度，分别等于 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 和$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$ 的维度。如果 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 为列向量，那么$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$ 是一个标量，因此在之前表达式右边的单位矩阵是一个标量，就是数字 1。 [250]

现在利用式(6.46)和式(6.47)的恒等式，可以继续证明式(6.45)中的一系列等式：

$$\kappa(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\det(\boldsymbol{I}-(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})=a(\lambda)\det(1-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\psi}) \tag{6.48}$$

由于 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda}$ 为一个对角矩阵，因此它的逆仍为对角矩阵，其对角线上项为原始矩阵对应的对角线上的项的倒数。利用这一特性，来估计上面最后一个表达式，并重写其结果，可以推断出：

$$\frac{\kappa(\lambda)}{a(\lambda)}=1-\sum_{i=1}^{L}\frac{\xi_i\psi_i}{\lambda-\lambda_i} \tag{6.49}$$

正如接下来要讨论的，这个表达式形成了观测器设计的基础。

如果期望得到特定的观测误差方程的 L 阶首一特征多项式 $\kappa(\lambda)$，由关于式(6.49)左部分中的 λ 的有理函数的一个标准的部分分式展开式将得到

$$\frac{\kappa(\lambda)}{a(\lambda)} = 1 - \sum_{i=1}^{L} \frac{m_i}{\lambda - \lambda_i} \tag{6.50}$$

其中，

$$m_i = \frac{\kappa(\lambda)}{a(\lambda)}(\lambda - \lambda_i)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \tag{6.51}$$

比较式(6.49)和式(6.50)将发现，用来获得期望的多项式$\kappa(\lambda)$所需的观测器增益由下式给出

$$\psi_i = m_i/\xi_i \tag{6.52}$$

然而，这只有在对所有的i，$\xi_i \neq 0$时才成立，也就是，只有在设备可观测时才成立。

如果该设备的第j项不可观测，对应于$\xi_j = 0$，那么位于$\lambda = \lambda_j$的极点将不会在式(6.49)的展开式中出现。唯一使该情况下等式成立的方法是保证$\kappa(\lambda)$在$\lambda = \lambda_i$时有一个根，这样，这个因子可以从等式左边抵消掉。换言之，观测器误差动态的自然频率将会包含设备的每一个不可观测的自然频率。

$\kappa(\lambda)$剩下的部分是不受约束的且可以拥有任意的自共轭根。式(6.50)中$\frac{\kappa(\lambda)}{a(\lambda)}$的部分分式展开将仅仅涉及与设备的可观测模式相关的项，而不是所有的L个模式，但是对于这些模式，式(6.52)中的表达式仍然有效。对应于不可观测模式的ψ_j，其选择可以是任意的。

251

6.3 状态反馈控制

对于一个输入可以操控的因果系统或设备来说，很自然就会想到：输入应该如何选择从而使系统以某些期望的方式工作。开环控制仅仅需要利用在与系统开始交互的时刻上可以得到的信息。开环控制的问题在误差上，即使误差被识别出，也不能被纠正或者补偿。如果设备性能较差或不稳定，那么未修正的误差会导致不好的或灾难性的结果。在另一方面，反馈控制基于对系统的持续行为的感知，并利用感知到的变量的量测值来产生控制信号，并应用到系统中。反馈控制通常称为闭环控制。

前向控制包含信号的量测值，这些信号将对设备产生影响，但是它们自己却不会被控制所影响。举个例子，在为可操纵雷达天线的定位电动机产生电力控制信号时，风速测量值的使用对应于一个前向控制，而天线位置量测值的使用则对应于一个反馈控制。通常情况下，控制可以有反馈和前向两种分量。

现在开始检查DT情况下的控制理念，CT情况与此非常相似，并在之后进行说明。假设想要控制的DT设备通过以下L阶LTI状态空间描述进行很好的建模，则可描述为

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{b}x[n] \tag{6.53}$$

$$y[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n] + dx[n] \tag{6.54}$$

仍然称它为开环系统。如前所述，$x[n]$表示控制输入，$y[n]$表示测量输出，它们都是关于时间的标量函数。设备干扰和测量误差的影响将在之后讨论。直接馈通增益d没有在接下来的内容中起到至关重要的作用，并使各种代数表达式的形式变得复杂，所以通常假设$d=0$。

6.3.1 开环控制

接下来的内容说明了开环控制的潜在不足之处，特别是在处理不稳定的设备的时候。假设选择一个控制输入轨迹$x^*[\cdot]$，其可以使式(6.53)中的系统执行某些期望的状态轨迹$\boldsymbol{q}^*[\cdot]$，如果系统在初始状态$\boldsymbol{q}^*[0]$时启动，那么

$$\boldsymbol{q}^*[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^*[n] + \boldsymbol{b}x^*[n] \tag{6.55}$$

如果该控制输入在实际初始状态为$\boldsymbol{q}[0] \neq \boldsymbol{q}^*[0]$时应用，那么产生的实际状态轨迹$q^*[\cdot]$满足

252

$$\boldsymbol{q}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n] + \boldsymbol{b}x^*[n] \tag{6.56}$$

把式(6.55)与式(6.56)相减，可以看到期望的状态轨迹和实际的状态轨迹之间的差异或误差满足

$$(q^*[n+1]-q[n+1])=A(q^*[n]-q[n]) \tag{6.57}$$

这是一个针对理想的状态轨迹和实际的状态轨迹之间的误差$q^*[n]-q[n]$演化的 LTI 状态空间模型，该模型被设备的相同的状态演化矩阵A所控制。设计一个控制输入的最初原因是设备动态不令人满意，那么开环控制产生了同样令人不满意的状态误差动态。特别地，如果矩阵A的一些特征值的幅度超过了1，设备也就是不稳定的，那么对于几乎所有的初始条件，状态误差的幅度都会呈现几何上升。

在开环控制中，因为只在开始与系统相互作用的时刻提交了一个特定的控制输入，因而没有机会调整对应于实际系统行为观测值的标称控制或基线控制。

6.3.2 经由 LIT 状态反馈的闭环控制

当系统的状态变量完全概括了系统过去的有关状况时，就应该期望状态在每一时刻的信息都能为设计反馈控制信号提供一个有力的基础。在这一节中，将考虑对于式(6.53)中系统的状态反馈的使用，这里假设每一时刻的整个状态向量是可得到的和可测量的。虽然这个假设在实际中基本上是不可实现的，但是可以由它推导出一些初级结果，以作为衡量标准。一个更实际的情况是，其中状态不可以被测量但是可以被估计，这个情况将在之后说明。这将表明在 LTI 情况下，当实际状态可用于反馈时，由状态观测器提供的估计值实际上足以实现许多实际能遇到的情况。

LTI 状态反馈的特殊情况如图 6.7 所示，其中输入$x[n]$的反馈部分是在该瞬间时刻的状态变量的加权线性函数

$$\begin{aligned}x[n]&=\left(\sum_{i=1}^{L}g_iq_i[n]\right)+p[n]\\&=g^{\mathrm{T}}q[n]+p[n]\end{aligned} \tag{6.58}$$

行向量g^{T}为状态反馈增益向量，其第i项分量为g_i，$p[n]$是一个可以用来加大反馈信号的外部输入信号。

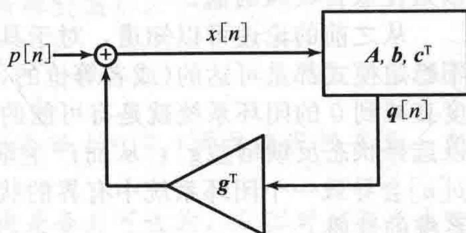


图 6.7　具有 LTI 状态反馈的 LTI 系统。其中g^{T}为状态反馈增益向量，$p[n]$为增强了反馈信号的新的外部输入信号

253

在对$x[n]$进行这样的选择时，假设$d=0$，那么式(6.53)、式(6.54)中的系统变为

$$q[n+1]=Aq[n]+b(p[n]+g^{\mathrm{T}}q[n])=(A+bg^{\mathrm{T}})q[n]+bp[n] \tag{6.59}$$

$$y[n]=c^{\mathrm{T}}q[n] \tag{6.60}$$

这里称其为闭环系统。它也具有 LTI 的状态空间形式，并且因此适合使用第 5 章所讲的方法来进行分析。注意到由于$p[n]$为该闭环系统的一个新的外部输入，接下来的关于闭环系统的 ZIR 的讨论将会意味着是$p[n]\equiv 0$而不是$x[n]\equiv 0$的情况。

对 CT 系统的探讨在本质上是相同的。对于一个被以下 LTI 状态空间表达式很好地进行建模的开环系统，

$$\dot{q}(t)=Aq(t)+bx(t) \tag{6.61}$$

$$y(t)=c^{\mathrm{T}}q(t) \tag{6.62}$$

LTI 状态反馈控制

$$x(t)=g^{\mathrm{T}}q(t)+p(t) \tag{6.63}$$

产生了闭环 LTI 状态空间系统

$$\dot{q}(t)=(A+bg^{\mathrm{T}})q(t)+bp(t) \tag{6.64}$$

$$y(t)=c^{\mathrm{T}}q(t) \tag{6.65}$$

6.3.3 LTI 状态反馈设计

由于在 LTI 状态反馈下的闭环系统的结构是确定的，设计任务就成了对反馈增益向量g^{T}进行选择。所选增益应该能获得期望的闭环动态，让闭环系统的瞬时或 ZIR 特性可以

足够快地稳定，但要考虑到由于建模误差引起的控制工作和局限性的约束。

闭环动态

在DT和CT两种情况下，反馈系统的闭环动态都是被矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的$L$个特征值所控制的，也就是被以下特征多项式的根所控制：

254

$$\nu(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}))=\lambda^{L}+\nu_{L-1}\lambda^{L-1}+\cdots+\upsilon_{0} \tag{6.66}$$

可以合理地推测，适当地选择状态反馈增益$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$，可以使得闭环系统的自然频率与那些开环系统的不同。在下面将对可能性进行更多细节描述，但解析分析和证明要等到例6.4之后。

首先注意到矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的结构与矩阵$\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$的类似，该矩阵控制观测误差动态。两种结构是对偶的，意味着通过矩阵变换就可以把一个问题的结构映射为另一个问题的结构。因此，分析如何选择$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$来影响$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的特征值的可能分布，与之前对于$\boldsymbol{A}+\ell\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$的讨论就十分类似，除了这里是利用可达性替代了之前可观测性的角色。

当$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=0$时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的特征值正好是决定开环系统的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，也就是，由式(6.27)定义它的特征多项式$a(\lambda)$的根。对于非零状态反馈增益$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$，设备的不可达的特征值保留下来，作为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的特征值，且这些特征值不受$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的选择的影响。原因是通过控制输入的状态反馈对于不可达模式没有影响。通过适当选择$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$其余的特征值可以是任意自共轭的值。

从之前的论述可以知道，对于具有LTI状态反馈的LTI系统，当且仅当所有设备的不稳定模式都是可达的(或者等价的，所有不可达模式都是渐进稳定的)，设计一个ZIR幅度衰减到0的闭环系统就是有可能的。这种性质记为可稳定性。对于一个可稳定系统，可以选择状态反馈增益$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$，从而产生渐进稳定闭环动态。利用这个，一个有界的外部信号$p[n]$会导致一个闭环系统中有界的状态轨迹。在第5章中，已经建立了这个渐进稳定LTI系统的性质。

之前的结果也表明另一种决定系统不可达特征值的替代方法是：不管如何选择$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$，$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})]$的根不能被修改，这恰恰就是不可达的特征值。在许多问题中，这种方式可以比第5章使用的方法更容易地暴露出不可达模式，第5章的方法要求首先计算系统的特征向量$\boldsymbol{v}_i$，然后检验这些特征向量中哪些对于把$\boldsymbol{b}$写成特征向量的线性组合是不必要的。

对于低阶系统，在设计LTI状态反馈的分析中，一种方法是确定一个想要的闭环自然频率的自共轭集μ_1，…，μ_L，也就是确定特征多项式$\nu(\lambda)$为

$$\nu(\lambda)=\prod_{i=1}^{L}(\lambda-\mu_i) \tag{6.67}$$

255

将右边的乘积展开，并令其等于式(6.66)中的$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\hat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})]$，得到在未知增益$g_1$，…，$g_L$中的$L$个联立线性方程。当且仅当开环系统的所有不可达特征值包含在指定的闭环特征值μ_i之中时，这些方程对于状态反馈增益是一致的而且可解的。另一个设计状态反馈增益的办法将在例6.4之后进行概述，该方法涉及一种对于模态坐标的变换。正如在观测器设计的情况下，对于更大的系统中的状态反馈设计，将使用专门的计算软件。

如前所述，一个开环系统的不可达模式在与闭环系统的相同频率下保持固定，这是因为反馈控制无法从输入进入这个模式，因此也就不能修改它。同理，这个开环系统的不可达模式在闭环系统中仍然保持不可达。状态反馈不能在闭环系统中产生额外的不可达模式，即闭环系统的不可达模式不能超出开环系统中已经存在的不可达模式。这是因为——也是同样的原因——这些闭环系统的不可达模式也需要是开环系统的不可达模式，这是由于闭环系统周围的状态反馈能够抵消原来的反馈并恢复开环系统。

这一小节的结果表明，通过选择增益$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$来把闭环特征值放在合适的位置，一个可达LTI系统的闭环ZIR就可以使其以任意速度衰减。在CT中，可以通过使这些特征值具有足够负的实部，来获得一个快速的衰减，但是在DT中，则需要特征值具有足够小的幅

度。然而，闭环 ZIR 的快速稳定只是一种考虑，这是因为其他因素限制了 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 的选择，关于这点将在后面讨论。

控制作用力(control effort)

状态反馈增益 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 对闭环系统主要有两方面的影响：首先由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 而不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值控制动态，其次，由式(6.58)中的关系，决定控制作用力 $x[n]$ 消耗在一个给定状态的偏移 $\boldsymbol{q}[n]$ 的等级。这突出表现了在响应速度和控制作用力之间的权衡。状态反馈增益可以用来获得快速响应，使系统状态从它的初始干扰值快速回到原始值。然而，$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 中的大项也许需要做这件事——当然是在 CT 的情况下，但如果模型是下面的 CT 系统的某些样本-数据版本的话，在 DT 中也可以做这件事。这些 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 中的大项导致了大的控制作用力被消耗。更进一步，在测量或者估计状态向量中的任何误差的影响，或者模型误差以及其他差异的影响可能随着大的反馈增益而加重。在实际中，这些考虑会导致设计趋于保守，而不是试图获得极端快速的闭环动态。在易于理解的最优化问题中，可能会遇到所涉及的权衡方面的问题。这其中的某些问题对于卡尔曼滤波设计问题来说是对偶的，在与最优的观测器设计的相关问题中已经提到过卡尔曼滤波。

接下来的例子将展现利用状态反馈去对系统的闭环动态进行成型。

256

例 6.4　转矩控制下摆的状态反馈

在倒立或悬挂位置附近的特殊的无阻尼摆，其线性模式采用以下形式：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -K & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t) \tag{6.68}$$

其中，对于正常的悬挂位置，有 $K>0$，在倒立的位置有 $K<0$。两种情况将在此一起讨论。

现在可以计算系统的特征值和特征向量来决定系统是否为可达的，从而对控制产生响应。然而，这个步骤实际上是不必要的。取而代之的是，直接考虑系统的状态反馈 $x(t)=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+p(t)$ 的影响所产生的闭环表达式：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}(t)&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -K & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}[g_1\quad g_2]\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}p(t)\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -K-g_1 & -g_2\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}p(t)\end{aligned} \tag{6.69}$$

对应的特征多项式为

$$\nu(\lambda)=\lambda(\lambda+g_2)+(K+g_1)=\lambda^2+g_2\lambda+(K+g_1) \tag{6.70}$$

该表达式的检查显示了通过对增益 g_1 和 g_2 的合适选择，该多项式可以等于任意期望的二阶首一多项式。换句话说，可以获得闭环特征值的任意自共轭集合。这也说明了原系统是可达的。

假设希望闭环特征值具有特定的值 u_1、u_2。这等价于指定闭环特征多项式为

$$\nu(\lambda)=(\lambda-u_1)(\lambda-\mu_2)=\lambda^2-\lambda(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2 \tag{6.71}$$

让该多项式与式(6.70)中的多项式相等，可以得到

$$g_1=\mu_1\mu_2-K,\quad g_2=-\mu_1-\mu_2 \tag{6.72}$$

对于倒立的摆，当 u_1 和 u_2 在左半开平面形成一个自共轭集合时，两个增益都为正。对于正常的悬挂摆，g_1 也许为正，也许为负，还可以为 0，但是 g_2 一直为正。◀

证明

前面已经讲过，但是没有证明这一关键结果，即状态反馈增益 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$ 的选择是如何影响闭环动态的。现在来建立这些所需要的各种声明。正如观测误差动态的对偶情况一样，在模态坐标的情况下是最简单的，注意到

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{V}^{-1} \quad 其中 \quad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} \tag{6.73}$$

因此$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$表示模态坐标下的状态反馈增益向量，其第 i 项为γ_i。同时$\boldsymbol{\beta}$表示输入向量$\boldsymbol{b}$在模态坐标下的表达，这是在第 5 章介绍过的表示法。当$\boldsymbol{\beta}$的第 j 项，即β_j为非零时，第 j 个模式恰恰是可达的。以上表达式说明了矩阵$\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$通过一个相似变换与$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$相关，并且因此这两个矩阵有相同的特征多项式和特征值。如果可以确定如何选择$\boldsymbol{\gamma}$来获得矩阵$\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$的一个期望的特征多项式，那么就可以确定如何选择$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1})$来获得矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$的相同的特征多项式。

257

以相似的方法来分析之前的观测误差动态，会产生一个对于闭环特征多项式很有用的表达式：

$$\begin{aligned}\nu(\lambda)&=\det(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}))=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})\det(\boldsymbol{I}-(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})\\&=a(\lambda)\Big(1-\sum_{i=1}^{L}\frac{\beta_i\gamma_i}{\lambda-\lambda_i}\Big)\end{aligned} \tag{6.74}$$

重写这一结果，可以得到

$$\frac{\nu(\lambda)}{a(\lambda)}=1-\sum_{i=1}^{L}\frac{\beta_i\gamma_i}{\lambda-\lambda_i} \tag{6.75}$$

如果该闭环系统的 L 次的首一特征多项式$\nu(\lambda)$被确定，式(6.75)左边的关于λ的有理函数的一个标准的部分分式展开将具有以下形式：

$$\frac{\nu(\lambda)}{a(\lambda)}=1-\sum_{i=1}^{L}\frac{n_i}{\lambda-\lambda_i} \tag{6.76}$$

其中，

$$n_i=\frac{\nu(\lambda)}{a(\lambda)}(\lambda-\lambda_i)\Big|_{\lambda=\lambda_i} \tag{6.77}$$

比较式(6.75)和式(6.76)可以看到，获得期望的多项式$\nu(\lambda)$所需要的反馈增益由下式给出

$$\gamma_i=n_i/\beta_i \tag{6.78}$$

然而，这只有在对所有的 i，$\beta_i\neq 0$ 时，也就是系统为可达时，才可能成立。

如果系统的第 j 项是不可达的，对应于$\beta_j=0$，那么位于$\lambda=\lambda_j$的极点不会在式(6.75)的展开式中出现。在这种情况下，唯一满足等式的方法是保证$\nu(\lambda)$在$\lambda=\lambda_j$时有一个根，因此等式左边的因式可以抵消掉。换句话说，该闭环动态的自然频率将会包含设备的每个不可达的自然频率。

$\nu(\lambda)$的剩下部分是不受约束的，并且可以有任意的自共轭根。式(6.76)中$\nu(\lambda)/a(\lambda)$的部分分式展开将仅仅包含对应于系统可达的模式的项，而不是所有的 L 个模式，但是对于这些模式来说，式(6.78)中的表达式仍然有效。对应于不可达模式的γ_j可以任意选择。

258

闭环传递函数

现在检查闭环系统的输入输出特性，在 DT 情况下，是通过决定其传递函数来检查的；在 CT 情况下完全类似。式(6.1)和(6.2)中的开环系统的传递函数在 $d=0$ 时为

$$\begin{aligned}H(z)&=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} &(6.79)\\&=\frac{\eta(z)}{a(z)} &(6.80)\end{aligned}$$

其中，$a(z)$为系统的特征多项式，之前在式(6.27)中已经定义过了。这里注意式(6.80)中$a(z)$和$\eta(z)$共同的根有可能会存在零极点抵消，对应于不可达、不可观测，或两者都有的系统模式的存在。只有$a(z)$没有被抵消掉的根仍为$H(z)$的极点，并且类似地，只有$\eta(z)$没有抵消掉的根仍为传递函数的零点。

从外部输入$p[n]$到输出$y[n]$的闭环传递函数为式(6.59)和式(6.60)中的系统的传递函数，即

$$G(z)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}))^{-1}\boldsymbol{b} \tag{6.81}$$

这个传递函数的分母多项式，在与分子多项式有任何抵消之前为$\nu(z)=\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})$。为了确定$G(z)$的分子多项式，采用一种间接的方法。首先当初始条件为零，$\boldsymbol{q}[0]=\boldsymbol{0}$时，从$p[n]$到设备输入$x[n]$的闭环传递函数为$X(z)/P(z)$的比值。它跟随着式(6.58)和之前建立的恒等式

$$X(z)=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}X(z)+P(z)=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\beta}X(z)+P(z)$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^{L}\frac{\beta_i\gamma_i}{z-\lambda_i}\Big)X(z)+p(z) \tag{6.82}$$

调整该表达式结构以求解$X(z)$，然后调用式(6.74)，可以得到

$$\frac{X(z)}{P(z)}=\frac{a(z)}{\nu(z)} \tag{6.83}$$

其中，$\nu(z)$是式(6.66)定义的闭环特征多项式。因此该闭环系统从输入$p[n]$到输出$y[n]$的传递函数为

259

$$G(z)=\frac{Y(z)}{P(z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}\frac{X(z)}{P(z)} \tag{6.84}$$

$$=\frac{\eta(z)}{a(z)}\frac{a(z)}{\nu(z)} \tag{6.85}$$

$$=\frac{\eta(z)}{\nu(z)} \tag{6.86}$$

这个表达式证实了状态反馈已经改变了从开环情况下的$a(z)$到闭环情况下$\nu(z)$的输入-输出传递函数的分母，并相应地调整了特征多项式和极点。然而，状态反馈保留了没有改变的分子多项式$\eta(z)$，从这个多项式中可以选择零点。闭环系统的实际零点都是$\eta(z)$的根，这些根没有被新的闭环特征多项式$\nu(z)$的根所抵消，并且也许因此会与开环系统的零点有所不同。

如果状态反馈在某一个位置放上了一个闭环自然频率，该位置就会在$\eta(z)$和$\nu(z)$之间产生新的对消，那么开环系统的一个零点会从闭环系统中消失。因为状态反馈并不影响模式的可达性和不可达性，这种消失或对消一定会对应于由状态反馈造成的不可观测。反过来，如果状态反馈把抵消的开环系统的自然频率移动到一个新的位置，那么$\eta(z)$的一个在开环系统中不是零点的根，就会在闭环系统中出现，所以$\eta(z)$和$a(z)$之间的原始对消就不会在$\eta(z)$和$\nu(z)$中出现。这对应的情况是，开环系统的一个不可观测但是可达的模式现在变成了可观测的——并且继续保持可达的——闭环系统的模式。

对于CT情况，可以采用同样的类似方法来处理，上面所讨论的这一点上的变化情况，读者应该是很熟悉的，所以这里省略细节。

例6.5 船舶航向状态反馈

再次考虑例6.3中的样本-数据的DT状态空间模型，船舶以恒定速度前进的转向动态表示为

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\begin{pmatrix}q_1[n+1]\\q_2[n+1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\sigma\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1[n]\\q_2[n]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho\\\sigma\end{pmatrix}x[n]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n] \tag{6.87}$$

回忆一下，状态向量$\boldsymbol{q}[n]$包括了采样的航向误差$q_1[n]$和采样的船舶转向率$q_2[n]$，两个都是在时间$t=nT$时进行采样的，控制输入$x[n]$在区间$nT\leqslant t<nT+T$内为舵角的一个常数值。相同的模式可以描述DC电动机在分段恒定电压下的运动情况。

为了实现这个例子的目标，取$\alpha=1$，$\sigma=T$，$\rho=T^2/2$，那么

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}T^2/2\\T\end{pmatrix} \tag{6.88}$$

260

令

$$x[n]=g_1q_1[n]+g_2q_2[n] \tag{6.89}$$

使得闭环状态演化矩阵的结果为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1+g_1(T^2/2) & T+g_2(T^2/2)\\ g_1T & 1+g_2T\end{bmatrix} \tag{6.90}$$

该矩阵的特征多项式为

$$\begin{aligned}\nu(\lambda)&=(\lambda-1-g_1(T^2/2))(\lambda-1-g_2T)-g_1T(T+g_2(T^2/2))\\&=\lambda^2-\lambda(2+g_1(T^2/2)+g_2T)+(1-g_1(T^2/2)+g_2T)\end{aligned} \tag{6.91}$$

对于在 μ_1 和 μ_2 下期望得到的闭环根，该多项式将会是

$$\nu(\lambda)=(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)=\lambda^2-\lambda(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2 \tag{6.92}$$

将该式与式(6.91)比较，可以得到下面一对联立线性方程，对于所要求的反馈增益，需要求解这对方程：

$$\begin{bmatrix}T/2 & 1\\ -T/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}\mu_1+\mu_2-2\\ \mu_1\mu_2-1\end{bmatrix} \tag{6.93}$$

因此有

$$\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=\frac{1}{T^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ T/2 & T/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1+\mu_2-2\\ \mu_1\mu_2-1\end{bmatrix} \tag{6.94}$$

为了便于说明，假设在该DT模式中，希望获得尽可能最快的闭环响应，也就是之前在该系统观测误差模型下，例6.3所描述的无差拍特性。这导致了把两个闭环自然频率都放置在0，从而 $\mu_1=0=\mu_2$ 且 $\nu(\lambda)=\lambda^2$。那么式(6.94)表明了

$$g_1=-1/T^2,\quad g_2=-1.5/T \tag{6.95}$$

正如在与无差拍观测器的连接中指出的那样，这里没有说明在有重复特征值时如何分析系统性能，但是在有为0重复特征值的特殊情况下，可以轻易证明在这个二阶系统下状态会在有限个步长——最多两个步长——内变为**0**。为了在此确立这些内容，注意到上面对于 **g** 的选择，可以得到

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1/2 & T/4\\ -1/T & -1/2\end{bmatrix} \tag{6.96}$$

所以

$$[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}]^2=0 \tag{6.97}$$

其证明了任何非零初始条件的影响都至多会在两步内消除。

在实际应用中，这样的无差拍特性也许并不能达到，因为很大的控制作用力——这里是对船舶的舵角的控制作用力——在 T 很小时是需要的。有更大幅度的 μ_1 和 μ_2 的值，虽然还是小于1，将对应于更慢的稳定，并且因此要求较小的控制作用力。在另一方面，在某种程度上，经过更长的间隔，对于下面的CT模型预测具有信心的话，那么在原则上就可以使用无差拍控制规则，通过一个足够大的 T 来满足控制约束，然后允许船舶处理船舵的两种运动：

261

$$\begin{aligned}x[0]&=-(1/T^2)q_1[0]-(1.5/T)q_2[0]\\x[1]&=-(1/T^2)q_1[1]-(1.5/T)q_2[1]\\x[n]&=0,n\geqslant 2\end{aligned} \tag{6.98}$$

◀

在典型的应用中，往往没有对设备的状态变量的直接量测值，而是仅仅知道控制输入的信息，以及伴随有噪声的系统输出量测值。然而，倘若系统可以通过具有式(6.53)和式(6.54)所示形式的、可观测的(或者至少是可检测的)模型进行很好的描述，那么运用能产生状态变量的渐进收敛估计值的观测器，就可以重构出状态来。在下一节中，将用观测器

得到的状态估计值来替代直接状态量测值，并学习由这种变换所引起的闭环特性。

6.4　基于观测器的反馈控制

状态反馈的一个障碍是，状态的直接量测值通常是不可获得的。现在关注 DT 情况，但是对于 CT 情况的处理用的是非常相似的方式。这里所具有的典型信息是关于应用到设备上的控制信号 $x[n]$的信息，以及可能被噪声干扰了的设备输出量测值$y[n]$，还有就是该系统的标准模型。之前已经知道了如何使用这些信息来估计状态变量，这里需要利用一个观测器或者状态估计器。因此需要考虑，在式(6.58)中的反馈控制规则下，当使用由观测器提供的状态估计值来代替不可获得的实际状态值时会发生什么。

采用这种替代后，控制规则需要修改为

$$x[n] = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{q}}[n] + p[n] = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q}[n] - \widetilde{\mathbf{q}}[n]) + p[n] \tag{6.99}$$

此时整体的闭环系统如图 6.8 所示。

对于这个综合的闭环系统的一个状态空间模型来说，可以通过对构成它的子系统，即式(6.1)中的设备和式(6.21)中的观测器的表达式，进行组合来得到，其中通过 $x[n]$和 $y[n]$包含了它们的闭环耦合。这里建议使用向量

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}[n] \\ \hat{\mathbf{q}}[n] \end{bmatrix} \tag{6.100}$$

作为该综合系统的状态向量。这是一个 $2L$ 分量的向量，它包括了$\mathbf{q}[n]$的项，$\hat{\mathbf{q}}[n]$的项也紧随其后。然而，回忆由$\widetilde{\mathbf{q}}[n]=\mathbf{q}[n]-\hat{\mathbf{q}}[n]$描述的观测误差状态，对该综合系统的状态向量的一个等价选择由下式设定

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}[n] \\ \widetilde{\mathbf{q}}[n] \end{bmatrix} \tag{6.101}$$

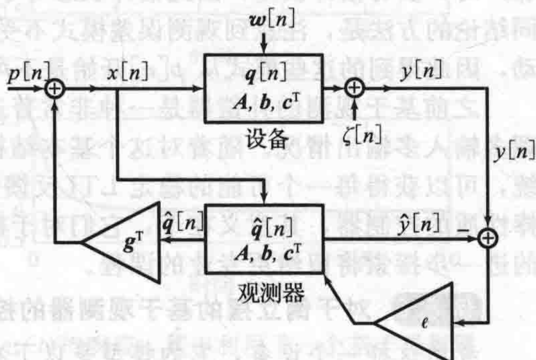


图 6.8　基于观测器的补偿器，反馈了一个估计状态变量的 LTI 组合

这是因为$\widetilde{\mathbf{q}}[n]$可以由 $\mathbf{q}[n]$和$\hat{\mathbf{q}}[n]$确定，反过来，$\hat{\mathbf{q}}[n]$可以由 $\mathbf{q}[n]$和$\widetilde{\mathbf{q}}[n]$确定。式(6.101)中，对于组合系统的状态向量的选择将产生更容易说明的系统描述，即以下的LTI状态空间模型：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}[n+1] \\ \widetilde{\mathbf{q}}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{g}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{b}\mathbf{g}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}[n] \\ \widetilde{\mathbf{q}}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} p[n]$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w}[n] + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} \zeta[n] \tag{6.102}$$

右边第一个矩阵为一个 2×2 的分块矩阵(block matrix or partitioned matrix)，其中 $\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ 为前面的 $L\times L$ 的分块，$L\times L$ 的矩阵$-\mathbf{b}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ 在最开始的 L 行与它相邻；在下方又有 $L\times L$ 的矩阵 $\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$，位于最后的 L 列的下面。该矩阵剩下的部分被 0 填满，由 $L\times L$ 的矩阵 $\mathbf{0}$ 所表示。另一个分块矩阵与此类似。式(6.102)结合了式(6.1)与(6.2)中对设备的描述，以及式(6.21)中对观测器的描述和式(6.99)中的反馈控制规则。注意这里还原了式(6.1)和式(6.2)中对于设备的更加复杂的表达式，而不是式(6.53)和式(6.54)中的改进的流线型的(streamlined)表达式，目的是为了显示在整个闭环系统上的设备干扰和测量噪声的影响。

式(6.102)中的状态衍化矩阵的分块三角结构，以及在对角位置上的块都是方阵的事实，可以得出这样的结论：整个系统的自然频率仅仅是 $\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ 以及 $\mathbf{A}+\boldsymbol{\ell}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ 的特征值。等价地，还可总结：在早前的记法中，状态演化矩阵的特征多项式是 $\nu(\lambda)\kappa(\lambda)$。这时对于方阵 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{S}$ 有下面行列式恒等式成立

262
263

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}=\det(\boldsymbol{R})\det(\boldsymbol{S}) \tag{6.103}$$

这里对这个恒等式不进行证明。

之前的结果表明基于观测器的反馈控制规则将产生一个具有很好特性的闭环系统，其自然频率是由从完美状态反馈所获得的自然频率和从观测误差方程所获得的自然频率联合起来得到的。假如开环系统是可达的以及可观测的，那么两组自然频率都是可以随意选择的。正常情况下，选择那些与状态反馈模式相关的、能够控制观测误差更快衰减的模式，这是为了在设备状态偏离所期望的状态太远之前，就能得到可用于反馈控制规则的一个合理准确的状态估计。

另一个有趣的事实是，在一个新的闭环系统中，从 $p[n]$到 $y[n]$的传递函数正好是由完美状态反馈获得的，也就是式(6.81)和式(6.86)给出的传递函数。原因是在计算传递函数的条件下——正如在其他外部输入置为零时，从零状态开始的输入-输出响应——保证观测器从设备的相同初始条件下(该情况下$\hat{\boldsymbol{q}}[0]=\boldsymbol{0}$)开始。这反过来将确保在没有设备故障和测量噪声时，没有估计误差，因此估计状态等于真实状态。另一个得到关于闭环系统传递函数相同结论的方法是，注意到观测误差模式不受外部输入 $p[n]$或者任意可以激励$p[n]$的信号的驱动，因此得到的这些模式从 $p[n]$开始是不可达的，所以它们的传递函数是隐藏的。

之前基于观测的补偿器是一种非常普遍且强大的控制设计方法的起点，它可以用于处理多输入多输出情况。随着对这个基本结构的适当改进，对于式(6.53)和式(6.54)中的系统，可以获得每一个可能的稳定 LTI 反馈控制器。有了这类控制器，就能够搜索那些有鲁棒性质的控制器，其意义在于，它们对于模型中的不确定性具有相对的免疫能力。对这些的进一步探索将留给更专业的课程。

264

例 6.6 对于倒立摆的基于观测器的控制器

考虑这样一个设备，它的模型是以下在倒立位置周围的特定无阻尼摆的线性模型：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t) \tag{6.104}$$

其自然频率为$\pm\sqrt{8}$，这说明它是一个不稳定的系统。在例 6.4 中了解了增益如下所示的状态反馈：

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}=[g_1\quad g_2]=[\mu_1\mu_2+8\quad -\mu_1-\mu_2] \tag{6.105}$$

其闭环自然频率为 μ_1 和 μ_2。比如说，假设选择 $\mu_1=-2$，$\mu_2=-3$，那么 $g_1=14$，$g_2=5$。相关的时间常数为 $1/2=0.5$ 和 $1/3=0.33$，因此在完美的状态反馈下希望系统在 $3\times0.5=1.5$s 左右达到稳定。

利用系统的一个角位置 $q_1(t)$量测值，得到系统观测器采用以下形式：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & 0\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x(t)-\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}(y(t)-\hat{q}_1(t)) \tag{6.106}$$

对应的误差动态为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t)=\begin{bmatrix}\ell_1 & 1\\ 8+\ell_2 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}(t) \tag{6.107}$$

其特征多项式为

$$\kappa(\lambda)=(\lambda-\ell_1)\lambda-(8+\ell_2)=\lambda^2-\ell_1\lambda-(8+\ell_2) \tag{6.108}$$

比如说，选择 $\ell_1=-7$，$\ell_2=-18$，那么该多项式就变为

$$\kappa(\lambda)=\lambda^2+7\lambda+10=(\lambda+2)(\lambda+5) \tag{6.109}$$

因而误差衰减时间常数为 $1/2=0.5$ 和 $1/5=0.2$。因此期望观测误差在 $3\times0.5=1.5$s 左右

达到稳定。

现在假设反馈被估计的状态而非不可用的实际状态，所以 $x(t)=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}}(t)+p(t)$。产生的闭环系统的响应由图6.9上边部分的一对极点表示，摆角 $q_1(t)$ 在该反馈控制下获得，对应的摆角的估计值 $\hat{q}_1(t)$ 通过观测器提供，并从其零状态开始，也就是 $\hat{q}_1(0)=0$，$\hat{q}_2(0)=0$。控制 $x(t)$ 也如图6.9所示，其中，底部的一对图作为基准，显示了 $q_1(t)$ 在之前设计中的精确的状态反馈控制之下的情况，以及所需的在精确的状态反馈下的控制作用力 $x(t)$。对于一个可比较的控制作用力，精确的状态反馈可以处理一个10倍于基于观测器的偏移的初始偏移 $q_1(0)$。

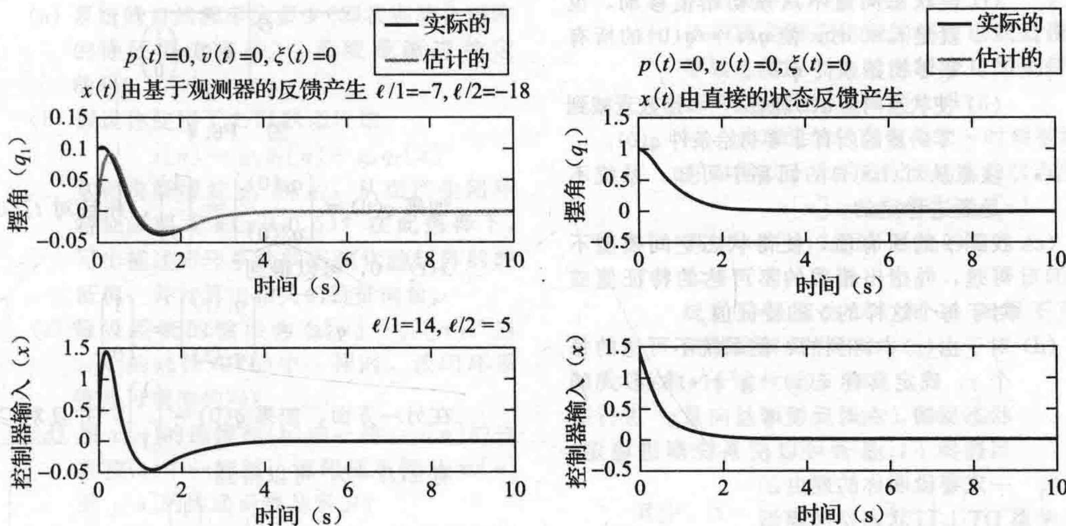


图6.9 以上一对极点表示了在反馈控制下倒立摆位置 $q_1(t)$ 的响应，其中利用了一个基于观测器的控制器，位置估计值为 $\hat{q}_1(t)$。输入 $x(t)$ 也已经画出。为了对照，在精确的状态反馈下得到的响应在这一对极点下方画出

基于观测器的控制器与一个控制输入相关，该控制输入比完美状态反馈情况下具有更大的振荡，这种情况会一直持续到观测估计值接近于设备潜在的状态值。一旦观测器在1.5s左右收敛，该反馈本质上就和精确的状态反馈一样好了，并且系统将在额外的1.5s达到稳定。

既然控制器是在线性模型的基础上进行的设计，下一步骤自然就是要仿真控制器对一个摆更为实际的、非线性的模型的影响，从而确定控制器运行的初始条件的范围以及控制器在怎样的扰动范围下性能仍然能令人满意。◀

6.5 延伸阅读

可以进一步阅读第4章和第5章建议的文章，它们包括有LTI系统中状态估计和状态反馈控制的相关资料，例如[Ant][Ch2][Ka1]和[Lue]。一个由航空航天和其他应用说明的详细的论述在[Frd]中给出。文章[Ast]对于反馈系统给出了一个可以理解的、最新的说明，包括状态空间模型，以及结合鲁棒控制的关键概念。对于非线性系统的控制在[Kha][Slo]和[Vid]中进行说明。

265~267

习题

基础习题

6.1 考虑一个因果CT系统，其由以下形式的状态空间模型描述：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx(t)$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}\gamma\\ -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[1\quad 1],\quad d=1$$

γ为一个实参数。

(a) 确定 $\mathbf{A}$ 的特征值及其对应的特征向量。

(b) 当输入恒为 0 时，也就是对于 $t\geqslant 0$，$x(t)=0$时的情况，确定：

(i) 使状态向量不从该初始值移动，也就是 $t>0$ 时，使 $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}(0)$的所有非零初始条件 $\mathbf{q}(0)$。

(ii) 使状态向量$\mathbf{q}(t)$随着$t\to\infty$指数衰减到零向量的所有非零初始条件 $\mathbf{q}(0)$。

注意从对(b)(i)的回答中可知，系统不是渐进稳定的。

(c) 找到 γ 的所有值，使得状态空间模型不可达，并指出相关的不可达的特征值或对于每个这样的 γ 的特征值。

(d) 对于由(c)中得到的、使系统不可达的每个 γ，确定具有 $x(t)=\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}(t)$的形式的状态反馈，在对反馈增益向量$\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ 进行适当选择下，是否可以使系统渐进稳定。一定要说明你的理由。

6.2 考虑 DT LTI 状态空间模型

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[-0.5\quad 1]\mathbf{q}[n]$$

(a) 清楚地计算其从输入 $x[n]$到输出 $y[n]$的传递函数 $H(z)$。请问极点在你所期望的地方吗？请解释一下原因。你应该能够从计算得到的 $H(z)$中直接得出系统为可达且可观测的，说明理由。系统是渐进稳定的吗？

(b) 现在假设 LTI 状态反馈为以下形式

$$x[n]=\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}[n]+p[n]$$

其中，$\mathbf{g}$ 为一个增益向量，$p[n]$为一个新的外部输入。如何选择 $\mathbf{g}$，会使该系统的闭环特征值(或自然频率)为± 0.5。分别对应于这些特征值的特征向量为多少？从 $p[n]$得到的闭环系统仍然是可达的吗？从 $y[n]$得到的闭环系统仍然是可观测的吗？

(c) 当 $\mathbf{g}$ 的选择和(b)中一样时，该闭环系统从输入 $x[n]$到输出 $y[n]$的传递函数 $F(z)$为多少？注意你在(a)和(b)中的回答，解释(用极点、零点、对消等等)发生了什么从而产生了该传递函数。

6.3 一个给定的系统不是渐进稳定的，但是 BIBO 稳定的。请问有可能让基于观测器的反馈使系统实现渐进稳定吗？解释理由。

6.4 一个二阶 CT 因果 LTI 系统由一个以下形式的状态空间模型描述

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\mathbf{q}(t)+\mathbf{b}x(t)$$

$$y(t)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}(t)$$

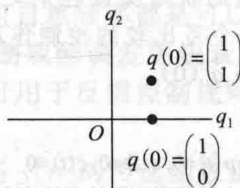


图 P6.4

如果 $q(0)=\begin{bmatrix}q_1(0)\\ q2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，并且对 $t\geqslant 0$ 有 $x(t)=0$，可以得到

$$\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}$$

在另一方面，如果 $\mathbf{q}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，并且对$t\geqslant 0$，有 $x(t)=0$，可以得到

$$\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}$$

(a) 系统的两个特征值及其对应的特征向量是什么？

(b) 确定矩阵 $\mathbf{A}$。

现在假设在以上所示的状态空间表达式中，已知

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1]$$

(c) 确定系统是否是可达的。

(d) 确定系统是否是可观测的。

(e) $\mathbf{b}$ 和$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ 如上所示，并且 $\mathbf{q}(0)=\mathbf{0}$ 时，那么对应于每个有界的输入 $x(t)$，输出 $y(t)$是有界的吗？也就是说，该系统为 BIBO 稳定的吗？

(f) 现在让状态反馈 $x(t)=\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}(t)$，其中 $\mathbf{g}^{\mathrm{T}}=[g_1\quad g_2]$。

(i) 有可能通过选择(实)常数 g_1 和 g_2，从而使系统渐进稳定吗？如果这样的 g_1 和 g_2 存在的话，你不必实际计算出来。

(ii) 如果限定 g_2 为 0，有可能通过选择一个常数 g_1 从而使系统渐进稳定吗？如果这样的 g_1 存在的话，你不必实际计算出来。

(iii) 如果限定 g_1 为 0，有可能通过选择一个常数 g_2 从而使系统渐进稳定

吗？同样，如果这样的 g_2 存在的话，不必实际计算出来。

6.5　考虑一个因果 DT LTI 系统

$$q[n+1]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}q[n]+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x[n]+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}w[n]$$

其中，$x[n]$为控制输入，$w[n]$为干扰输入。

(a) 系统的自然频率为多少(即状态演化矩阵的特征值为多少)？系统是渐进稳定的吗？

(b) 假设你使用了 LTI 状态反馈

$$x[n]=g_1q_1[n]+g_2q_2[n]$$

如何选择增益 g_1 和 g_2，从而产生闭环特征多项式 $z(z+0.5)$？在此选择下，写出描述闭环系统状态演化的矩阵的特征值，并计算出相关的特征向量。

(c) 假设系统的输出为 $y[n]=q_1[n]$。当 $x[n]$的选择和(b)中一样时，该闭环系统是可观测的吗？

(d) 当 $x[n]$的选择和(b)中一样，$y[n]$的选择和(c)中一样时，该闭环系统从 $w[n]$ 到 $y[n]$的传递函数是多少？

(e) 利用(b)、(c)和(d)的结果，用两种不同的方式确定该闭环系统从干扰输入 $w[n]$ 中是否是可达的。

6.6　一个同步发电机的动态通过以下形式的模型确定：

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\beta\frac{d\theta(t)}{dt}+\alpha\sin\theta(t)=T(t)$$

其中，$\theta(t)$为发电机的(相对的)角位置，$T(t)$为作用在其上的(归一化的)外部转矩，参数 α 为正，但 β 可正可负。写出该系统的状态空间模型。然后，假设 $T(t)$为一个正的常数值 $T(t)=\overline{T}$，确定 $\overline{T}$ 的取值可以使系统：

(i) 没有均衡解决方案(equilibrium solutions)。

(ii) 当 $\theta(t)=\overline{\theta}$ 且在$[0,2\pi]$范围内时，有一个均衡解决方案。

(iii) 当 $\theta(t)=\overline{\theta}$ 且在$[0,2\pi]$范围内时，有两个均衡解决方案。

写出在问题(iii)所得的两个均衡解决方案下的两个线性化模型，用以下标准形式来表达这两个模型：

$$\dot{q}(t)=Aq(t)+bx(t)$$

通过检查你是否可以利用 LTI 状态反馈获得一个任意闭环特征多项式，来确定它们每一个的可达性。

6.7　一个 DT 系统的状态演化由以下表达式描述：

$$q[n+1]=Aq[n]+bx[n]$$

其中，

$$A=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ -\alpha & 1-\alpha\beta\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

α 和 β 为实常数。矩阵 A 在 $\lambda_1=0.5$ 有一个特征值，对应的特征向量为 $v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$。

(a) 确定参数 α 和 β，第二个特征值 λ_2 及其对应的特征向量 v_2。

(b) 该系统是渐进稳定的吗？也就是说，在零输入情况下，对于任意初始条件，状态向量会逐渐衰减到 0 吗？

该系统的状态在每个 n 时刻被测量，并根据以下关系被用作输入的状态反馈

$$x[n]=g^{T}q[n]+p[n]$$

其中，$p[n]$为闭环系统的输入。

(c) 如果可能，定义一个 g^{T}，使得该闭环系统的特征值为 0.5 和 0。如果不可能，清楚地解释为什么。

6.8　考虑一个线性动态系统

$$\dot{q}(t)=Aq(t)+bx(t)$$
$$y(t)=c^{T}q(t)$$

其中，$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$c=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$。

(a) 该系统可达吗？证明你的答案。

(b) 假设该系统的状态是可求得的，希望利用状态反馈来控制系统的模式。产生的闭环系统如图 P6.8 所示。

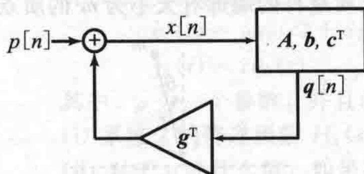


图　P6.8

对应的状态空间方程为

$$\dot{q}(t)=Aq(t)+b(p(t)+g^{T}q(t))$$
$$y(t)=c^{T}q(t)$$

(i) 有可能通过对增益 g 的合适选择从而能任意放置该系统的自然频率或者特征值吗？

(ii) 找到一个增益 g 使得该闭环系统的自然频率或特征值为 -2 和 -1。

6.9　考虑在如图 P6.9 所示的一个磁悬浮系统中的悬浮球。该悬浮球的动态特性由以下状态方程描述，其中 $q_1(t)$为垂直位置，$q_2(t)$为球的垂直速度：

$$\frac{dq(t)}{dt}=Aq(t)+bx(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 25 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

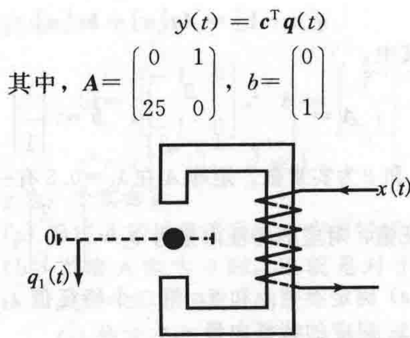


图 P6.9

(a) 确定该系统的特征值和特征向量。

(b) 确定 $\boldsymbol{c}$ 的所有可能的值，使得系统 BIBO 稳定。

(c) 确定通过使用以下形式的状态反馈，是否可能放置该系统的自然频率或特征值于任意自共轭的位置。

$$x(t) = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

(d) 假设状态变量不能直接测量，但是输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 都采用 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=[1\quad 0]$。想要基于以下方程估计系统的状态：

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{b}x(t)-\boldsymbol{\ell}(y(t)-\hat{y}(t))$$

$$\hat{y}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)$$

其中，$\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ 为 $\boldsymbol{q}(t)$ 的估计值。可以通过选择增益向量，使得状态估计的误差渐进衰减吗？

6.10 在这个问题中，考虑利用状态反馈来稳定如图 P6.10 所示的倒立摆，在长度为 L 的无质量杆的端部有大小为 m 的质点。

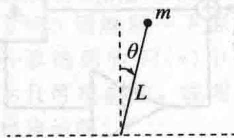


图 P6.10

对于小 θ，$\ddot{\theta}(t)=\dfrac{g}{L}\theta(t)+x(t)$，在采用某些合适的单位时，$g$ 是重力加速度，$x(t)$ 是外加转矩。相关的状态空间自然就如下所示：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \dot{q}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ g/L & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x(t)$$

$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$

其中，$q_1(t)=\theta(t)$，$q_2(t)=\dot{\theta}(t)$，对于这个问题，选择 $g/L=16$。

(a) 确定状态演化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和相应的特征向量。

(b) 确定从输入 $x(t)$ 到输出 $\theta(t)$ 的输入-输出(ZSR)传递函数。

(c) 确定一个对于初始条件的非零选择，使得状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$ 渐进衰减至 $\mathbf{0}$。

(d) 考虑使用状态反馈，即选择 $x(t)=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$，其中，$\boldsymbol{g}$ 是反馈增益。确定关于 $\boldsymbol{g}$ 的约束条件，使得系统是稳定的。

(e) 在这个系统中使用状态反馈时要求测量 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$。通过选择具有 $x(t)=a\theta(t)$（其中 a 是一个标量常数）的形式的 $x(t)$，是否有可能使系统稳定。

(f) 假设现在只有关于角度 $\theta(t)$（即 $q_1(t)$）的不准确的测量结果，因此可用的量是

$$y(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}+\zeta(t)$$

$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+\zeta(t)$$

其中，$\xi(t)$ 表明量测 $\theta(t)$ 的误差。现想要通过使用对于状态的估计而不是实际状态来使系统稳定，为了获得 $\boldsymbol{q}(t)$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$，利用系统动态（即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$）的知识以及（不精确的）量测值 $y(t)$ 产生 $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ 的状态空间模型如下

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{b}x(t)-\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\end{bmatrix}(y(t)-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}(t))$$

找到状态空间描述控制的测量误差，并定义为 $\tilde{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{q}(t)-\hat{\boldsymbol{q}}(t)$，即找到满足下式的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{f}$：

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\boldsymbol{q}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{E}\,\tilde{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{f}\zeta(t)$$

你能选择 ℓ_1 和 ℓ_2 使得误差方程的自然频率是稳定的吗？若能，选择 ℓ_1 和 ℓ_2，使得自然频率为 -4 以及 -3。

(g) 当角速度有一个含噪声的测量时，即

$$y(t)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}+\zeta(t)$$

重复完成之前(f)的问题。

(h) 使用定义在(f)中的 ℓ_1 和 ℓ_2，给出一个系统状态空间的表达式，该表达式可通过结合倒立摆的状态空间表达式和 $\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$ 的状态空间表达式来获得，以及利用作为反馈的估计状态：

$$x(t)=[\gamma_1\quad \gamma_2]\begin{bmatrix}\hat{q}_1(t)\\ \hat{q}_2(t)\end{bmatrix}$$

系统的特征多项式为多少？你可以选择 γ_1 和 γ_2，使得整个系统在自然频率为 -1、-2、-3 和 -4 下稳定吗？

6.11　一个特定的二阶 CT 因果 LTI 系统有自然频率 $\lambda_1=-3$ 和 $\lambda_2=-4$，它们为控制状态演化的矩阵的特征值。相关的特征向量分别表示为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$。系统的输入-输出传递函数为

$$H(s)=\frac{s+1}{(s+3)(s+4)}$$

(a) 系统是可达的吗？是可观测的吗？解释原因。

(b) 假设系统最初没有工作，也就是，其初始状态为 0。现在有可能选择下面的输入方式吗？即在整个运动中，状态沿着特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 开始运动，而没有任何沿着 $\boldsymbol{v}_2$ 的分量。仔细解释你的答案。

(c) 假设以上系统的输出应用到另一个因果二阶 LTI 系统的输入中，另一个系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{s+3}{s(s+5)}$$

组合系统的输入为第一个系统的原始输入，组合系统的输出为第二个系统的输出，如图 P6.11 所示。

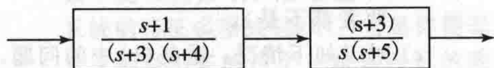


图　P6.11

(i) 该组合系统的状态空间表达式中有多少状态变量？该组合系统的自然频率为多少？

(ii) 该组合系统是渐进稳定的吗？解释原因。

(iii) 该组合系统从第一个系统的输入是可达的吗？从第二个系统的输出是可观测的吗？解释原因。

(iv) 如果想要利用第一个系统的输入测量值和第二个系统的输出量测值为该组合系统构建一个观测器，你可以得到观测器的估计误差使其衰减吗？如果不可以，为什么？如果可以，你能够使得误差衰减得任意快吗？

6.12　假设一个 DT 设备的方程及其观测器如下所示。

设备：

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}x[n]$$
$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dx[n]$$

观测器：

$$\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{b}x[n]-\boldsymbol{\ell}(y[n]-\hat{y}[n])$$
$$\hat{y}[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}}[n]+dx[n]$$

(a) 假设设备的初始条件未知，$\boldsymbol{\ell}=0$（也就是，在观测器中没有误差反馈），并且观测器的初始条件为零。如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1],\quad d=0$$

描述输出误差 $\hat{y}[n]-y[n]$ 以及状态误差 $\boldsymbol{q}[n]-\hat{\boldsymbol{q}}[n]$ 在 $n\geqslant 0$ 时的时间特性。

(b) 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 d 如(a)中所给，确定系统是否是可观测的。

(c) 确定对向量 $\boldsymbol{\ell}$ 的选择，使得控制状态估计误差衰减的特征值为 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{1}{16}$。

高级习题

6.13　(a)假设如图 P6.13 所示的系统 1 的传递函数为

$$H_1(s)=\frac{s}{s-1}=\frac{1}{s-1}+1$$

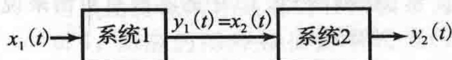


图　P6.13

(i) 为系统 1 找到一个一阶的状态空间模型，利用 $q_1(t)$ 来表示其状态变量并进行整理，使得 $y_1(t)=q_1(t)+x_1(t)$。

(ii) 你为系统 1 找到的状态空间模型是可达的吗？是可观测的吗？是渐进稳定的吗？

(b) 假设如图 P6.13 所示的系统 2 由以下一阶状态空间模型描述：

$$\dot{q}_2(t)=\mu q_2(t)+x_2(t)$$
$$y_2(t)=2q_2(t)$$

其中，μ 为一个参数，并且已知 $\mu\neq 1$。

(i) 系统 2 的传递函数 $H_2(s)$ 为多少？

(ii) 对于 μ 的什么值，如果有的话，能使系统 2 的状态空间模型为不可达的吗？为不可观测的吗？为渐进稳定的吗？

(c) (i) 结合(a)和(b)中的状态空间模型来得到一个以下形式的二阶状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x_1(t),$$
$$y_2(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+dx_1(t)$$

对于图 P6.13 的整个系统，利用 $\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix}$ 作为整个的状态向量 $\boldsymbol{q}(t)$，$x_1(t)$ 作为整个系统的输入，$y_2(t)$ 作为整个系统的输出。

(ii) 利用(c)(i)中的模型，计算从 $x_1(t)$ 到 $y_2(t)$ 的传递函数 $H(s)$，并证明它等于 $H_1(s)H_2(s)$。

(iii) (c)(i)中 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为多少？检

查以确定你计算的特征值与(ii)中你期望的特征值是一致的。与这些特征值相关的特征向量是什么？

(iv) 存在μ值，对于该值可以找到非零的初始条件$\boldsymbol{q}(0)$，使得可以产生的零输入解$\boldsymbol{q}(t)$(也就是$x_1(t)\equiv 0$时的结果)随着$t\to\infty$而衰减到$\mathbf{0}$。找到所有的μ值，并对于每一个μ，确定所有产生以上衰减的零输入解的初始条件。

(v) 对于μ为何值，如果存在的话，使得(ii)中的整个系统：

①是不可达的，哪个自然频率是不可达的？

②是不可观测的，哪个自然频率是不可观测的？

根据图P6.13中的零极点对消来说明你的结果。

(d) 假设你可以测量状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$，从而能选择

$$x_1(t)=g_1q_1(t)+g_2q_2(t)$$

产生的闭环系统仍然由一个二阶LTI状态空间模型描述。g_1和g_2取何值会造成闭环系统的自然频率为$-1\pm \mathrm{j}1$？你可以利用μ来表示你的答案。确定μ值，以使得对g_1和g_2的表达式存在有限的幅度，并使得你的答案与(v)中的结果一致。

(e) 假设你只能测量输入$x_1(t)$和输出$y_2(t)$。完整地确定估计状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$的过程，在这个方法中，每个实际和估计的状态变量之间的误差可以表示为两个衰减的、时间常数分别为0.5和0.25的指数项的一个线性组合的方式。你的估计方案对于所有的μ值都有效吗？同样，使得你的答案与(v)中的结果一致。

6.14 假设具有给定的状态空间模型$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$，以及输出方程$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$，其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-12&-19&-8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1&0\end{bmatrix}$$

事实证明对于$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{b}$的上述选择，无论矩阵$\boldsymbol{A}$的最后一行具体为什么数值，都有

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix}1\\s\\s^2\end{bmatrix}$$

知道下式同样可以帮助你解决这个问题

$$s^3+8s^2+19s+12=(s+1)(s+3)(s+4)$$

(a) 找到系统的特征多项式、自然频率或模态频率(例如，$\boldsymbol{A}$的特征值)、相关的振型(即特征向量)以及传递函数$H(s)$。系统是可达的吗？系统是可观测的吗？如果你发现系统是不可达的或者不可观测的(或者两者都不是)，确定哪个模式或者哪些模式分别是不可达的或者不可观测的(或者两者都不是)。

(b) 假设实现了状态反馈控制$x(t)=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)+p(t)$。确定怎样选择$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}$可以使闭环系统的特征多项式等于

$$(s+1)(s+3)(s+5)$$

对于状态反馈增益的这个选择，闭环系统的振型是什么？从$p(y)$到$y(t)$的传递函数是什么？闭环系统从$p(y)$中是可达的吗？闭环系统从$y(t)$中是可观测的吗？如果你认为系统是不可达的或者不可观测的(或者两者都不是)，确定哪个模型或者哪些模型分别是不可达的或者不可观测的(或者两者都不是)。

(c) 对于如下情况，重复(b)中的问题，其中期望的闭环系统特征多项式如下

$$(s+1)(s+2)(s+4)$$

6.15 在如下CT二阶LTI状态空间系统中，$x(t)$是已知的标量输入，$\overline{w}$是未知的常数标量干扰，且被加入到已知的输入中，$y(t)$是测量输出，$\boldsymbol{q}(t)$是状态向量，其含有$q_1(t)$和$q_2(t)$两个分量：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0&a_1\\1&a_2\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}(x(t)+\overline{w})$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)$$

这里的方案是将$\overline{w}$视为第三个状态变量，然后通过观测器来估计它，最后利用这个估计去消除干扰的影响。假设a_1和a_2使系统具有相异的特征值。

(a) 首先确定具体在怎样的参数条件下，给定的二阶系统从输出$y(t)$是可观测的。

(b) 现在确定具体在怎样的参数条件下，给定的二阶系统从输入$x(t)$是可达的。

无论你从(a)和(b)中确定了应该满足什么条件，均假设下面给定的系统都是可观测的和可达的。

(c) 设$q_3(t)=\overline{w}$为第三个状态变量，在已知输入$x(t)$(不含干扰成分)以及相同的输出$y(t)$的情况下，写出新的三阶

LTI 状态空间模型。

(d) 假设你现在要对从(c)中得到的三阶系统构造一个观测器，利用观测器增益为 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 馈送输出误差 $y(t)-\hat{y}(t)$ 进入实时的模拟器，这个模拟器形成了观测器的核心。写出 3×3 维的矩阵，其特征值控制观测误差的时间演化，以及写出相关的特征多项式。

(e) 原始系统的参数 a_1、a_2、b_1 和 b_2 在什么条件下，是保证下述结论的充分必要条件：通过对观测增益的适当选择，保证(d)中由特征值控制的观测器的误差衰减可以放在任意自共轭位置的集合中。说明这个条件也是原始二阶系统的极点和(或)零点的条件。

(f) 假设满足(e)中的条件，确定观测增益，使特征值控制的观测误差在 −1、−2 和 −3 处衰减，由系统参数 a_1、a_2、b_1 和 b_2 表示增益。

(g) 现在设 $x(t)=-\hat{\overline{w}}(t)$，其中 $\hat{\overline{w}}(t)$ 是 t 时刻对常数干扰 $\overline{w}$ 的估计。当 $\hat{\overline{w}}(t)$ 已经收敛于 $\overline{w}$ 时，对于系统这将消除常数干扰 $\overline{w}$ 的影响。确定整个六阶闭环系统的特征多项式(提示：它是你能非常直接写出来的两个三阶多项式的乘积)。六次特征多项式的根应该有一个在 0 处，这对应于一个事实：干扰变量 $\overline{w}$ 会固定取某些值。怎样的条件可以保证剩余的根全部严格地位于左半平面？

扩展习题

6.16 一个由分段常数转矩驱动的旋转机械的模型采用以下状态空间：

$$\boldsymbol{q}[k+1]=\begin{pmatrix}q_1[k+1]\\q_2[k+1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&T\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1[k]\\q_2[k]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T^2/2\\T\end{pmatrix}x[k]$$

$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[k]+\boldsymbol{b}x[k]$$

其中，状态向量 $\boldsymbol{q}[k]$ 包含了旋转体的位置 $q_1[k]$ 和速度 $q_2[k]$，且在时间 $t=kT$ 时被采样；$x[k]$ 为转矩在区间 $kT\leqslant t<kT+T$ 内的一个常数值。假设对于这个问题有 $T=0.5$。

(a) 该系统是渐进稳定的吗？注意该模式没有相异的特征值。为了回答这个问题，你也许应该调用稳定性结果，该结果只对相异特征值的情况进行了证明，但是也对此声明过它对一般情况有效。或者，用一个更加直接且更加令人满意的说法，你可以试着找到该情况下 $\boldsymbol{A}^k$ 项的一般表达式。计算 $\boldsymbol{A}^{20}$ 和 $\boldsymbol{A}^{100}$。$\boldsymbol{A}^k$ 的项随着 k 线性增长吗？随着 k 平方增长吗？随着 k 指数增长吗？

(b) 假设使用以下形式的一个位置反馈控制规则：

$$x[k]=\gamma q_1[k]$$

写出该闭环系统的状态空间模型，并得出其特征多项式的表达式。可以选择 γ 使得该闭环特征多项式的根在任意自共轭位置吗？也就是，复数根为一共轭对。

(c) 假设使用以下形式的一个状态反馈控制规则：

$$x[k]=[\gamma_1\quad\gamma_2]\begin{pmatrix}q_1[k]\\q_2[k]\end{pmatrix}$$

写出该闭环系统的状态空间模型。

(d) 在(c)中的增益 γ_1 和 γ_2 选择什么值，可以使得该闭环系统的自然频率为 ±0.6，对应的闭环特征多项式为 $(z-0.6)(z+0.6)$。在此增益选择下，且 $q_1[0]=4$，$q_2[0]=1$ 时，确定并画出 $0\leqslant k\leqslant 20$ 时的 $q_1[k]$、$q_2[k]$ 以及 $x[k]$。

(e) (c)和(d)中的状态反馈规则假设已经获得了精确的位置和速度量测值。假设替代现在所知的只是一个带噪声的位置量测值，因此现在可利用的量为

$$y[k]=[1\quad 0]\begin{pmatrix}q_1[k]\\q_2[k]\end{pmatrix}+\zeta[k]$$

$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[k]+\zeta[k]$$

其中，$\zeta[k]$ 为未知的噪声。一个估计实际位置和速度的方式是利用一个观测器，其形式为

$$\hat{\boldsymbol{q}}[k+1]=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{q}}[k]+\boldsymbol{b}x[k]-\begin{pmatrix}\ell_1\\\ell_2\end{pmatrix}(y[k]-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}}[k])$$

这里 $\hat{\boldsymbol{q}}[k]$ 为 $\boldsymbol{q}[k]$ 的估计值。记观测误差为 $\widetilde{\boldsymbol{q}}[k]=\boldsymbol{q}[k]-\hat{\boldsymbol{q}}[k]$。确定 $\widetilde{\boldsymbol{q}}[k]$ 满足的状态空间方程。

如旋转机械的例子所示，通过观测增益的合适选择，可以获得该误差方程的任意自共轭自然频率值。ℓ_1 和 ℓ_2 为什么值时，可以使误差方程的自然频率为 0 和 0.25？在此观测增益选择下，且 $q_1[0]=4$，$q_2[0]=1$，$\hat{q}_1[0]=0$，$\hat{q}_2[0]=0$ 时，把 $\hat{q}_1[k]$ 和 $\hat{q}_2[k]$ 与在(d)中所得的 $q_1[k]$ 和 $q_2[k]$ 的图进行比较，这里仍然假设 $x[k]$ 如(c)(d)所定，并假设测量噪声为 0，即 $\zeta[\cdot]=0$。

另外，当存在在每时刻独立同分

布的零均值测量噪声 $\zeta[\cdot]$时，探讨估计误差会发生什么情况，比如，对某些 $\sigma>0$，在每时刻取值为 $+\sigma$ 或 $-\sigma$ 的概率相同。

(f) 通过将观测器与机械模型组合在一起得到一个系统，使用下列的控制规则，得出这个系统的状态空间描述

$$x[k]=[\gamma_1 \quad \gamma_2]\begin{bmatrix}\hat{q}_1[k]\\ \hat{q}_2[k]\end{bmatrix}$$

而不要使用(c)中的状态反馈规则。你会发现利用下面的状态向量会更加方便：

268
~
278

$$\begin{bmatrix}q_1[k]\\ q_2[k]\\ \tilde{q}_1[k]\\ \tilde{q}_2[k]\end{bmatrix}$$

在(d)和(e)中的相同初始条件下，假设测量误差为零，计算 $q_1[k]$、$q_2[k]$和 $x[k]$，并画出其图形。你注意到了利用估计状态的反馈，而不是实际状态的反馈的任意结果了吗？

同样，当存在零均值测量噪声时，探讨图中会发生什么。

第7章 概率模型

前面的章节重点讨论了确定性信号(deterministic signal)。在本章及后续章节中，讨论的范畴将延伸到基于概率模型的信号，即随机信号或者随机过程。为了介绍这种重要类型的信号，本章先简要回顾概率和随机变量的基础知识。或许你们在以前的课程中已经学习过这些基本概念，这里的复习除了为参考相关知识提供方便外，也为了便于建立相应的符号记法。后续章节将根据这些概念来定义随机信号，考察它们的特性，探讨信号估计和检测的方法。

7.1 基本概率模型

一个基本概率模型包含以下3部分(如图7.1所示)：

(1) **样本空间**(sample space)Ψ 是在随机试验中出现各种可能结果 ψ 的集合。这里要求每次试验必产生且仅产生一种结果。

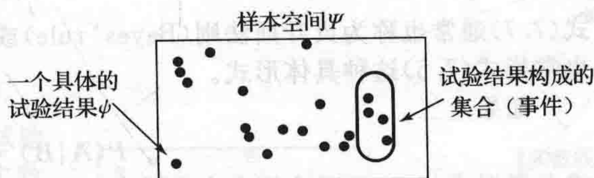


图7.1 样本空间和事件

(2) **事件代数**(event algebra)是样本空间子集的集合，即指样本空间中可能发生的事件——可以是某些基本事件的并集、交集或补集，而这些事件本身都存在于样本空间的子集中。需要注意的是，事件的交集也可以由并集和补集来表示。如果某一特定事件发生了，就意味着试验的结果存在于该事件的子集中。因此，集合 Ψ 对应的事件是“必然事件”，因为它总会发生。那么空集 $\varnothing$ 对应的事件是“不可能事件”，因为它从来没有发生过。

(3) **可能性度量**(probability measure)是将每一个事件 A 与其发生的概率 $P(A)$ 关联起来，并有以下结论：

- $P(A)\geqslant 0$；
- $P(\Psi)=1$；
- 如果 $A\cap B=\varnothing$，即事件 A 与 B 互斥，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{7.1}$$

对于任意一个特定的事件，都存在多种方式去说明事件的结果构成，以及怎样定义一个事件代数，并给出一个可能性度量。为了方便，通常会用尽量少但足够的样本空间中的元素或结果去表示所关注的事件。比较典型的是选择所关注事件的最小事件代数。同样，对于事件概率的描述也要和上述条件相符。这样的描述方式可能基于对称分析的方法，或者根据特定应用而采取其他可行的方式。

联合概率(joint probability)$P(A\cap B)$ 通常也表示成 $P(A,B)$。

7.2 条件概率、贝叶斯法则和事件的独立性

在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率记作 $P(A|B)$。当事件 B 已经发生，样本空间就会缩小至 B 所包含结果的范围内，因此条件概率可以很自然地定义为

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)},\quad P(B)>0 \tag{7.2}$$

可以直接验证，这种条件概率的定义方法对样本空间 B 提供了一种合理的概率度量。上述

等式还可以写成下面的形式：

280

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) \tag{7.3}$$

如果 $P(B)=0$，那么式(7.2)中的条件概率就是未被定义的。

同理，还可以得到

$$P(A,B) = P(B|A)P(A) \tag{7.4}$$

结合式(7.3)和式(7.4)可得

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \tag{7.5}$$

式(7.5)在信号的检测、分类、估计方法的研究中扮演着重要角色。

如果存在一个元素互斥且完备的事件集合$\{B_j\}$，其中 $B_\ell \cap B_m = \varnothing$，且 $\ell \neq m$，$\bigcup_j B_j = \Psi$，那么对事件 A 有

$$P(A) = \sum_j P(A,B_j) = \sum_j P(A|B_j)P(B_j) \tag{7.6}$$

根据式(7.5)，可以得到：

$$P(B_\ell|A) = \frac{P(A|B_\ell)P(B_\ell)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)} \tag{7.7}$$

式(7.7)通常也称为贝叶斯法则(Bayes' rule)或贝叶斯定理(Bayes' theorem)。贝叶斯法则也常指式(7.5)这种具体形式。

如果

$$P(A|B) = P(A) \tag{7.8}$$

或者根据式(7.3)，联合概率密度满足

$$P(A,B) = P(A)P(B) \tag{7.9}$$

则称事件 A 和事件 B 是相互独立的。

更一般地，如果一个事件集合中所有事件交集的概率无论是多少，总是等于各事件概率的乘积的话，那么就称这些事件是相互独立的。需要注意的是，事件之间两两相互独立，并不足以充分说明这些事件之间相互独立。同样，对于两个事件集合 A 与 B，如果它们交集的概率总是可以分解为 A 包含的所有事件的联合概率与 B 包含的所有事件的联合概率的乘积，那么事件集合 A 与事件集合 B 也是相互独立的。

例 7.1 通信系统中的传输误差

考虑一个通信系统，传输的符号记为 A、B、C。由于信道引入的传输误差(transmission error)(如噪声、丢包、衰减等)会导致每一个传输符号都存在非零的误差概率，那么接收符号和发送符号就会不同。表 7.1 描述了在特定系统条件下每一种可能的发送符号和接收符号对所对应的联合概率。

281

为了便于标记，这里用 A_s、B_s、C_s 分别表示发送符号 A、B、C 的事件，用 A_r、B_r、C_r 分别表示接收到符号 A、B、C 的事件。举例来说，在表 7.1 中，接收到符号 A 而发送的是符号 B 的概率是 $P(A_r,B_s)=0.13$。类似地，$P(C_r,C_s)=0.15$。为了确定 A_r 边缘概率(marginal probability) $P(A_r)$，可以将所有接收到 A 符号的互斥事件的概率相加，即

表 7.1 每一种可能的发送符号和接收符号对所对应的联合概率

发送的符号	接收到的符号		
	A	**B**	**C**
A	0.05	0.10	0.09
B	0.13	0.08	0.21
C	0.12	0.07	0.15

$$P(A_r) = P(A_r,A_s) + P(A_r,B_s) + P(A_r,C_s) = 0.05 + 0.13 + 0.12 = 0.30 \tag{7.10}$$

同理，可以得到 A_s 边缘概率 $P(A_s)$：

$$P(A_s) = P(A_r,A_s) + P(B_r,A_s) + P(C_r,A_s) = 0.24 \tag{7.11}$$

在通信符号传输中，也许获知某个条件概率可能是很重要的事情，比如，发送符号 C 的条

件下接收到符号 B 的概率，也就是 $P(C_s|B_r)$。尽管这个信息无法从表中直接得到，但是可以通过式(7.5)计算得到。特别地，结合式(7.5)与式(7.4)，所求的条件概率可以表示成

$$P(C_s|B_r)=\frac{P(C_s,B_r)}{P(B_r)} \tag{7.12}$$

式(7.12)中的分子可以直接查表得到，为 0.07。分母则可以通过计算得到：$P(B_r)=P(B_r,A_s)+P(B_r,B_s)+P(B_r,C_s)=0.25$。于是 $P(C_s|B_r)=0.28$。

为了确定在符号 B 已经发送的条件下接收到符号 A 的概率，条件概率 $P(A_r|B_s)$ 可以表示成

$$P(A_r|B_s)=\frac{P(A_r,B_s)}{P(B_s)} \tag{7.13}$$

其中，分子通过查表得到，为 0.13。分母可以计算得到：$P(B_s)=P(B_s,A_r)+P(B_s,B_r)+P(B_s,C_r)=0.42$。由此可得 $P(A_r|B_s)=0.31$。

在通信系统中，通常也关注传输误差概率的测量和计算。在这个例子中，传输误差对应于下列任意发生的互斥事件中的一个：

$$(A_s,B_r),(A_s,C_r),(B_s,A_r),(B_s,C_r),(C_s,A_r),(C_s,B_r) \tag{7.14}$$

因此，传输误差概率 P_t 就是这六个互斥事件概率的总和，它们各自的概率可以直接从表中非对角线的位置读取，可得 $P_t=0.72$。◀ 282

7.3 随机变量

实值随机变量 $X(\cdot)$ 是指将每一个随机试验的结果 ψ 映射到一个实函数 $X(\psi)$。这个实数 $X(\psi)$ 称为在此试验中该随机变量的实现(或数值化)。如图 7.2 所示，函数 $X(\cdot)$ 需要满足的一个附加条件是：对于所有实数 x，映射到区间 $X\leqslant x$ 的试验结果集合 $\{\psi\}$ 都必须是样本空间 Ψ 中的事件。随机变量常简写为 X，代替 $X(\cdot)$ 和 $X(\psi)$。

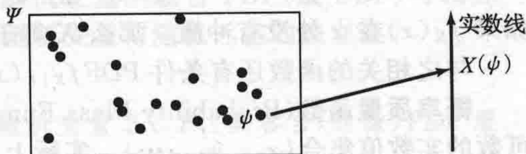


图 7.2　一个随机变量

为了分析方便，随机性的试验结果也通常映射到一个有限或可数的非实数集合上，如类别(category)或标签(label) L_0，L_1，L_2，…构成的集合。例如，一台机器的随机状态可以分类表示为“空闲”“忙”“失败”(Idle、Busy、Failed)。类似地，在雷达扫描过程中，目标的随机状态也可以用“无”和“有”(Absent 和 Present)来跟踪。可以认为，这些状态标签组成了一个具有互斥性和完备性的事件的集合，每个事件都包含了状态标签对应的所有试验结果。这样的映射将随机试验的每个结果 ψ 都和一个类别或标签 $L(\psi)$ 联系在一起，其可能的取值为 L_0，L_1，L_2，…。通常将 $L(\psi)$ 简写为 L，指将这样的映射表示为一个分类的随机变量，或者在情境已知时就看成一个随机变量。

7.4 概率分布

累积分布函数(Cumulative Distribution Function，CDF)　对于一个随机变量 X(实值)，包含所有试验结果 ψ 的事件概率 $X(\psi)\leqslant x$，可以用累积分布函数 $F_X(x)$ 来描述：

$$F_X(x)=P(X\leqslant x) \tag{7.15}$$

由此可得

$$P(a<X\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a) \tag{7.16}$$

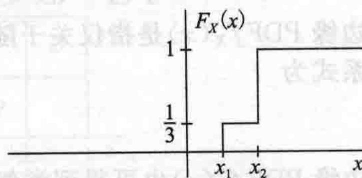


图 7.3　随机变量 X 的 CDF 实例，其中 $P(X=x_1)=\frac{1}{3}$，$P(X=x_2)=\frac{2}{3}$

特别地，如果 X 在某个特定的点 x_1 存在非零的概率，即 $P(X=x_1)>0$，那么 $F_X(x)$ 将会在 x_1 处有 $P(X=x_1)$ 大小的跳变，且 $F_X(x_1)-F_X(x_1-)=P(X=x_1)$，如图 7.3

283 所示。CDF 总是一个关于 x 的非递减函数，从 $F_X(-\infty)=0$ 开始上升至 $F_X(\infty)=1$。

与之相关的函数还有条件 CDF $F_{X|L}(x|L_i)$，用于描述随机变量 X 在随机标签(random label)L 取特定值 L_i 条件下的概率分布，假定 $P(L=L_i)>0$，则有

$$F_{X|L}(x|L_i) = P(X \leqslant x|L = L_i) = \frac{P(X \leqslant x, L = L_i)}{P(L = L_i)} \tag{7.17}$$

概率密度函数(Probability Density Function，PDF) 实值随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$是 $F_X(x)$的导数：

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7.18}$$

由于 $F_X(x)$是非递减的，因此 PDF 总是非负的。在 $F_X(x)$间断点的地方，x 对应于事件发生的概率非零，那么在 $f_X(x)$中将会出现冲激(Dirac)函数，它的强度(也就是面积)和 $F_X(x)$间断点的高度相同。可以得到

$$P(a < X \leqslant b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x \tag{7.19}$$

当 a 和 b 分别为负无穷和正无穷时，式(7.19)的左边必然为 1，即积分区域包含 PDF 曲线下整个区域的面积。值得注意的是，式(7.19)的左边不等式的结构意味着 $f_X(x)$在$x=b$处的任何冲激将被包含在积分区域内，而在 $x=a$ 处的冲激不会被包含在积分区域内，也就是说，实际上积分区域是从 $a+$ 到 $b+$。

由此可以认为 $f_X(x)\mathrm{d}x$ 对应的概率为 X 落在区间$(x-\mathrm{d}x, x]$的概率，即

$$P(x - \mathrm{d}x < X \leqslant x) \approx f_X(x)\mathrm{d}x \tag{7.20}$$

如果 $f_X(x)$在 x 处没有冲激，那么 X 等于 x 的概率为零，即 $P(X=x)=0$。

与之相关的函数还有条件 PDF$f_{X|L}(x|L_i)$，定义为 $F_{X|L}(x|L_i)$关于 x 的导数。

概率质量函数(Probability Mass Function，PMF) 实值离散随机变量 X 只取有限或可数的实数值集合$\{x_1, x_2, \cdots\}$。实际上，这属于分类随机变量，正如前面定义的，不过这里以数值形式取代了标签。在这种情况下，CDF 将会是一个“阶梯状”的函数，而

284 PDF 除了在 x_j 处存在冲激，且冲激强度取决于 x_j 对应的概率值外，其余部分将全部为零。这些概率可以用概率质量函数 $p_X(x)$来表达，其中事件 $X=x_j$ 的概率为

$$P(X = x_j) = p_X(x_j) \tag{7.21}$$

7.5 联合分布的随机变量

多个(或复合)随机变量的模型可通过联合概率来描述。例如，两个随机变量 X 和 Y 的联合 CDF 如下：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{7.22}$$

相应的联合 PDF 是

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{7.23}$$

可以直观理解为

$$P(x - \mathrm{d}x < X \leqslant x, y - \mathrm{d}y < Y \leqslant y) \approx f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.24}$$

边缘 PDF$f_X(x)$是指仅关于随机变量 X 自身的 PDF，与联合概率密度 $f_{X,Y}(x,y)$之间的关系式为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \tag{7.25}$$

边缘 PDF$f_Y(y)$也可得到类似的表达式。

前面讨论过随机变量 X 和随机标签 L 的概率模型，式(7.17)给出了条件 CDF，即

$$F_{X|L}(x|L_i) = P(X \leqslant x|L = L_i) = \frac{P(X \leqslant x, L = L_i)}{P(L = L_i)} \tag{7.26}$$

其中，$P(L=L_i)>0$。该函数关于 x 的导数即为条件 PDF $f_{X|L}(x|L_i)$。当模型中包含两个连续的随机变量 X 和 Y 时，相应的条件 PDF$f_{X|Y}(x|y)$描述的是 $Y=y$ 条件下 X 的分布情况。对于连续随机变量 Y 有 $P(Y=y)=0$，很自然地有下面的结果：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{7.27}$$

不过其证明比较微妙。要知道式(7.27)是否合理，可观察条件 PDF$f_{X|Y}(x|y)$必有的性质：

$$f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x \approx P(x-\mathrm{d}x<X\leqslant x|y-\mathrm{d}y<Y\leqslant y) \tag{7.28}$$

285

根据贝叶斯法则，上式的右边可以重新写成

$$P(x-\mathrm{d}x<X\leqslant x|y-\mathrm{d}y<Y\leqslant y)\approx\frac{f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{f_Y(y)\mathrm{d}y} \tag{7.29}$$

结合这两个等式就可以得到式(7.27)。

同理可推导得到下面的关系式：

$$P(L=L_i|X=x)=\frac{f_{X|L}(x|L_i)P(L=L_i)}{f_X(x)} \tag{7.30}$$

如果说两个随机变量 X、Y 是独立的或统计意义上独立，那么它们的联合 PDF(或它们的联合 CDF)可以分解成各自分布函数的乘积：

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \quad \text{或} \quad F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \tag{7.31}$$

这个条件等价于以 X 定义的任意事件的集合独立于以 Y 定义的任意事件的集合。

对于两个以上随机变量的独立性，也要求这些随机变量的联合 PDF(或 CDF)可以分解为各自 PDF(或 CDF)的乘积。类似地，可以定义随机变量与随机标签的独立性。

例 7.2 事件的独立性

为了说明以上的定义和概念，考虑两个独立的随机变量 X、Y，其各自(边缘)PDF 服在 0～1 的均匀分布：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.32}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.33}$$

因为 X 和 Y 是独立的，因此联合概率分布函数 $f_{X,Y}(x,y)$可以写成

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{7.34}$$

定义事件 A、B、C 和 D 如下：

$$A=\left\{y>\frac{1}{2}\right\},\quad B=\left\{y<\frac{1}{2}\right\},\quad C=\left\{x<\frac{1}{2}\right\},$$
$$D=\left\{x<\frac{1}{2},y<\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x>\frac{1}{2},y>\frac{1}{2}\right\} \tag{7.35}$$

如图 7.4 所示。

286

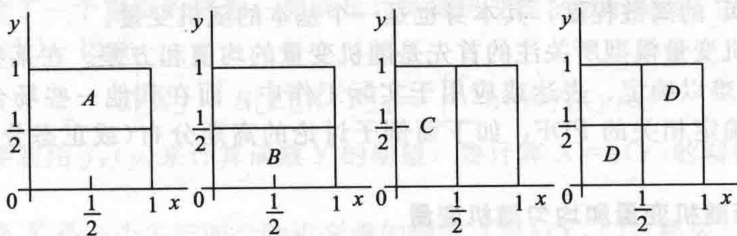


图 7.4 例 7.2 中的事件 A、B、C 和 D

也许你会问为什么这些事件是两两独立的，比如 A 和 C 是否独立。要回答这个问题，

就要看它们的联合概率分布是否能够分解为各自概率分布的乘积。

例如，

$$P(A,C) = P\left(y > \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \tag{7.36}$$

$$P(A) = P(C) = \frac{1}{2} \tag{7.37}$$

因为 $P(A,C)=P(A)P(C)$，那么事件 A 和事件 C 就是独立的。然而，

$$P(A,B) = P\left(y > \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{7.38}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \tag{7.39}$$

因为 $P(A,B) \neq P(A)P(B)$，那么事件 A 与事件 B 就不是相互独立的。

注意到 $P(A,C,D)=0$，因为这三者的区域之间没有重叠的部分。然而，$P(A)=P(C)=P(D)=\frac{1}{2}$，因此 $P(A,C,D) \neq P(A)P(C)P(D)$，这意味着事件 A、C 和 D 之间不是相互独立的，尽管显而易见它们两两之间是独立的。对于多个事件的独立性，要求任意事件交集的概率都等于各自事件概率的乘积。因此对这三个事件的情况，两两独立是必要但不充分条件。◀

7.6 期望、矩和方差

在很多应用中除了 PDF 提供的信息外，通常需要对随机变量进行更概括性或更细致的描述。期望(expectation)也称为实值随机变量 X 的平均值或者一阶矩(first moment)，用 $E[X]$、$\overline{X}$ 或 μ_X 来表示，其定义如下：

$$E[X] = \overline{X} = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \tag{7.40}$$

287 如果说 $f_X(x)$ 作为密度函数是在实轴上对概率分布的“量”(mass)的描述，那么期望描述的是这些量的中心位置。随机变量和的期望值是各自期望值的和：

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \tag{7.41}$$

对 PDF 中心或集中位置的简单度量还有中位数(median)，它指的是 $F_X(x)=0.5$ 所对应的 x 值，以这种度量方式，x 也对应 $f_X(x)$ 的最大值。

随机变量 X 的方差(variance)或二阶中心矩(second moment)由 σ_X^2 表示，其定义如下：

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \text{偏离均值平方的期望值} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= E[X^2] - \mu_X^2 \tag{7.42}$$

等式的最后一步根据 $(X-\mu_X)^2 = X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2$，再分别对该式中的所有项求期望得到。其中，$E[X^2]$ 指的是 X 的二阶矩。方差的平方根称为标准差(standard deviation)，标准差广泛用于度量 PDF 的离散程度，其本身也是一个基本的随机变量。

很多工程随机变量模型所关注的首先是随机变量的均值和方差。在某些情况下，这是因为详尽的 PDF 难以确定、表达或应用于实际工作中。而在其他一些场合，通过均值和方差就能够完全确定相关的 PDF，如下面例子讨论的高斯分布(或正态分布)和均匀分布的 PDF。

例 7.3 高斯随机变量和均匀随机变量

两个常见的 PDF 是高斯(或正态)分布和均匀分布：

$$\text{高斯分布}: f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$\text{均匀分布}: f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{7.43}$$

用来定义高斯 PDF 的两个参数 m 和 σ 分别表示其均值和标准差。类似地，均匀分布的密度函数可以简单地通过它的下限 a 和上限 b 参数化，不过一个等价的参数化方法是通过它的均值 $m=(a+b)/2$ 和标准差 $\sigma=\sqrt{(b-a)^2/12}$ 来实现。◀

仅基于均值和方差可以就推导出一些有用的常规 PDF，其中最为熟悉的是切比雪夫不等式(Chebyshev inequality)，即

288

$$P\left(\frac{|X-\mu_X|}{\sigma_X}\geqslant\alpha\right)\leqslant\frac{1}{\alpha^2} \tag{7.44}$$

不等式(7.44)说明，任意随机变量落在偏离均值(均值的任意一边)α 或更多个标准差的概率不超过 $1/\alpha^2$。由切比雪夫不等式推导的结论相对比较保守，对于其他特定的 PDF 还有更多精确的推论。例如，对于高斯 PDF，令 $\alpha=3$，那么与均值偏离三个标准差的概率只有 0.0026，远小于切比雪夫上限值 1/9。类似地，对于均匀分布的 PDF，与均值偏离超过两个标准差的概率可精确到 0。

当随机变量 Y 取值为 y 时，随机变量 X 的条件期望为

$$E[X\mid Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x=g(y) \tag{7.45}$$

这就是说，当 $Y=y$ 时条件期望的取值和 $g(y)$ 有关。也可以考虑随机变量 $g(Y)$，即随机变量 Y 函数，对于每一个 $Y=y$ 计算出条件期望 $E[X|Y=y]$ 的值。随机变量 $g(Y)$ 称为 X "给定 Y"(与"给定 $Y=y$"相反)的条件期望，可用 $E[X|Y]$ 代替 $g(Y)$。请注意，随机变量 $g(Y)$ 的期望 $E[g(Y)]$，即迭代期望 $E[E[X|Y]]$，也有明确定义。接下来可以看到，这个迭代期望计算出来的结果非常简单，就是 $E[X]$。这一结论在第 8 章会有特定的用处。

首先考虑如何通过联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$ 计算 $E[X]$。一种方法是先计算出 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$，然后用式(7.40)中期望的定义式：

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{7.46}$$

不过还有更简单的方法，即先计算当 $Y=y$ 时 X 的条件期望，再根据 Y 的边缘概率密度，基于所有可能的 Y 对这个条件期望求平均。为了推导更精确，先回顾下式：

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y) \tag{7.47}$$

将其代入式(7.46)中可以得到

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}f_Y(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=E_Y[E_{X|Y}[X\mid Y]] \tag{7.48}$$

前面的期望表达式均采用了下标以便更直观地看出哪个变量的概率密度参与了计算。更简单的形式可以写成

$$E[X]=E[E[X\mid Y]] \tag{7.49}$$

289

上面的结果隐含了一个重要的信息，那就是计算随机变量函数的期望。假设 $X=h(Y)$，那么 $E[X|Y]=h(Y)$，因此

$$E[X]=E[E[X\mid Y]]=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)f_Y(y)\mathrm{d}y \tag{7.50}$$

这意味着只需要利用 $f_Y(y)$ 来计算函数 Y 的期望；要计算 $X=h(Y)$ 的期望，并不需要确定 $f_X(x)$。

同样，如果 X 是一个关于两个随机变量的函数 $X=h(Y,Z)$，那么

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(y,z)f_{Y,Z}(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{7.51}$$

如果 Y 和 Z 之间相互独立，且 $h(y,z)=g(y)\ell(z)$，那么不难得出

$$E[g(Y)\ell(Z)] = E[g(Y)]E[\ell(Z)] \tag{7.52}$$

反之亦然，如果式(7.52)对所有的 $g(\cdot)$ 和 $\ell(\cdot)$ 都成立，那么 Y 和 Z 就是独立的。

7.7 二元随机变量的相关性和协方差

考虑两个联合分布的随机变量 X 和 Y。它们的边缘 PDF 分别是通过对联合概率密度在 y 轴和 x 轴上的投影得到的：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x \tag{7.53}$$

换句话说，X 的 PDF 是通过联合 PDF 对另一个随机变量 Y 的所有可能取值 y 积分得到的，同理可得 Y 的 PDF。

与单个变量的情况类似，读者往往比较感兴趣的是能够用一些概括性的或近似的方法来获取二元 PDF 的中心位置和离散程度信息，而不需要详尽的 PDF 描述。这也再次暗示了对均值和方差概念的关注。二元 PDF 对应的均值由它所含两个变量各自的均值来定义：均值包含 x 分量的均值 $E[X]$ 和 y 分量的均值 $E[Y]$，这两个值可以从各自的边缘概率密度得到，则二元 PDF 中心位置就在

$$(x,y) = (E[X],E[Y]) \tag{7.54}$$

对二元 PDF 在 x 轴方向上的离散程度估计，可以用 X 的标准差 σ_X 表示，由 $f_X(x)$ 计算得到；对二元 PDF 在 y 轴方向上的离散程度估计，可以用 Y 的标准差 σ_Y 表示，由 $f_Y(y)$ 计算得到。然而这两个值仅提供了局部视图。同样二元 PDF 在一般方向上的离散程度也值得关注，而不仅是在两个坐标轴方向上。例如，可以考虑对如下定义的随机变量 Z 求标准差，或者求方差：

290

$$Z = \alpha X + \beta Y \tag{7.55}$$

其中，α 和 β 为任意的常数。可以看到，通过选取恰当的 α 和 β，式(7.55)可以变为 $Z=X$ 或 $Z=Y$，再次包含了已经讨论过的坐标轴方向。然而对任意的 α 和 β，通过分析 Z 的特点可以在任意方向上评估二元 PDF 的性质。

在考虑计算 Z 的方差之前，可以发现 Z 的均值能直接根据前面计算出的结果得到，也就是 $E[X]$ 和 $E[Y]$，即

$$E[Z] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \tag{7.56}$$

至于 Z 的方差，很容易通过式(7.55)和式(7.56)得到：

$$\sigma_Z^2 = E[(Z-E[Z])^2] = \alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2 + 2\alpha\beta\sigma_{X,Y} \tag{7.57}$$

其中，σ_X^2、σ_Y^2 分别是 x 轴和 y 轴对应的方差，$\sigma_{X,Y}$ 是 X 和 Y 的协方差(covariance)cov(X, Y)，或记作 $c_{X,Y}$，定义如下：

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{cov}(X,Y) = c_{X,Y} = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \tag{7.58}$$

等价地，

$$\sigma_{X,Y} = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{7.59}$$

式(7.59)是通过将式(7.58)括号中的项展开，再对每一项分别求期望得到。当 $Y=X$ 时，这个等式又回归到熟悉的 X 的方差表达式。式(7.59)中出现的 $E[XY]$，即随机变量乘积的期望值，称为 X 和 Y 的相关或二阶交叉矩，它有别于 X 或 Y 自身的二阶矩 $E[X^2]$ 或 $E[Y^2]$，用 $r_{X,Y}$ 表示：

$$r_{X,Y} = E[XY] \tag{7.60}$$

注意到式(7.57)中，当沿着两个坐标轴扩展到任意轴来考察联合概率分布的均值和离散程度时，协方差 $\sigma_{X,Y}$ 是唯一需要引入的新变量，而不需要在每一个新方向上都引入新的变量。总之，通过概括或近似的方法，用一阶矩、$E[X]$、$E[Y]$ 可以表示 $f_{X,Y}(x, y)$ 的中心位置；通过概括或近似的方法，用二阶矩、σ_X^2、σ_Y^2、$\sigma_{X,Y}$ 可以描述中心位置附近的离散程度。

291

协方差的归一化形式，也称为相关系数 $\rho_{X,Y}$，即

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{7.61}$$

归一化的作用是保证在 X 和 Y 被乘或加任意非零常数时，相关系数保持不变。例如，中心归一化的随机变量

$$V = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \quad W = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} \tag{7.62}$$

它们的均值都为 0，方差为 1，与 X、Y 的相关系数相同。相关系数也不妨称为协方差系数，因为它源自协方差的定义式，而不是两个随机变量的相关函数。然而该名称虽更有意义，却并不常用。

需要强调的是，式(7.57)中的 σ_Z^2 一定是非负的，还可以进一步发现 σ_Z^2/β^2 是关于 α 的二次式，这一点可以通过下面的二次式直接分析证明：

$$|\rho_{X,Y}| \leqslant 1 \tag{7.63}$$

在前面的各种定义中，一般来说，正的相关值 $r_{X,Y}>0$ 意味着 X 和 Y 的符号相同；正的协方差 $\sigma_{XY}>0$，或等价地，正的相关系数 $\rho_{X,Y}>0$，意味着 X 和 Y 与均值的偏差符号大体相同。相反，负的相关值意味着 X 和 Y 的符号趋向相反；而负的协方差或相关系数意味着 X 和 Y 与均值的偏差符号趋向相反。

既然 X 和 Y 的相关系数反映了它们与各自均值偏差关系的一些特点，可以推测相关系数对于从 X 的测量值中估计 Y 也会起到重要的作用，反之亦然。第 8 章中有关线性最小均方误差估计(LMMSE)的讨论，就是这种情况。

随机变量 X 和 Y 如果是无关的(或线性独立，一个不常用却容易引起误解的名称)，那么

$$E[XY] = E[X]E[Y] \tag{7.64}$$

或等价于

$$\sigma_{X,Y} = 0 \quad 或 \quad \rho_{X,Y} = 0 \tag{7.65}$$

因此，不相关并不意味着零相关，除非其中有一个变量的均值为 0。但不相关却意味着零协方差。这样的话，不相关可能称为无协变性(noncovariant)更好，但这个名称没有广泛使用。

292

注意到，若 X 和 Y 是独立的，则有 $E[XY]=E[X]E[Y]$，因此 X 和 Y 是无关的。一般其逆推并不成立。例如，组合(X,Y)的取值仅可能为(1,0)，(−1,0)，(0,1)和(0,−1)，且每种取值概率均为 1/4。那么容易判断 X 和 Y 是不相关的，但却不是独立的。

很快会碰到另外一个有趣且有用的概念，即正交(orthogonal)，它的定义是：若两个随机变量 X 和 Y 满足 $E[XY]=0$，则称这两个变量正交。

例 7.4 相关性和函数相关性

如果 Y 可以表示成一个随机变量 X 的线性函数，那么 Y 也是一个随机变量：

$$Y = \xi X + \zeta \tag{7.66}$$

其中，ξ 和 ζ 是已知常数。显然，随机变量 Y 的结果完全取决于随机变量 X 的结果，换句话说，Y 与 X 之间是必定相关的。可以直接得到：若 $\xi>0$，$\rho_{X,Y}=1$；若 $\xi<0$，则 $\rho=-1$。

下面考虑这样一种情形：

$$Y = \xi X^2 + \zeta \tag{7.67}$$

X 的 PDF $f_X(x)$是关于零点对称的偶函数，即 $f_X(-x)=f_X(x)$。这种情况下，X 和 Y 是不相关的，尽管 Y 完全由 X 的取值确定。对于利用相关系数如何通过 X 的线性函数来估计 Y，第 8 章有更详细的讨论。不过这对于非线性的估计作用不大。◀

在例 7.3 中，讨论了单一随机变量的高斯分布。接下来的例子将描述一对随机变量的

二元高斯密度函数。

例 7.5 二元高斯密度函数

若随机变量 X 和 Y 服从二元高斯分布或二元正态分布，那么它们的联合 PDF 为

$$f_{X,Y}(x,y)=c\exp\left\{-q\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X},\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right\} \tag{7.68}$$

其中，c 是一个归一化的常量(以便整个 PDF 的积分面积或"量"为 1)，$q(v,w)$ 是一个关于自变量 v 和 w 的二次函数，用 X 和 Y 的相关系数 ρ 表示为

$$c=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \tag{7.69}$$

293

$$q(v,w)=\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho vw+w^2) \tag{7.70}$$

这个概率密度是二元高斯密度的一般形式，它有以下性质：

- X 和 Y 的边缘概率密度也服从高斯分布。
- 在给定 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度服从高斯分布，其均值为
$$\mu_Y+\rho\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)(x-\mu_X) \tag{7.71}$$
方差为
$$\sigma_Y^2(1-\rho^2) \tag{7.72}$$
并与 x 的取值无关。同理可得在给定条件 $Y=y$ 时 X 的条件概率密度。
- 当 X 和 Y 不相关时，也就是 $\rho=0$，X 和 Y 之间是独立的。一般该结论并不适用于其他二元随机变量。
- X 和 Y 的任意仿射组合(如线性运算加常数等)得到的变量依然服从高斯分布(如 $Q=X+3Y+2$ 和 $R=7X+Y-3$ 都服从二元高斯分布)。

二元高斯分布的 PDF 和相关的概念是由统计学家弗朗西斯·高尔顿(查尔斯·达尔文的表弟)于 1886 年在研究父母和孩子身高的联合分布时提出的。当时已经提出的理论有二维中心极限定理和二元高斯极限密度。因此在很多应用中，对于联合分布的两个随机变量，这都是一个合理的模型。当然，也存在对多个变量的归纳总结。◀

前面有关两个变量的讨论可以直接推广到多个变量。特别地，对于多个变量联合 PDF

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_\ell}(x_1,x_2,\cdots,x_\ell) \tag{7.73}$$

在 ℓ 维空间中所有可能坐标轴方向上的均值分别是 $E[X_1]$，…，$E[X_\ell]$，而所有坐标轴方向上对应的离散程度可以由各自(边缘)的方差得到：σ_{X_1}，…，σ_{X_ℓ}。为了能够计算出任意方向上的离散程度，还需要知道 $\ell(\ell-1)/2$ 个二阶中心矩，即 σ_{X_i,X_j}，其中 $1\leqslant i<j\leqslant \ell$(注意到 $\sigma_{X_j,X_i}=\sigma_{X_i,X_j}$)，仅此而已，不再需要其他信息。

7.8 向量空间中的相关性质

向量空间(vector-space)图对于理解随机变量 X 和 Y 之间的一阶矩和二阶矩关系是一种非常有用的辅助手段。如果只是关心一阶矩和二阶矩的性质，这样的图形不仅仅是一种助记方法，且对于随机变量映射到(无限维度的)向量空间中的向量，具有非常明确的物理意义。尽管不对它们之间的联系做深入研究，但是对于后面章节将遇到的 LMMSE 估计问题中的结果推测或检验会很有帮助。

294

为了形成这样的图形，首先用向量空间中的向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别代表随机变量 X 和 Y。将这些向量长度的平方分别定义为随机变量的二阶矩 $E[X^2]$ 和 $E[Y^2]$。在欧氏向量空间中，向量长度的平方等于它自身的内积。与此一致的是，这里也将向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的内积

$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle$定义成随机变量的相关(或二阶交叉矩，second cross-moment)：

$$\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle = E[XY] = r_{X,Y} \tag{7.74}$$

根据该定义，它满足向量空间中内积的基本性质。

- 对称性：$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}\rangle$；
- 线性性：$\langle \boldsymbol{X}, a_1\boldsymbol{Y}_1 + a_2\boldsymbol{Y}_2\rangle = a_1\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2\rangle$；
- 非负性：对于任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}\rangle$的值为正，否则为 0。

当 $E[XY]=0$ 时，这里对向量内积的定义也与随机变量的正交概念是一致的。

中心随机变量 $X-\mu_X$ 和 $Y-\mu_Y$ 在向量空间中可以用向量$\widetilde{\boldsymbol{X}}$和$\widetilde{\boldsymbol{Y}}$表示，它们的长度的平方就是随机变量 X 和 Y 的方差：

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2],\quad \sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] \tag{7.75}$$

因此，这些表示中心随机变量的向量的长度就分别为 X 和 Y 的标准差 σ_X 和 σ_Y。向量$\widetilde{\boldsymbol{X}}$和$\widetilde{\boldsymbol{Y}}$的内积

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{X}},\widetilde{\boldsymbol{Y}}\rangle = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{X,Y} \tag{7.76}$$

也就是随机变量的协方差。

在欧式空间中，两个向量的标准内积定义为它们各自的长度和夹角余弦值的乘积，即

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{X}},\widetilde{\boldsymbol{Y}}\rangle = \sigma_{X,Y} = \sigma_X\sigma_Y\cos(\theta) \tag{7.77}$$

因此，图 7.5 中的角度

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}\right) = \arccos\rho \tag{7.78}$$

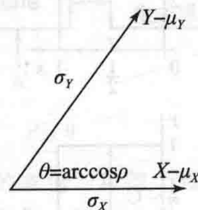


图 7.5 随机变量的向量表示

是两个向量间的夹角，那么从式(7.78)可以看出 ρ 为两个随机变量的相关系数。相应地，

$$\rho = \cos(\theta) \tag{7.79}$$

295

这也就是说，相关系数就是两个向量夹角的余弦值，那么不难得到：

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{7.80}$$

当 ρ 接近 1 时，两个向量几乎在一个方向上对齐；当 ρ 接近 -1 时，它们几乎是在相反的方向成一直线。当$\widetilde{\boldsymbol{X}}$和$\widetilde{\boldsymbol{Y}}$(代表中心随机变量)正交时，相关系数为零，或等价于随机变量的协方差为零：

$$\sigma_{X,Y} = 0 \tag{7.81}$$

7.9 延伸阅读

有许多介绍概率知识的书籍，都足以满足本书对相关知识的需求。概率模型的建立和随机过程在[Ber]中有清晰详尽的呈现，并且通过一些现有的实例来建立并巩固这个理论。[Gr1]进行了更深入和综合性的讨论，并在[Gr2]中广泛收集了解决实例。涉及概率和随机过程的文献，如[Coo][Fin][He1][Kay1][Kri][Leo][Mil][Pa4][Sha][Shy][Th2][Wl1]和[Yat]都倾向于信号与系统的分析，包含本书后续章节所涉及的内容。[Gal]在对随机过程的深入研究中将直觉和严谨相结合，形成重要的应用分析方法，同时探讨了信号的估计与检测问题，这也是后续章节要考虑的。在这里引用它的一个原因是它(该书的 10.6 节)细致描述了向量空间图，并被应用到了本书 7.8 节对随机变量相关性质的讨论中。正如前言所述，本书没有涉足信息论的相关领域，信息论是香农在 1948 年的论文[Shn]中所发表的。然而，如[Mac]中所说的，信息论对于信号、系统与推理的更深入理解具有重要意义。[Cov]和[An2]在介绍信息传输时也有提到。

296

习题

基础习题

7.1 x 和 y 是 0～1(均匀分布)的两个随机数，且相互独立，事件 A、B、C 和 D 如图 P7.1 所示，并有如下定义：

$$A=\left\{y>\frac{1}{2}\right\},\quad B=\left\{y<\frac{1}{2}\right\},$$

$$C=\left\{x<\frac{1}{2}\right\},$$

$$D=\left\{x<\frac{1}{2},y<\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x>\frac{1}{2},y>\frac{1}{2}\right\}$$

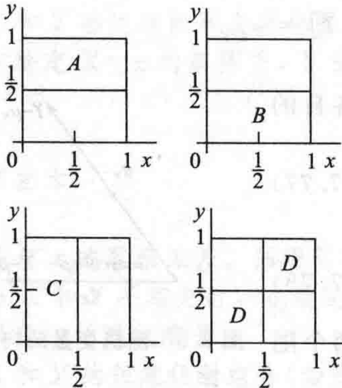


图 P7.1

(a) 判断以下三种情况中每对事件是否独立：(i) A 和 D；(ii) C 和 D；(iii) A 和 B。

(b) 事件 B、C 和 D 是否相互独立？提示：若要多个事件之间的相互独立，则要求这些事件交集的概率无论是多少，总是等于各事件概率的乘积。

7.2 一个通信系统传输 1、2、3 三种符号。表 P7.2列出了在发送符号 j 的条件下接收到符号 k 的所有可能符号对 (j,k) 的概率。例如，概率 0.21 对应的是发送了符号 3 接收到符号 2 的概率。

计算发送和接收的都是符号 k 的概率，$k=1$，2，3。并计算这个系统的传输误差概率。传输误差概率被定义为接收到的符号和发送的符号不一致的概率。

表 P7.2

发送的符号 j	接收到的符号 k 1	2	3
1	0.05	0.13	0.12
2	0.10	0.08	0.07
3	0.09	0.21	0.15

7.3 (a) 随机变量 V 在区间 $[a,b]$ 服从均匀分布。计算它的期望 μ_V、二阶矩 $E[V^2]$ 和方差 σ_V^2。

(b) 随机变量 W 和 V 相互独立，但和 V 服从的分布相同。计算随机变量 $Y=V+W$ 的均值和方差。并计算 Y 和 V 的协方差，以及它们的相关系数。

7.4 随机变量 X 和 Y 满足：

$$E[X]=-1,\quad E[Y]=2,\quad E[X^2]=9,$$
$$E[XY]=-4,\quad E[Y^2]=7$$

(a) 计算下列随机变量的协方差 σ_{ZW}，其中，

$$Z=2X-Y+5,\quad W=X+\frac{1}{2}Y-1$$

(b) 若 X 和 Y 服从二元高斯分布，那么 Z 和 W 的联合概率密度是什么？(利用服从二元高斯分布的随机变量的线性组合仍然是高斯分布的原则。)

7.5 已知 $X=2+V$ 和 $Y=2-V$，其中 V 是一个零均值、方差为 4 的高斯随机变量。求 X 和 Y 的相关矩。X 和 Y 是否正交？它们的协方差是多少？相关系数呢？它们是不相关的吗？

7.6 已知

$$X=Z+V$$
$$Y=\beta Z+W$$

其中，随机变量 Z、V 和 W 的均值分别为 μ_Z、μ_V 和 μ_W，方差分别为 σ_Z^2、σ_V^2 和 σ_W^2，它们是互不相关的(即协方差为 0)；β 是一个比例因子。

(a) 求 X 和 Y 的协方差 σ_{XY}，以及相关系数 $\rho_{XY}=\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$。

(b) 假设 $\sigma_V^2=\sigma_W^2=\sigma^2$。那么(a)中计算出的相关系数可以简写成什么形式？当 σ^2 和 β 取极限值时，检查这个简化的结果是否和你猜想的答案一致。

高级习题

7.7 x 和 y 是 0～1(均匀分布)的两个随机数，且相互独立，事件 A、B、C 和 D 如图 P7.7 所示，并有如下定义：

$$A=\left\{y>\frac{1}{2}\right\},\quad B=\left\{y<\frac{1}{2}\right\},$$

$$C=\left\{x<\frac{1}{2}\right\},$$

$$D=\left\{x<\frac{1}{2},y<\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x>\frac{1}{2},y>\frac{1}{2}\right\}$$

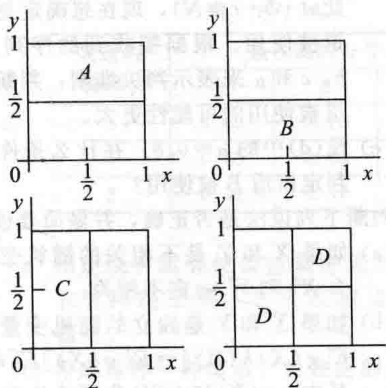


图　P7.7

(a) 根据这里对事件的定义和其他通过单位方形的几何区域对事件的类似定义，证明以下结论：

(i) 两个独立事件在以一些其他事件为条件时，就不一定再保持独立。例如，定义事件E、F和G，则有

$$P(E\cap F)=P(E)P(F)$$

但

$$P(E\cap F|G)\neq P(E|G)P(F|G)$$

(ii) 两个带有条件的事件若相互独立，那么它们在取消限定的条件后却不一定相互独立。例如，定义事件J、K和L，则有

$$P(J\cap K|L)=P(J|L)P(K|L)$$

但

$$P(J\cap K)\neq P(J)P(K)$$

画出你所定义事件的区域图。

(b) 对一般事件Q、V和W，判断下面的说法是对还是错：

$$P(V\cap W|Q)=P(V|W\cap Q)P(W|Q)$$

解释你的理由，并举出与上面类似的事件例子(比如用单位方形区域适当地作图)来说明你的答案。

7.8　图 P7.8 描述的是一个信道的传输概率图，可能的输入符号为$\{a,b\}$，可能的输出符号为$\{A,B\}$。用这个信道传输二进制数m，其先验概率分布为$P(m=0)=0.6$，$P(m=1)=0.4$。当$m=0$，发送符号a；当$m=1$时，发送符号b。现在要设计一个译码器。译码器需要采取一种判决准则，当$\hat{m}=0$或1时，对应的符号为$\{A, B\}$。

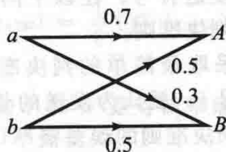


图　P7.8

(a) 根据编码规则，设计一个译码器，使得它具有最小的译码误差概率，即该译码器的判决准则可以使误差率$P_e=P(\hat{m}\neq m)$最小。

(b) 根据你在(a)中设计的译码器，计算它的误差概率。

7.9　某通信系统如图 P7.9 所示。信源发送的符号来自集合$\{-1, 1\}$，其分布律如下：

$$P(X=-1)=g,\quad P(X=1)=1-g$$

信道是一个加性噪声的信道，噪声N信源符号X统计意义上独立。接收的信号R为

$$R=X+N$$

其中，

$$N=\begin{cases}+1, & \text{取值概率 } p\\ 1, & \text{取值概率 } 1-p\end{cases}$$

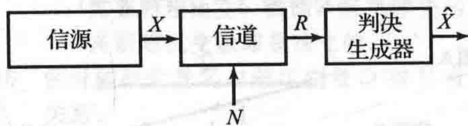


图　P7.9

(a) 列出R可能的取值。对每个可能的值r或R，计算$P(R=r)$。

(b) 根据观测值$R=r$、X的估计值$\hat{X}$选择的是X最大可能性的取值。对于$\frac{1}{2}<g<1$和$\frac{1}{2}<p<1$，对每一个可能出现的R确定$\hat{X}$的值。

(c) 对于(b)中的估计方法，其准确率定义为

$$P(\text{correct})=P(\hat{X}=-1,X=-1)+P(\hat{X}=1,X=1)$$

计算(b)中判决准则的$P(\text{correct})$。(b)中对X的估计方法的准确率是否为最大？是否还有其他估计方法能够提高估计的准确率呢？

7.10　在一个二进制光通信系统中，接收机在时间$(0,T)$内对光信号入射到光电管后喷射的光电子进行计数。当没有光信号入射到光电管时(事件H_0)，计数到k个光电子的概率

$$P(k|H_0)=A_0v_0^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

然而，当发送了一个光信号时(事件H_1)，有

$$P(k|H_1)=A_1v_1^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中，$0<v_0<v_1<1$。这两个事件的先验概率分别由$P(H_0)$和$P(H_1)$给出。

(a) 求出常数A_0和A_1的值。

对(b)和(c)，假设$P(H_0)=P(H_1)=\frac{1}{2}$。

(b) 假设接收机已准确计数到m个光电子，

确定发送光信号的条件(后验)概率。

(c) 设 k 为接收机接收到的光电子数，当 $k\geqslant n_0$ 时接收机认定确实已发送光信号；当 $0\leqslant k<n_0$ 时就认为没有发送光信号，其中 n_0 是某个正数。根据这样的判决准则，计算接收机带来的误差概率 P_e，用 n_0、v_0 和 v_0 表示。n_0 取何值时，误差率 P_e 会达到最小值？是否存在其他判决准则，使得 P_e 的值更小？

7.11 某通信系统等概率地发送信源符号 $X=1$ 和 $X=-1$。发送的符号经信道 A 或信道 B 传输。图 P7.11 分别给出了每个信道的特性；箭头旁的数字表示接收到箭头右边符号的概率，发送符号位于箭头的左边。信道 A 偶尔会将符号完全丢失，而信道 B 有时会在接收端将符号 $X=1$ 误判为 -1。

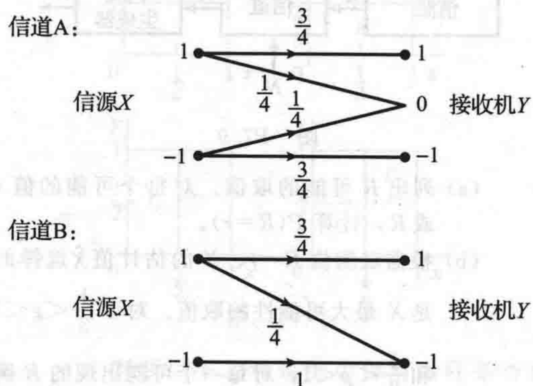


图 P7.11

(a) 若信源使用信道 A 发送数据，那么接收到 -1 的概率是多少？收到 0 和 1 的概率呢？当信源使用信道 B 时重复以上计算。

(b) 假设在接下来的几个问题中信源使用信道 A 的概率为 α，使用信道 B 的概率为 $1-\alpha$。如果接收到的符号是 -1，那么在收到 -1 的条件下信源使用信道 A 的概率是多少？

(c) 假设用下面的准则判定当收到 -1 时是哪个信道被使用：当 $Y=-1$ 时，判定信源使用了信道 A 的条件是

$$P(\text{使用信道 A}\,|\,Y=-1)$$
$$>P(\text{使用信道 B}\,|\,Y=-1)$$

当 $Y=-1$ 时，若判定信道 A 被使用，那么 α 的取值范围是什么？若无论 Y 的值是多少，都判定信道 A 被使用，那么 α 的取值范围又是什么？

(d) 若同一信道被连续使用 N 次，每次使用这个信道都不影响其他次使用。假设收到了 a 个 -1，b 个 0 和 c 个 1(因此 $a+b+c=N$)，现在想确定是哪个信道被使用。根据接收到的序列，用 a、b、c 和 α 来表示判决准则，判断哪个信道被使用的可能性更大。

(e) 设(d)中的 $\alpha=0.8$，在什么条件下可以判定信道 B 被使用？

7.12 判断下列说法是否正确，并做简要说明。

(a) 如果 X 和 Y 是不相关的随机变量，那么 X^2 和 Y^2 一定不相关。

(b) 如果 X 和 Y 是独立的随机变量，那么 $E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$，其中，$g(X)$ 和 $h(Y)$ 分别是关于 X 和 Y 的任意函数。

(c) 两个随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 可以分解为 X 的条件概率密度和 Y 的边缘概率密度的乘积形式：$f_{X,Y}(x,y)=f_{X|Y}(x\,|\,y)f_Y(y)$，那么 X 和 Y 一定是独立的。

7.13 若随机变量 X 和 Y 的方差分别为 σ_X^2 和 σ_Y^2，协方差为 σ_{XY}，那么 $\sigma_{XY}^2<\sigma_X^2\sigma_Y^2$，或等价于

$$-\sigma_X\sigma_Y\leqslant\sigma_{XY}\leqslant\sigma_X\sigma_Y \tag{7.82}$$

(a) 利用上面的不等式推出 $r_{XY}^2\leqslant r_X^2r_Y^2$，其中 $r_{XY}=E[XY]=\sigma_{XY}+\mu_X\mu_Y$(两个随机变量的相关矩)，$r_X^2=E[X^2]$($X$ 的二阶矩)，$r_Y^2=E[Y^2]$(Y 的二阶矩)。这也等价于推导：

$$-r_Xr_Y\leqslant r_{XY}\leqslant r_{XY} \tag{7.83}$$

(b) 利用 7.8 节中随机变量的空间向量图更直接地证明式(7.83)中的不等式。

(c) 在 X 和 Y 有相同的均值 μ 和方差 σ^2 的情况下，实际上式(7.83)中的 r_{XY} 可以得到一个更好的(即更高的)下界值。利用式(7.82)证明：

$$-r^2+2\mu^2\leqslant r_{XY}\leqslant r^2$$

其中，$r^2=\sigma^2+\mu^2=r_X^2=r_Y^2$。

扩展习题

7.14 一个通信系统传输 1、2、3 三种符号。表 P7.14列出了在发送符号 j 的条件下接收到符号 k 的所有可能符号对 (j,k) 的概率。例如，概率 0.21 对应的是发送了符号 2 接收到符号 3 的概率。接收机的判决准则将一个发送符号和每种可能接收到的符号相关联。这种关联指的是对于每种可能接收到的符号，接收机猜测、估计和判决相应的发送符号。在以下问题中将会考虑不同的判决准则。

(a) 若采取最简单的判决准则——当收到符号 k，就认为发送的是符号 k，那么该判决准则的误差概率(指判决错误的概率)是多少？

表 P7.14

发送的符号 j	接收到的符号 k		
	1	2	3
1	0.05	0.10	0.00
2	0.13	0.08	0.21
3	0.12	0.07	0.15

(b) 指定说明能够使误差概率最小化的接收机判决准则，并求出相应的误差概率。

(c) 考虑这样一种情形，当发送的是符号 j 而接收机判决为符号 ℓ 时，引入代价函数 $c(j,\ell)$。按照(a)中的判决方式，请给出期望的代价函数，也叫作风险表达式。同样也可以根据其他任何判决准则得到相应的风险表达式，那么就会自然产生这样的问题：什么样的判决准则可以使风险最小？接下来会在(d)中针对代价函数的特定取值来讨论该问题。

(d) 与(c)中的设定类似，若 $j=\ell$，则 $c(j,\ell)=0$；若 $j\neq\ell$，则 $c(j,\ell)=1$，请找出使风险值最小的判决准则。基于风险值最小化的代价函数选择(全部或全不)和使(b)中的误差概率最小化有着怎样的联系？它们对应的判决准则又是怎样相互关联的？

7.15 已知 $f^{+}(v,w)$ 为二元高斯密度函数：

$$f^{+}(v,w)=(2\pi)^{-1}(1-\rho^{2})^{-1/2}\times\exp\left[-\frac{v^{2}-2\rho vw+w^{2}}{2(1-\rho^{2})}\right]$$

其中，$0<\rho<1$。令 $f^{-}(v,w)$ 也有相同的表达式，但用相关系数 $-\rho$ 代替 $+\rho$。f^{+} 和 f^{-} 如图 P7.15 所示，分别显示了概率密度的等值线。

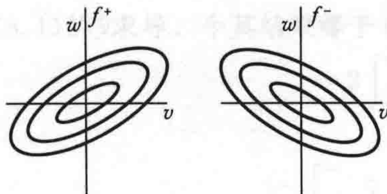


图 P7.15

现设随机变量 V 和 W 由其联合 PDF 定义：

$$f_{V,W}(v,w)=\frac{1}{2}(f^{+}(v,w)+f^{-}(v,w)) \tag{7.84}$$

这意味着 V 和 W 是等概率地从 f^{+} 和 f^{-} 选取的。

(a) 证明 V 服从高斯分布，W 服从高斯分布，但 V 和 W 不服从二元高斯分布。请用图形的方式而不是复杂的计算式来说明。因此，两个服从高斯分布的随机变量不一定服从二元高斯分布。也就是说，一个二元密度函数的边缘概率分布是高斯分布，但并不意味着这个密度函数是二元高斯密度函数。然而，两个独立的高斯随机变量，它们服从二元高斯分布。

(b) 证明 V 和 W 不是独立的。

(c) 不用积分或其他详细的计算推导，根据 V 和 W 的联合 PDF 的结构，证明 $E[VW]=0$。也就是说，尽管这两个随机变量不是独立的，但它们却是不相关的。因此，互不相关的高斯随机变量不需要相互独立。然而，互不相关的二元高斯随机变量却是独立的。

7.16 假设随机变量 Z 与随机变量 Q 和 V 有如下关系：

$$Z=cQ+V$$

其中，c 是已知常数，且

$$E(Q)=1,\quad E(V)=0,\quad 方差(Q)=\sigma_Q^2$$
$$方差(V)=\sigma_V^2,\quad 协方差(Q,V)=\sigma_{Q,V}$$

(a) 根据以上参数，计算 $E(Z)$、方差(Z)、协方差(Z,Q)和协方差(Z,V)。

(b) 现在考虑一种通过 Z 的测量值来估计 Q 的方法。先考虑一个关于 Z 的线性函数(线性加常数或“线性变换”)：

$$\hat{Q}=a+bZ$$

对于该表达式，找到能够使 $E[(Q-\hat{Q})^2]$ 最小的常数 a 和 b(用(a)中计算得到的结果和/或用该题目中已给的参数来表达)，并求出 $E[(Q-\hat{Q})^2]$ 的最小值。$\hat{Q}$ 称为 Q 关于 Z 的 LMMSE 估计。

7.17 某通信系统在某个时刻的输入为均值 μ_Q、方差为 σ_Q^2 的高斯随机变量 Q。若对应的信道输出为 $X=Q+W$，加性噪声 W 是零均值、方差为 σ_W^2 的高斯随机变量，并与 Q 独立。

(a) 根据给定的参数，计算 X 的均值 μ_X 和方差 σ_X^2。由该均值和方差是否足以写出 X 的 PDF？解释你的答案。如果答案为是，写出该 PDF。

(b) 计算协方差 σ_{XQ}，并计算相关系数 $\rho_{XQ}=\sigma_{XQ}/(\sigma_X\sigma_Q)$。以下情况中，$\rho_{XQ}$ 的值将如何变化？

(a) μ_Q 从 0 到∞变化？

(b) $\frac{\sigma_Q}{\sigma_W}$ 从 0 到∞变化？

(c) 确定 X 和 Q 的联合 PDF。先计算容易推

导的 $f_{X|Q}(x|q)$ 和 $f_Q(q)$，再将这两者恰当地结合起来得到联合 PDF。并证实最终的 PDF 是一个二元高斯密度函数。

(d) 计算条件概率密度 $f_{Q|X}(q|x)$，并证明它是高斯密度函数。这里包含了对这样一个推论的证明：二元高斯变量的条件概率密度也是高斯的。

297 ~ 305

(e) 利用(c)中的结论，计算在给定条件 $X=x$ 下信道输入 Q 的 MMSE 估计 $\hat{Q}_{\text{MMSE}}(x)$；找出能够使下面条件 MSE 最小的 $\hat{Q}_{\text{MMSE}}(x)$：

$$E\{(Q-\hat{Q}_{\text{MMSE}}(x))^2 \mid X=x\}$$

在下一章中将会看到该估计由 $E[Q|X=x]$ 给出。如果做对了这道题目，将会发现这个估计是对 x 函数的线性变换，也就是线性加常数。根据上面的表达式计算出相应的条件均方误差。

(f) 假设 Q 和 W 是不相关的但也不再独立。那么以上(a)～(d)中的答案，哪一个会改变？



第 8 章

估计算法[^1]

在本书以及许多涉及通信、控制和信号处理的研究领域中有一个反复出现的主题，就是根据系统中某些参量(quantity)的量测信息来估计或者预测该系统的另外一些参量。通常把这一过程称为推理(inference)。典型地，通过量测值推测所期望的信息会涉及组合模型，而这些模型常常包含与感兴趣的参量相关的量测信息的先验知识或者原理。

推测一个连续随机变量的值以及最终推测一个随机过程的值是这一章和接下来几章的重点。其中一个关键的步骤是引入一个误差准则，从概率意义上讲，即是参量期望值和参量估计值之间的误差。本章和随后相关章节主要关注如何选取估计方法使得误差的期望或者均方值达到最小，也就是最小均方误差(Minimum Mean Square Error，MMSE)准则。在 8.1 节和 8.2 节，对 MMSE 估计没有附加任何的约束条件。而在 8.3 节，将限定估计器(estimator)是量测值的一个线性变换，这种形式的估计称为线性最小均方误差(Linear Minimum Mean Square Error，LMMSE)估计。

在第 9 章，关注的重点将从对连续随机变量的推理问题转移到对离散随机参量的推理问题，这些参量可能是指定的数值形式，也可能是非数值的。特别是在后一种情况中，可能出现的各种结果通常称为假设，于是这种环境下的推理过程就称为假设检验，也就是，在给定量测值和观测值前提下应用假设的判决过程。在这种假设检验场景中，用 MMSE 准则推测出不正确假设的最小概率通常没有多大意义。

306

8.1 单个连续随机变量的估计

在开始讨论之前，先假设 Y 是一个随机变量，其值可以仅从它的概率密度函数估计得到。在已知另一个随机变量 X 的量测值或观测值的情况下，讨论将扩展到利用 X 与 Y 的联合概率密度函数对 Y 的值进行估计。

仅基于 Y 的概率密度函数得到 Y 的估计，记为$\hat{y}$，使得实际的试验结果和估计值$\hat{y}$之间的均方误差最小。特别地，$\hat{y}$的选择应当使下式的值最小：

$$E[(Y-\hat{y})^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\hat{y})^2 f_Y(y)\mathrm{d}y \tag{8.1}$$

对式(8.1)的$\hat{y}$求导，令其结果等于 0，可得到

$$-2\int_{-\infty}^{\infty}(y-\hat{y})^2 f_Y(y)\mathrm{d}y=0 \tag{8.2}$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{y}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y \tag{8.3}$$

根据

$$\hat{y}=E[Y] \tag{8.4}$$

对 $E[(Y-\hat{y})^2]$中的$\hat{y}$求二阶导数，可得

$$2\int_{-\infty}^{\infty}f_Y(y)\mathrm{d}y=2 \tag{8.5}$$

[^1]: 原文就是“估计”，但鉴于第 12 章为“信号估计”，因此这里翻译为“估计算法”，因为本章内容主要是介绍估计的基本方法和实现算法。——译者注

上式结果为正，说明式(8.4)确有定义$\hat{y}$的最小值。因此在这种情形下 MMSE 估计出的 Y 值就只是它的均值 $E[Y]$。

实际的 MMSE 估计误差可以在式(8.1)中令$\hat{y}=E[Y]$计算得出。此时，MMSE 也就是 Y 的方差，记为 σ_Y^2，即

307

$$\min E[(Y-\hat{y})^2]=E[(Y-E[Y])^2]=\sigma_Y^2 \tag{8.6}$$

以类似的方式可以得到 Y 的中值，即在 Y 的概率分布中有一半低于它而另一半高于它，它是最小化均值绝对偏差 $E[\,|Y-\hat{y}|\,]$的$\hat{y}$值。而且，Y 的模式，即概率密度函数 $f_Y(y)$ 最大时对应的 y 值，可以用来最小化一个全有或全无成本函数的期望值，即当误差在极其微小的容许范围带外时成本函数为1，而误差在其带内时成本函数为零。这里不再深入讨论这些可选的误差度量方式，不过务必注意的是，虽然均方误差很方便，但也只是众多误差度量方式的一种。

从引导出式(8.4)和式(8.6)的过程可以直接预见，随机变量 X 的量测或观测值 x 的附加信息在某种程度上与随机变量 Y 相关。与先前讨论的唯一区别就是，在给定的附加量测信息中，要用到条件或者后验概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，而不是非条件概率密度 $f_Y(y)$，因此现在的目标是最小化下式：

$$E[\{Y-\hat{y}(x)\}^2\,|\,X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}\{y-\hat{y}(x)\}^2 f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y \tag{8.7}$$

通常引入符号$\hat{y}(x)$就是为了说明对随机变量 Y 的估计依赖于特定值 x。这与无 X 量测信息的情况有完全相同的计算方法：

$$\hat{y}(x)=E[Y\,|\,X=x] \tag{8.8}$$

上式为给定 $X=x$ 的条件下 Y 的条件期望。相应的 MMSE 是条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$的方差 $\sigma_{Y|x}^2$，换句话说，MMSE 是条件方差。因此，与无 X 量测信息的情况相比，唯一的不同就是，这里的期望值依赖于获得的量测信息。

进一步来说，如果存在多个量测信息，如 $X_1=x_1$，$X_2=x_2$，…，$X_L=x_L$，那么可以使用后验概率密度 $f_{Y|X_1,X_2,\cdots,X_L}(y|x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_L)$。除了这个改变，求解方案没有变化。因此，不需进一步的计算就可以得出，在给定 $X_1=x_1$，$X_2=x_2$，…，$X_L=x_L$ 的条件下，Y 的 MMSE 估计就是 Y 的条件期望，即

$$\hat{y}(x_1,\cdots,x_L)=E[Y\,|\,X_1=x_1,\cdots,X_L=x_L] \tag{8.9}$$

方便起见，量测的随机变量可以组合成一个列向量 $\boldsymbol{X}$，相应的量测值组合成列向量 $\boldsymbol{x}$。基于量测值的 MMSE 估计现在可以用符号$\hat{y}(\boldsymbol{x})$来表征：

$$\hat{y}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|\boldsymbol{X}}(y|\boldsymbol{x})\mathrm{d}y=E[Y\,|\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}] \tag{8.10}$$

308

给定 $\boldsymbol{X}$ 值的最小均方误差仍然是条件方差，也就是条件概率密度 $f_{Y|\boldsymbol{X}}(y|\boldsymbol{x})$的方差 $\sigma_{Y|\boldsymbol{x}}^2$。

例 8.1 离散随机变量的 MMSE 估计

有一个离散时间离散幅值序列 $s[n]$存储在噪声介质中。$r[n]$是检索到的序列。$s[n]$和 $r[n]$在任意时刻 n_0 的值为随机变量，分别用 S 和 R 表示。已知联合概率质量函数如图 8.1 所示，其中小方块代表结果(−1，−1)、(0，0)和(1，1)，每个发生的概率为 0.2；小圆圈代表结果(0，1)、(0，−1)、(1，0)，每个发生的概率为 0.1。

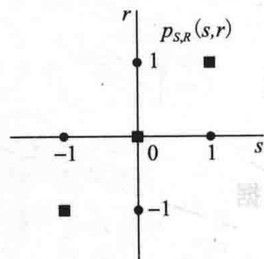


图 8.1 S 和 R 的联合 PMF。与结果相关的概率中，每个方块表示 0.2，每个圆圈表示 0.1

基于接收到的值 $R=1$，可以得到 S 的 MMSE 估计$\hat{s}$。从式(8.9)可以推导出$\hat{s}=E(S|R=1)$，这可以由条件 PMF $p_{S|R}(s|1)$确定；相应地，条件 PMF 又可以表示为

$$p_{S|R}(s|1)=\frac{p_{S|R}(s,1)}{p_R(1)} \tag{8.11}$$

根据图 8.1 可知

$$p_R(1)=0.3 \tag{8.12}$$

和

$$p_{S,R}(s|1)=\begin{cases}0, & s=-1\\ 0.1, & s=0\\ 0.2, & s=+1\end{cases} \tag{8.13}$$

因此，在式(8.11)中应用式(8.12)和式(8.13)可以得到

$$p_{S|R}(s|1)=\begin{cases}1/3, & s=0\\ 2/3, & s=+1\end{cases} \tag{8.14}$$

利用式(8.14)，S 的条件预测值(即 MMSE 估计)$\hat{s}$是

$$\hat{s}=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3} \tag{8.15}$$

需要注意的是，尽管这里的估计最小化了均方误差，但是却没有受限于 S 只能取离散值＋1、0、－1 的事实。这个例子会在第 9 章从假设检验的角度进一步考虑，也就是，确定三个已知的可能取值中的哪一个，来最小化一个更适合的误差准则。◀

309

例 8.1 考虑了一个已经被潜在改变、存储或者不正确量测的离散随机变量的 MMSE 估计。在例 8.2 中，将考虑从含噪量测中估计一个连续的随机变量。

例 8.2 加性噪声干扰信号中的 MMSE 估计

考虑一个机场雷达天线角位置的含噪量测 X。在没有噪声存在时，真实位置用随机变量 Y 表示，附加噪声用另一个随机变量 W 表示。可以得到

$$X=Y+W \tag{8.16}$$

假定量测的噪声 W 独立于真实的角位置，也就是说，Y 和 W 是相互独立的随机变量。Y 在区间[－1, 1]上服从均匀分布，W 在区间[－2, 2]上服从均匀分布。X 的具体量测值为 $X=1$。现在基于这样的量测来进行天线位置 Y 的 MMSE 估计$\hat{y}$。根据式(8.9)有

$$\hat{y}=E(Y|X=1) \tag{8.17}$$

可以通过首先得到 $f_{Y|X}(y|1)$计算出式(8.17)。

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f_{X|Y}(1|y)f_Y(y)}{f_X(1)} \tag{8.18}$$

接下来分别计算式(8.18)右边的分子和分母。PDF$f_{X|Y}(x|y)$在形状上与 W 的 PDF 相同，只是均值变为 y，如图 8.2 所示。相应地，可以得到图 8.3 所示的 $f_{X|Y}(1|y)$和图 8.4 所示的 $f_{X|Y}(1|y)f_Y(y)$。

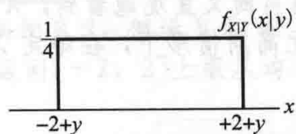


图 8.2 给定 Y 条件下 X 的条件 PDF，$f_{X|Y}(x|y)$

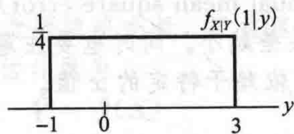


图 8.3 $f_{X|Y}(1|y)$的图

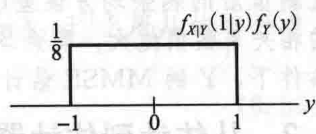


图 8.4 $f_{X|Y}(1|y)f_Y(y)$的图

310

为了获得 $f_{Y|X}(y|1)$，用图 8.4 示出的函数除以 $f_X(1)$，而 $f_X(1)$可以在参数为 1 时通过计算 Y 和 W 的 PDF 的卷积得到。更简单地说，既然 $f_{Y|X}(y|1)$的总面积必然为 1，而且与图 8.4 中的图形状相同，只是存在系数因子 $f_X(1)$，因此将图 8.4 乘以 4 很容易得到面积 1。这样$\hat{y}$的结果恰为 PDF $f_{Y|X}(y|1)$的均值，即

$$\hat{y}=0 \tag{8.19}$$

相应地，MMSE 是这个 PDF 的方差，即$\frac{1}{3}$。◀

下一个例子将考虑的随机变量的 MMSE 估计，是基于另一个随机变量的量测值，且

这两个随机变量是通过二元高斯概率密度相关联的。

例 8.3 二元高斯随机变量的 MMSE 估计

考虑二元高斯联合 PDF 关联的两个随机变量 X 和 Y，如例 7.5 中的式(7.68)所定义的。为方便起见，可以采用中心化和归一化的二元随机变量：

$$V=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},\quad W=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} \tag{8.20}$$

相应的 PDF 是

$$f_{V,W}(v,w)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\frac{(v^2-2\rho vw+w^2)}{2(1-\rho^2)} \tag{8.21}$$

变量 ρ 为 X 和 Y 的相关系数，其定义为

$$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y},\quad \sigma_{XY}=E[XY]-\mu_X\mu_Y \tag{8.22}$$

这里 σ_{XY} 是 X 与 Y 的协方差。

现在考虑给定 $X=x$ 的条件下 Y 的 MMSE 估计 $\hat{y}(x)$，这里 X 和 Y 是二元高斯随机变量。根据式(8.9)有

$$\hat{y}(x)=E[Y|X=x] \tag{8.23}$$

基于 V 和 W，可以得到

311

$$\hat{y}(x)=E\left[(\sigma_Y W+\mu_Y)\,|\,V=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]=\sigma_Y E\left[W\,|\,V=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]+\mu_Y \tag{8.24}$$

很容易直接证明 $f_{W|V}(w|v)$ 也是高斯的，其均值为 ρv，方差为 $1-\rho^2$，即满足

$$E\left[W\,|\,V=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]=\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \tag{8.25}$$

结合式(8.24)和式(8.25)有

$$\hat{y}(x)=E[Y|X=x]=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) \tag{8.26}$$

可以看到，二元高斯变量的 MMSE 估计具有很好的线性(或者，更确切地说，仿射性，也就是线性加上一个常数)形式。

MMSE 是条件 PDF $f_{Y|X}(y|x)$ 的方差，即

$$E[(Y-\hat{y}(x))^2|X=x]=\sigma_Y^2(1-\rho^2) \tag{8.27}$$

值得注意的是，σ_Y^2 是没有任何附加条件信息时 Y 的均方误差。式(8.27)表明了获得 X 的量测值后的剩余均方误差(residual mean square error)。可以明显而又直观地看到，X 与 Y 的相关系数值越大，剩余均方误差越小。同时也要注意到在二元高斯情形下，在给定 $X=x$ 条件下，Y 的 MMSE 估计并不依赖于特定的 x 值。◀

8.2 从估计到估计器

式(8.8)中 Y 的 MMSE 估计是在已知随机变量 X 的特定值 x 的基础上进行的，然而 X 是一个随机变量，特定的值 x 却不是，因此 $\hat{y}(x)$ 也不是一个随机变量。

区分开随机变量的估计和对任意值 x 形成估计的过程是很重要的。这和区分开函数在某一点的值和函数本身是完全类似的。形成估计的过程或函数称为估计器(estimator)。

如例 8.1 中，在给定 $R=1$ 时确定了 S 的 MMSE 估计。通常，对于 R 的每一个可能的值，即对于 -1、0 和 1，都可以进行 S 的 MMSE 估计。将这些结果列表，就可以针对接收到的特定 R 值查询对应的 MMSE 估计。这样的表，或者更一般地说，R 的一个函数将对应所谓的 MMSE 估计器。这里的表或者估计器的输入应该是特定的检索值，而输出应该是与检索值对应的估计。

312

符号 $\hat{y}(x)$ 已经在前面的分析中引入来表示 $X=x$ 条件下 Y 的估计。函数 $\hat{y}(\cdot)$ 则表示

对应的估计器，记为$\hat{y}(X)$，或者仅用$\hat{Y}$来更简洁地表示，前提是需要明白估计器对什么随机变量起作用。请注意估计器$\hat{Y}=\hat{y}(X)$是一个随机变量。之前看到过的 MMSE 估计$\hat{y}(x)$是由条件均值$E[Y|X=x]$给出的，这也有了 MMSE 估计器的另一种自然的表示方法，即

$$\hat{Y} = y(X) = E[Y|X] \tag{8.28}$$

注意 $E[Y|X]$表示一个随机变量，而不是一个单独的数值。

前面的讨论所适用的情形基本上没什么变化，都是观测到了多个随机变量并将其组合到向量 $\boldsymbol{X}$ 中。这种情形下的 MMSE 估计器被记为

$$\hat{Y} = \hat{y}(\boldsymbol{X}) = E[Y|\boldsymbol{X}] \tag{8.29}$$

也许毫不意外，给定 $\boldsymbol{X}$ 条件下 Y 的 MMSE 估计器最小化了所有 Y 和 $\boldsymbol{X}$ 的平均的均方误差。这是因为 MMSE 估计器最小化了 $\boldsymbol{X}$ 的每一个特定 $\boldsymbol{x}$ 值的均方误差，更正式地有

$$E_{Y,\boldsymbol{X}}([Y-\hat{y}(\boldsymbol{X})]^2) = E_{\boldsymbol{X}}(E_{Y|\boldsymbol{X}}([Y-\hat{y}(\boldsymbol{X})]^2 \mid \boldsymbol{X}))$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (E_{Y|\boldsymbol{X}}([Y-\hat{y}(\boldsymbol{x})]^2 \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{8.30}$$

期望算子的下标清楚地表明涉及计算相关联的期望对应的概率密度。当 $\boldsymbol{X}$ 不是一个标量时，概率密度和积分运算都是多变量的。因为估计$\hat{y}(\boldsymbol{x})$最小化了 $\boldsymbol{X}$ 的每一个值 $\boldsymbol{x}$ 的内部期望 $E_{Y|\boldsymbol{X}}$，既然 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$是非负的，所以它也最小化了外部期望 $E_{\boldsymbol{X}}$。

例 8.4 二元高斯随机变量的 MMSE 估计器

例 8.3 在给定一对二元高斯随机变量中的一个随机变量量测值的情况下，构建了另一个随机变量的 MMSE 估计。在本例中采用相同的符号，只需将式(8.26)中的 x 用 X 替代，显然就可以获得 MMSE 估计器：

$$\hat{Y} = \hat{y}(X) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_x}(X-\mu_X) \tag{8.31}$$

在给定 $X=x$ 条件下的条件 MMSE 在先前的例子中已经求出为 $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$，且不依赖于 x 的值，因此，基于所有 X 的平均的 MMSE 估计器仍然为 $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$。◀ [313]

在例 8.2 中，考虑了从一个天线位置的含噪量测 X 中对天线角位置 Y 的 MMSE 估计，也就是

$$X = Y + W \tag{8.32}$$

其中，W 是随机噪声。在那个例子中，MMSE 估计$\hat{y}$是根据 X 的一个特定量测值确定的。在接下来的例子中，不再假定 X 的特定量测值，而是确定 MMSE 估计器。

例 8.5 加性噪声中信号的 MMSE 估计器

同例 8.2，假设 Y 和 W 是相互独立的随机变量，Y 在区间$[-1, 1]$上服从均匀分布，W 在区间$[-2, 2]$上服从均匀分布。估计器为

$$\hat{Y} = \hat{y}(X) \tag{8.33}$$

$\hat{Y}$本身是一个随机变量，当 X 取特定值 x 时，$\hat{Y}$取相应的特定值$\hat{y}(x)$。为了推导出估计器，假定 $X=x$，之后就如同例 8.2 一样确定 MMSE 估计$\hat{y}(x)$。当 x 在所有可能取值的范围变动时，$\hat{y}(x)$的值将发生相应改变。在下面的讨论中，除了确定 MMSE 估计器$\hat{Y}=\hat{y}(X)$，也将确定随机变量 X 可以取的所有可能 x 值的平均的总体均方误差。

既然$\hat{y}(x)$是给定 $X=x$ 条件下 Y 的条件期望，从而必须确定 $f_{Y|X}(y|x)$。为此，首先确定 Y 和 W 的联合概率密度，并从中得到需要的条件概率密度。

根据 Y 和 W 的相互独立性，有

$$f_{Y,W}(y,w) = f_Y(y)f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -2 \leqslant w \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{8.34}$$

可以看到 $f_{Y|X}(y, x)$在图 8.5 所示的矩形内均匀分布，而在矩形外取值为 0。

在给定条件 $Y=y$ 下，X 同 $y+W$ 一样，均匀分布在区间 $[y-2,\ y+2]$ 上，从而有

314

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)=\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8} \tag{8.35}$$

上式的取值区间对应于 $-1\leqslant y\leqslant 1$，$y-2\leqslant x\leqslant y+2$，而区间外为 0，因此，联合 PDF 在如图 8.6 所示的平行四边形中均匀分布，在平行四边形外为 0.

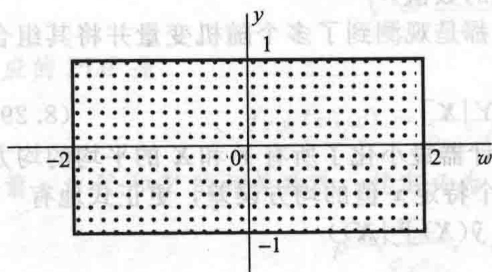


图 8.5　例 8.5 中 Y 和 W 的联合 PDF

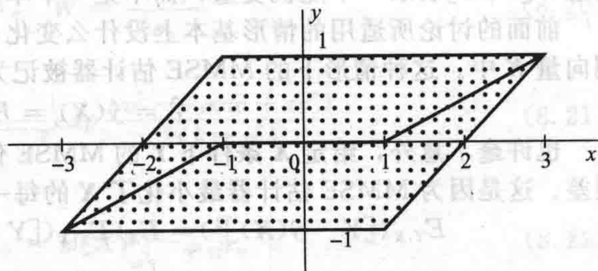


图 8.6　X 和 Y 的联合 PDF 与例 8.5 中基于 X 推导出 Y 的 MMSE 估计器

在给定 $X=x$ 时，条件 PDF $f_{Y|X}(y|x)$ 均匀分布在平行四边形对应的垂直区域，即

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3+x}, & -3\leqslant x<-1,-1\leqslant y\leqslant x+2\\ \dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1,-1\leqslant y\leqslant 1\\ \dfrac{1}{3-x}, & 1\leqslant x\leqslant 3,x-2\leqslant y\leqslant 1\end{cases} \tag{8.36}$$

图 8.7 显示了不同特定 x 值对应的 $f_{Y|X}(y|x)$。

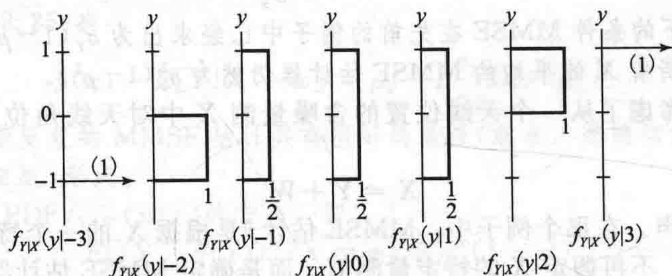


图 8.7　例 8.5 中不同 X 取值对应的条件 PDF $f_{Y|X}(y|x)$

MMSE 估计 $\hat{y}(x)$ 是给定 $X=x$ 时的条件均值，它是平行四边形对应垂直区域的中点。

315

条件均值如图 8.6 中平行四边形上的粗实线所示，其解析形式为

$$\hat{y}(x)=E[Y|X=x]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x, & -3\leqslant x<-1\\ 0, & -1\leqslant x<1\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases} \tag{8.37}$$

注意当 $x=1$ 时，$\hat{y}(x)=0$，这和例 8.2 相一致。

与这个估计相应的条件 MMSE 是式(8.36)中均匀分布的方差，确切地说，

$$E[\{Y-\hat{y}(x)\}^2|X=x]=\begin{cases}\dfrac{(3+x)^2}{12}, & -3\leqslant x<-1\\ \dfrac{1}{3}, & -1\leqslant x<1\\ \dfrac{(3-x)^2}{12}, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases} \tag{8.38}$$

当 $X=1$ 时，再一次与例8.2相一致。

式(8.38)说明了对于量测 X 的任何指定的 x 值的均方误差。既然量测值是一个随机变量，那么获得量测变量 X 所有可能取值的平均的均方误差也是很有必要的。为了确定它，首先需要确定 X 的边缘PDF。这可以通过 f_Y 和 f_W 相卷积求得，因为 X 是两个独立随机变量 Y 和 W 的和。也可以利用贝叶斯准则求得，其结果是

$$f_X(x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_{Y|X}(y|x)}=\begin{cases}\dfrac{3+x}{8}, & -3\leqslant x<-1\\ \dfrac{1}{4}, & -1\leqslant x<1\\ \dfrac{3-x}{8}, & 1\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{8.39}$$

均方误差可以通过对所有 x 值的一个加权平均表达式求得

$$\begin{aligned}E_X\{E_{Y|X}[(Y-\hat{y}(x)^2\,|\,X=x]\}&=\int_{-\infty}^{\infty}E[(Y-y(x)^2\,|\,X=x]f_X(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{(3+x)^2}{12}\right)\left(\frac{3+x}{8}\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{1}^{3}\left(\frac{(3-x)^2}{12}\right)\left(\frac{3-x}{8}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\end{aligned} \tag{8.40}$$

316

有意思的是，将这个结果与 Y 通过它的均值0估计出的均方误差对比。那么这个均方误差将会是方差 σ_Y^2，即

$$\sigma_Y^2=\frac{[1-(-1)]^2}{12}=\frac{1}{3} \tag{8.41}$$

因此利用 X 的先验知识以及 Y 与 X 的概率关系，确实可以减小均方误差。◀

正交性

MMSE估计器的一个重要性质就是残差(residual error)$Y-\hat{y}(\boldsymbol{X})$正交于量测随机变量的任何函数 $h(\boldsymbol{X})$，即

$$E_{Y,\boldsymbol{X}}[\{Y-\hat{y}(\boldsymbol{X})\}h(\boldsymbol{X})]=0 \tag{8.42}$$

其中，$\boldsymbol{X}$ 是量测随机变量的向量，可以利用 Y 和 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度计算得到期望。这可以首先通过扩展式(8.42)左边得到

$$E_{Y,\boldsymbol{X}}[\{Y-\hat{y}(\boldsymbol{X})\}h(\boldsymbol{X})]=E_{Y,\boldsymbol{X}}[Yh(\boldsymbol{X})]-E_{Y,\boldsymbol{X}}[\hat{y}(\boldsymbol{X})h(\boldsymbol{X})] \tag{8.43}$$

接着，将以下等式应用到项 $E_{Y,\boldsymbol{X}}[\hat{y}(\boldsymbol{X})h(\boldsymbol{X})]$中，

$$E_{Y,\boldsymbol{X}}[\hat{y}(\boldsymbol{X})h(\boldsymbol{X})]=E_{\boldsymbol{X}}[E_{Y|\boldsymbol{X}}[Y|\boldsymbol{X}]h(\boldsymbol{X})] \tag{8.44}$$

$$=E_{\boldsymbol{X}}[E_{Y|\boldsymbol{X}}[Yh(\boldsymbol{X})\,|\,\boldsymbol{X}]] \tag{8.45}$$

$$=E_{Y,\boldsymbol{X}}[Yh(\boldsymbol{X})] \tag{8.46}$$

将式(8.46)代入到式(8.43)即可得到式(8.42)。

式(8.46)表明MMSE估计器有相同于 Y 与任何 X 函数之间关系的相关性。特别地，选择 $h(\boldsymbol{X})=1$，有

$$E_{\boldsymbol{X}}[\hat{y}(\boldsymbol{X})]=E_Y[Y] \tag{8.47}$$

当估计器$\hat{y}(\boldsymbol{X})$的期望值等于随机变量 Y 的期望值时，估计器被认为是无偏的(unbiased)。式(8.47)表明MMSE估计器确实是无偏的。这个性质可以用来说明MMSE估计器的估计误差和用来构建估计器的随机变量的任何函数都无关。

317

8.3 线性最小均方误差估计

8.3.1 从一个随机变量的单次量测中线性估计另一个随机变量

通常，前面几节讨论的MMSE估计器所要求的条件期望 $E(Y\,|\,\boldsymbol{X})$是很难确定的，这

是因为条件概率密度 $f_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x})$不容易被确定。一种有用且广泛使用的折中方法是限定估计器是量测随机变量的一个固定的线性(或者更具体地说，仿射，即线性加一个常数)函数，同时选择的线性关系使得 Y 和 $\mathbf{X}$ 可联合取值的平均的均方误差最小。这样的估计器称为线性最小均方误差(Linear Minimum Mean Square Error，LMMSE)估计器。首先考虑最简单的情况。

假定随机变量 Y 的估计器构建于另一个随机变量 X，限定估计器的形式为

$$\hat{Y}_\ell = \hat{y}_\ell(X) = aX + b \tag{8.48}$$

这里需要确定 a 和 b 来最小化均方误差，也就是

$$E_{Y,X}[(Y-\hat{Y}_\ell)^2] = E_{Y,X}[\{Y-(aX+b)\}^2] \tag{8.49}$$

值得注意的是，期望值由 Y 和 X 的联合概率密度决定，也就是说，使得 Y 和 X 所有可能组合的平均的线性估计器最优。式(8.49)中的下标符号标明了参与期望计算的联合概率密度对应的变量。最终这些下标将会取消。

一旦通过这种方式选定了参数 a 和 b 的最佳值，在给定特定值 x 的条件下，Y 的估计就是$\hat{y}_\ell(x)=ax+b$，其可以通过已经确定的 a 和 b 的值计算得到。从而，在 LMMSE 的情形下，一个最佳线性估计器形成，然而对于任何特定的 x，这个估计器产生的估计并不具备任何个体最优的性能。这和之前章节中考虑的 MMSE 情形形成了对比，在那里每个 x 获得一个最佳的 MMSE 估计，即 $E[Y|X=x]$，最小化了 $X=x$ 条件下的均方误差。两者的区别可以总结如下：在没有约束条件的 MMSE 情形下，最佳估计器是结合所有单个最优估计而获得的；然而在 LMMSE 的情形下(一般非最优)，单个估计仅是通过计算最佳线性估计器得到的。

对式(8.49)分别关于参数 a 和 b 求导，然后令每个导数等于 0，使得表达式的值最小(可以考虑用二阶导数证明基于这种方式找到的值是最小的，证明过程略)。首先对式(8.49)关于 b 求导，将导数代入计算期望的积分运算中，然后将结果置零，其结果为

318

$$E_{Y,X}[Y-(aX+b)] = 0 \tag{8.50}$$

等价于，

$$E[Y] = E[aX+b] = E[\hat{Y}_\ell] \tag{8.51}$$

可以推导出

$$b = \mu_Y - a\mu_X \tag{8.52}$$

其中，$\mu_Y=E[Y]=E_{Y,X}[Y]$，$\mu_X=E[X]=E_{Y,X}[X]$。由式(8.52)得到的最佳值 b 实际上是用来保证线性估计器是无偏的，也就是说，估计器的期望值等于被估随机变量的期望值，如式(8.51)所示。

用式(8.52)替代式(8.48)中的 b，可以得到

$$\hat{Y}_\ell = \mu_Y + a(X-\mu_X) \tag{8.53}$$

换句话说，相对于被估随机变量 Y 的期望值 μ_Y，最佳线性估计器添加了一个量测随机变量 X 与其期望值 μ_X 的差值 $X-\mu_X$ 的适当倍数。为了找到这个倍数的最佳值 a，首先重写式(8.49)中的误差准则：

$$E[\{(Y-\mu_Y)-(\hat{Y}_\ell-\mu_Y)\}^2] = E[(\widetilde{Y}-a\widetilde{X})^2] \tag{8.54}$$

其中，

$$\widetilde{Y} = Y-\mu_Y \quad 和 \quad \widetilde{X} = X-\mu_X \tag{8.55}$$

这里采用式(8.53)推导出式(8.54)中的二阶等式。将式(8.54)中包含的误差准则表达式对 a 求导，并将结果置 0，可以得到：

$$E[(\widetilde{Y}-a\widetilde{X})\widetilde{X}] = 0 \tag{8.56}$$

重新整理式(8.56)，又已知 $E[\widetilde{Y}\widetilde{X}]=\sigma_{YX}$，即 Y 和 X 的协方差，且有$E[\widetilde{X}^2]=\sigma_X^2$，可以推导出

$$a = \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_X^2} = \rho_{YX}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \tag{8.57}$$

其中，ρ_{YX} 表示 Y 和 X 的相关系数，当清楚地知道涉及的变量时，可简写为 ρ。

一种比较容易理解的方式是用第 7 章随机变量的向量空间形式解释式(8.57)。式(8.54)中关于误差准则的表达式可在图 8.8 中形象地表示出。选择沿着坐标$\widetilde{X}$的向量 $a\widetilde{X}$，可使误差向量$\widetilde{Y}-a\widetilde{X}$的长度平方最小。相关向量如图 8.8 所示。根据熟悉的几何常识可知，$a\widetilde{X}$的最佳选择必然是$\widetilde{Y}$在$\widetilde{X}$上的正交投影，且此投影是

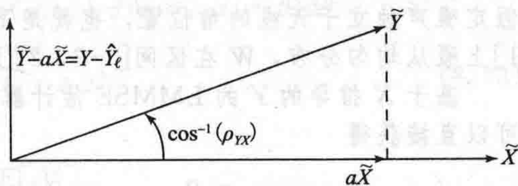


图 8.8 在向量空间中解释式(8.57)中的表达式 a

319

$$a\widetilde{X} = \frac{\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle}{\langle \widetilde{X}, \widetilde{X}\rangle}\widetilde{X} \tag{8.58}$$

同第 7 章一样，这里$\langle U, V\rangle$表示向量 U 和 V 的内积，且在“向量”是随机变量的情形下表示为 $E[UV]$。其中 a 如式(8.57)所示。回忆第 7 章中相关系数 ρ 表示的是向量$\widetilde{Y}$和$\widetilde{X}$夹角的余弦，并且这些向量的长度分别为 σ_Y 和 σ_X。

前面的投影运算表明误差$\widetilde{Y}-a\widetilde{X}$(也可以写作$\widetilde{Y}-\hat{Y}_\ell$)必正交于$\widetilde{X}=X-\mu_X$。这恰好是式(8.56)所表达的。另外，运用$\hat{Y}_\ell$的无偏性证明了$\widetilde{Y}-\hat{Y}_\ell$必正交于 μ_X(或任何其他常数)，这样$(\widetilde{Y}-\hat{Y}_\ell)$也因此正交于 X 本身。

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)X] = 0 \tag{8.59}$$

换句话说，最佳 LMMSE 估计器是无偏的，从而估计误差正交于估计器基于的随机变量。值得注意的是，在前一节 MMSE 估计器的讨论中关于误差正交于量测随机变量任何函数 $h(X)$的表述相当强，而不仅仅是正交于随机变量本身。

之前的讨论显示出估计器的无偏性，以及误差与量测随机变量的正交性。这些性质完全表征了 LMMSE 估计器。因此，利用这些性质可以推导出 LMMSE 估计器。

进一步进行几何推理，将勾股定理应用于图 8.8 中的三角形可以得出结论，即利用 LMMSE 估计器得到的最小 MMSE 是

$$\text{MMSE} = E[(\widetilde{Y}-a\widetilde{X})^2] = E[\widetilde{Y}^2](1-\rho^2) = \sigma_Y^2(1-\rho^2) \tag{8.60}$$

320

当然这个结果不依赖于几何解释，仅从解析推导也可以得到。这个结果表明了当 X 的观测值用于 LMMSE 估计器时，基于 X 估计的均方误差σ_Y^2 可减小到 $1/(1-\rho^2)$。更进一步，如果 X 和 Y 关系更密切，即 ρ 为$+1$ 或-1(分别对应于强正相关或负相关)，那么利用 LMMSE 估计器从 X 中提取所携带的 Y 的信息，就可以更多地减小 Y 的不确定性。

结合式(8.60)给定的最小均方误差表达式，现在可以将 LMMSE 估计器总结如下：

$$\hat{Y}_\ell = \hat{y}_\ell(X) = \mu_Y + \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_X^2}(X-\mu_X) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X) \tag{8.61}$$

或者等价地，也许更建议使用的形式为

$$\frac{\hat{Y}_\ell - \mu_Y}{\sigma_Y} = \rho\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \tag{8.62}$$

式(8.62)说明，估计器基于均值的归一化偏差(normalized deviation)是观测变量基于均值的归一化偏差的 ρ 倍。Y 和 X 的相关性越强，两个归一化偏差就越匹配。

注意到以上 LMMSE 估计器的表达式及其均方误差与例 8.4 中二元高斯情形下 MMSE 估计器获得的结果相同。原因是例 8.4 中的 MMSE 估计器的结果是线性的(确切一点儿，是仿射的)，如同在例子中提到的那样。

例 8.6 加性噪声中信号的 LMMSE 估计器

例 8.5 确定了 MMSE 估计器，现在本例关注 LMMSE 估计器的设计。回忆前面的例子，随机变量 X 表示天线角位置 Y 的含噪量测值，有 $X=Y+W$，这里 W 表示加性噪声。假定噪声独立于天线的角位置，也就是 Y 和 W 是相互独立的随机变量，且 Y 在区间[-1, 1]上服从均匀分布，W 在区间[-2, 2]上服从均匀分布。

基于 X 推导的 Y 的 LMMSE 估计器需要这些随机变量各自的均值、方差以及协方差。可以直接获得

$$\mu_Y=0,\quad \mu_W=0,\quad \mu_X=0,\quad \sigma_Y^2=\frac{1}{3},\quad \sigma_W^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma_X^2=\sigma_Y^2+\sigma_W^2=\frac{5}{3},\quad \sigma_{YX}=\sigma_Y^2=\frac{1}{3},\quad \rho_{YX}=\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{8.63}$$

相应的 LMMSE 估计器为

321

$$\hat{Y}_\ell=\frac{1}{5}X \tag{8.64}$$

相关的 MMSE 为

$$\sigma_Y^2(1-\rho^2)=\frac{4}{15} \tag{8.65}$$

这里的 MMSE 结果可以与例 8.5 中的结果相比较，在例 8.5 中获得的(较小的)均方误差为$\frac{1}{4}$，而如果 $\mu_Y=0$ 是 Y 的估计器，那么获得的(较大的)均方误差为$\frac{1}{3}$。◀

接下来的例子将考虑一个参数化的时间函数，其中参数是随机变量。LMMSE 估计器根据某个时刻已观测到的值去估计另一个时刻的值。

例 8.7 正弦随机过程单次量测的 LMMSE 估计器

考虑一个正弦信号

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta) \tag{8.66}$$

这里假设 ω_0 已知，A 和 Θ 是统计上独立的随机变量，且 Θ 的 PDF 在区间[0, 2π]上服从均匀分布。因此，$X(t)$是一个随机信号，或者等价于所有基础概率试验中 A 和 Θ 各种可能性结果产生的信号的集合或“全体(ensemble)”。这样的信号在第 10 章有更详细的讨论，将被称为随机过程。在某个特定时刻 $t=t_0$，$X(t)$的取值是一个随机变量，其值将依赖于基础概率试验中 A 和 Θ 的取值结果。

假定 $X(t_1)$的 LMMSE 估计器以 $X(t_0)$的一个量测值为基础，这里 t_0 和 t_1 均是指定的采样时刻。换句话说，估计器的形式为

$$\hat{X}(t_1)=aX(t_0)+b \tag{8.67}$$

其中，a 和 b 的选择要使 $X(t_1)$和$\hat{X}(t_1)$之间的均方误差达到最小。

根据 b 的选择，要保证估计器是无偏的，可以得到:

$$E[\hat{X}(t_1)]=aE[X(t_0)]+b=E[X(t_1)] \tag{8.68}$$

既然 A 和 Θ 是独立的，且 Θ 在[0, 2π]上服从均匀分布，则有:

$$E[X(t_0)]=E[A]\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t_0+\theta)\mathrm{d}\theta=0 \tag{8.69}$$

类似地，有 $E[X(t_1)]=0$，因此 $b=0$。

接下来，利用 LMMSE 估计器的误差正交于量测值的事实，可得:

$$E[(\hat{X}(t_1)-X(t_1))X(t_0)]=0 \tag{8.70}$$

并因此有

322

$$aE[X^2(t_0)]=E[X(t_1)X(t_0)] \tag{8.71}$$

或

$$a=\frac{E[X(t_1)X(t_0)]}{E[X^2(t_0)]} \tag{8.72}$$

式(8.72)的分子和分母分别为

$$\begin{aligned}E[X(t_1)X(t_0)] &= E[A^2]\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t_1+\theta)\cos(\omega_0 t_0+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{E[A^2]}{2}\cos\{\omega_0(t_1-t_0)\}\end{aligned} \tag{8.73}$$

和

$$E[X^2(t_0)]=\frac{E[A^2]}{2}$$

由于 $a=\cos\{\omega_0(t_1-t_0)\}$，所以 LMMSE 估计器为

$$\hat{X}(t_1)=X(t_0)\cos\{\omega_0(t_1-t_0)\} \tag{8.74}$$

注意 A 的分布并没有在这个等式中起作用。

为了求出 LMMSE 估计器相应的均方误差，可以计算随机信号在 t_0 和 t_1 时刻所取值之间的相关系数。显而易见，$\rho=a=\cos\{\omega_0(t_1-t_0)\}$，因此均方误差为

$$\frac{E[A^2]}{2}\{1-\cos^2\{\omega_0(t_1-t_0)\}\}=\frac{E[A^2]}{2}\sin^2\{\omega_0(t_1-t_0)\} \tag{8.75}$$

◀

8.3.2 多重量测

在这一节，LMMSE 估计器对随机变量 Y 的估计将扩展到以多个随机变量的量测值为基础的情形，也就是 X_1，…，X_L 集合成向量 $\boldsymbol{X}$ 的形式。这样的仿射估计器也许可以写成如下形式：

$$\hat{Y}_\ell=\hat{y}_\ell(\boldsymbol{X})=a_0+\sum_{j=1}^{L}a_jX_j \tag{8.76}$$

这里，LMMSE 估计器的系数 a_j 完全可以通过由随机变量 Y 和 X_j 的一阶矩和二阶矩(即均值、方差和协方差)定义的线性方程组求出。事实上，式(8.76)关于参数 a_j 的线性模型是线性系统方程组求解的结果；而关于随机变量仿射型的模型也是方程解仅依赖于一阶矩、二阶矩的原因。线性方程很容易求解，一阶矩、二阶矩通常也容易确定，这也加强了 LMMSE 估计的普及。

接下来的推导与 8.3.1 节相同，只不过前面考虑的是单次观测的随机变量 X。趁这一节扩展到多次量测的机会，除了回顾推导的逻辑过程外，还可以提供一些更深入的洞察。 323

总的目标仍然是最小化均方误差，即

$$E\left[\left(Y-\left(a_0+\sum_{j=1}^{L}a_jX_j\right)\right)^2\right] \tag{8.77}$$

这里的期望是通过 Y 和 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度计算得到的。使用联合概率密度而不是条件概率密度是因为并没有针对一组特定的量测值 $\boldsymbol{x}$ 选择最佳参数，否则通过令 $a_0=E[Y|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]$，并设置其他 a_j 为 0，那么非线性估计也可以在这种情形下工作。然而，对于 $\boldsymbol{X}$ 和 Y 所有可能组合的平均，参数将会选择为最佳的。除了一些特殊情形(有些情形很重要，比如多元高斯随机变量的情况)，线性估计器通常并不如无约束条件的估计器好，但是，正如现在讨论的，线性估计器很容易求解。

将式(8.77)对每一个 $a_i(i=0, 1, \cdots, L)$ 求导，并令每个导数等于 0，以获得最小值(同样，可以考虑用二阶导数证明基于这种方式找到的值是最小的，证明过程略)。对 a_0 求导并令结果等于 0，可得

$$E[Y]=E\left[a_0+\sum_{j=1}^{L}a_jX_j\right]=E[\hat{Y}_\ell] \tag{8.78}$$

或

$$a_0 = \mu_Y - \sum_{j=1}^{L} a_j \mu_{X_j} \tag{8.79}$$

其中，$\mu_Y = E[Y]$且$\mu_{X_j} = E[X_j]$。a_0的最佳值保证线性估计器是无偏的，就如式(8.78)所表达的一样，也就是说，估计器的期望值是待估随机变量的期望值。

用式(8.79)替换式(8.76)中的a_0，可得到

$$\hat{Y}_\ell = \mu_Y + \sum_{j=1}^{L} a_j (X_j - \mu_{X_j}) \tag{8.80}$$

换句话说，通过量测随机变量与它们各自期望值之间的差值$X_j - \mu_{X_j}$的线性组合，实现了估计器对待估随机变量期望值μ_Y的调整。

考虑到式(8.80)，式(8.77)表示的均方误差准则可以写为

324

$$E[\{(Y-\mu_Y)-(\hat{Y}_\ell-\mu_Y)\}^2] = E\Big[\Big(\widetilde{Y} - \sum_{j=1}^{L} a_j \widetilde{X}_j\Big)^2\Big] \tag{8.81}$$

这里

$$\widetilde{Y} = Y - \mu_Y \quad 和 \quad \widetilde{X}_j = X_j - \mu_{X_j} \tag{8.82}$$

对式(8.81)的每一个剩余系数$a_i(i=1, 2, \cdots, L)$求导并令导数等于0，可得方程：

$$E\Big[\Big(\widetilde{Y} - \sum_{j=1}^{L} a_j \widetilde{X}_j\Big)\widetilde{X}_i\Big] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,L \tag{8.83}$$

或者等价地，考虑式(8.80)有

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)\widetilde{X}_i] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,L \tag{8.84}$$

注意到式(8.78)中的$Y-\hat{Y}_\ell$正交于所有常量，特别是μ_{X_i}，因此可以推导出另一个版本，即

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)X_i] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,L \tag{8.85}$$

式(8.83)、式(8.84)和式(8.85)用略有不同的形式表达了同一个意思，即估计误差正交于估计器用到的随机变量。这些不同形式之间的关系与估计器的无偏性紧密相关。最后一种形式，即式(8.85)，是限定LMMSE估计器正交条件的常用表达。再次注意到，在前一节中MMSE估计器关于正交的表述是相当强的，即误差正交于量测随机变量的任何函数$h(\boldsymbol{X})$，而不仅仅是随机变量本身。重写式(8.85)为

$$E[YX_i] = E[\hat{Y}_\ell X_i], \quad i = 1,2,\cdots,L \tag{8.86}$$

推导出一个和正交条件等价的表述，即LMMSE估计器$\hat{Y}_\ell$和Y与量测变量X_i有相同的相关性。

正交性和无偏性条件一起完全确定了LMMSE估计器。同时，之前的推导也证明了Y的一阶矩及其与X_i的二阶交叉矩恰好匹配于$\hat{Y}_\ell$的一阶矩及其与X_i的二阶交叉矩。由此看来，Y和$\hat{Y}_\ell$仅基于这些矩是不能区分开的。

式(8.83)提供了一种求系数$a_j(j=1, \cdots, L)$的简便方法。这个方程组可被表示为

325

$$\sum_{j=1}^{L} \sigma_{X_i X_j} a_j = \sigma_{X_i Y} \tag{8.87}$$

这里$\sigma_{X_i X_j}$是X_i和X_j的协方差(因此$\sigma_{X_i X_i}$就是方差$\sigma_{X_i}^2$)，且$\sigma_{X_i Y}$是X_i和Y的协方差。将方程组写成矩阵的形式，可得

$$\begin{pmatrix} \sigma_{X_1X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_L} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2X_2} & \cdots & \sigma_{X_2X_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_LX_1} & \sigma_{X_LX_2} & \cdots & \sigma_{X_LX_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1Y} \\ \sigma_{X_2Y} \\ \vdots \\ \sigma_{X_LY} \end{pmatrix} \tag{8.88}$$

这个方程组称为正规方程组(normal equations)，也可以用矩阵形式表示为

$$(\boldsymbol{C}_{XX})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}_{XY} \tag{8.89}$$

通过比较式(8.88)和式(8.89)，容易得到$\boldsymbol{C}_{XX}$、$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}_{XY}$的定义。这里L个方程包含L个未知数，生成的解为$\{a_j\}$，$j=1$，…，L，将这些解的值代入式(8.80)即可完全确定估计器。用矩阵形式表示的解为

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{C}_{XX})^{-1}\boldsymbol{c}_{XY} \tag{8.90}$$

可以直观地获得该 LMMSE 估计器的 MMSE，即

$$\sigma_Y^2-\boldsymbol{c}_{YX}(\boldsymbol{C}_{XX})^{-1}\boldsymbol{c}_{XY}=\sigma_Y^2-\boldsymbol{c}_{YX}\boldsymbol{a} \tag{8.91}$$

其中，$\boldsymbol{c}_{YX}$是$\boldsymbol{c}_{XY}$的转置。在单次量测的情形下，这个结果将简化为$\sigma_Y^2(1-\rho^2)$，即式(8.60)。

例 8.8 基于两个含噪量测的估计

假定随机变量Y通过两个含噪量测X_1和X_2被观测，则有

$$X_1=Y+R_1 \quad \text{和} \quad X_2=Y+R_2 \tag{8.92}$$

这里Y和两个噪声变量R_1和R_2是互不相关的。同时假定R_1和R_2的均值为0，方差为σ_R^2。给定X_1和X_2的量测信息，可以确定Y的LMMSE估计器。这个估计器的形式为$\hat{Y}_\ell=a_0+a_1X_1+a_2X_2$。$\hat{Y}_\ell$的无偏性需要满足如下约束条件

$$a_0=\mu_Y-a_1\mu_{X_1}-a_2\mu_{X_2}=\mu_Y(1-a_1-a_2) \tag{8.93}$$

326

注意到

$$\begin{aligned}E[X_i^2]&=E[Y^2]+E[R_i^2]\\E[X_1X_2]&=E[Y^2]\\E[X_iY]&=E[Y^2]\end{aligned} \tag{8.94}$$

这时正规方程组变为

$$\begin{bmatrix}\sigma_Y^2+\sigma_R^2 & \sigma_Y^2\\ \sigma_Y^2 & \sigma_Y^2+\sigma_R^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_Y^2\\ \sigma_Y^2\end{bmatrix} \tag{8.95}$$

解式(8.95)可得

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\frac{1}{(\sigma_Y^2+\sigma_R^2)^2-\sigma_Y^4}\begin{bmatrix}\sigma_Y^2+\sigma_R^2 & -\sigma_Y^2\\ -\sigma_Y^2 & \sigma_Y^2+\sigma_R^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_Y^2\\ \sigma_Y^2\end{bmatrix}=\frac{\sigma_Y^2}{2\sigma_Y^2+\sigma_R^2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{8.96}$$

因此

$$\hat{Y}_\ell=\frac{1}{2\sigma_Y^2+\sigma_R^2}(\sigma_R^2\mu_Y+\sigma_Y^2X_1+\sigma_Y^2X_2) \tag{8.97}$$

由此可得，$\hat{Y}_\ell$是无量测信息Y的先验估计(prior estimate)μ_Y和两个量测值X_1、X_2的加权线性组合。先验估计μ_Y的权重随着量测噪声的增加而增大。当先验不确定性σ_Y^2增加时，量测值的权重将增大。

应用式(8.91)，相应的 MMSE 为

$$\frac{\sigma_Y^2\sigma_R^2}{2\sigma_Y^2+\sigma_R^2} \tag{8.98}$$

可以很直观地发现，在比值σ_Y^2/σ_R^2的最大范围内估计器和相应的MMSE取值都是合理的。◀

8.4 延伸阅读

在第7章结尾部分给出的拓展阅读中，所建议阅读的大部分文献都包含了均方误差估计的知识素材。还可参阅[Kay2]和[Moo]。在学习 MMSE 估计时，是假设已经掌握了所用到的概率密度函数；类似地，在 LMMSE 估计的学习中，也已经熟悉了所用到的一阶矩和二阶矩。统计学正是关注这些从数据中需要估计的或了解的参量。[DeG][Dek][Rce]和

[Wal]提供了很好的统计学基础概念，而[Cox][Was]和[Wil]则涉及更广泛的知识。不过这些都不是站在信号与系统的角度。[St1]和[St2]从历史的发展给出了基于概率的统计学方法，用于描述和量化不确定性、准确性和变化性，广泛应用于从天文学和测量学，到心理学、生物学和社会科学等领域。 327

习题

基础习题

8.1　考虑一对二元高斯随机变量 X 和 Y，且 $\mu_X=0$。以 X 形式表示的 Y 的 MMSE 估计器为 $\hat{Y}_{\text{MMSE}}(X)=2$。

(a) $E[Y]$为多少？

(b) 说明 X 和 Y 相关与否，或者是否有足够多的信息来做这个判断。解释原因。

(c) 说明 X 和 Y 是否独立，或者是否不相关，再或者是否有足够多的信息来做这个判断。解释原因。

(d) 以 Y 形式表示的 X 的 MMSE 估计器 $\hat{X}_{\text{MMSE}}(Y)$是什么？

8.2　考虑在一个数字通信系统中，独立同分布的 0、1 比特流 $s[n]$等概率地通过一个有差错无记忆信道。发送 1 接收 0 的概率是$\frac{1}{8}$，发送 0 接收 1 的概率为$\frac{1}{4}$。这种类型的信道称为无记忆二进制信道（memoryless binary channel），如图 P8.2-1 所示。

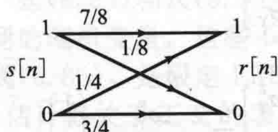


图　P8.2-1

(a) 确定在任意时刻 n 时的联合 PMF $P(r,s)$和边缘 PMF $P(r)$。

(b) 为了从 $r[n]$中获得 $s[n]$的估计$\hat{s}[n]$，接收信号要经过一个无记忆的、可能的非线性系统 F。设计图 P8.8-2 中的无记忆系统 F，使得如下定义的均方误差 ϵ 最小：

$$\epsilon = E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\}$$

确定系统 F。

(c) 利用你在(b)中确定的系统，寻求$\hat{s}[n]$的值，使下式最小：

$$E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2 \mid r[n]=r\}$$

同时，给出估计值$\hat{s}[n_0]$和真实值 $s[n_0]$在任意时刻 n_0 相等的概率。

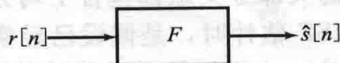


图　P8.2-2

8.3　假设 X 和 Y 是零均值单位方差的随机变量。如果基于 X 得到的 Y 的 LMMSE 估计器为

$$\hat{y}_\ell(X)=\frac{3}{4}X$$

那么，均方误差有多大？假设随机变量 Q 定义为 $Q=Y+3$，那么基于 X 的 Q 的 LMMSE 估计器 $\hat{q}_\ell(X)$是什么？均方误差有多大？最后再考虑，基于 Y 的 X 的 LMMSE 估计器 $\hat{x}_\ell(Y)$是什么？且它的均方误差有多大？

8.4　假定两个随机变量 X 和 Y 有联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，如图 P8.4 所示，在阴影区域内为常量，在区域外为 0。

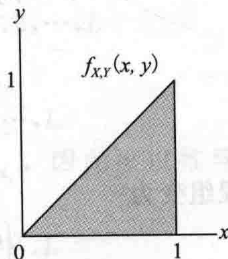


图　P8.4

(a) 画出概率密度 $f_X(x)$和 $f_{Y,X}\left(y\mid\frac{1}{3}\right)$的图形，并完全标记。

(b) X 和 Y 是否统计独立？解释原因。

(c) 确定基于观测变量 X 的 Y 的 MMSE 估计器 $\hat{y}_{\text{MMSE}}(X)$，画出图形并完全标记（作为 x 的函数）。

(d) 为了评估从(c)中得到的估计器的总体性能，求均方误差 e^2 以及估计器对应的偏差 b：

$$e^2=E[(\hat{y}_{\text{MMSE}}(X)-Y)^2]$$
$$b=E[\hat{y}_{\text{MMSE}}(X)-Y]$$

这里的期望为 X 和 Y 的联合期望。

(e) 求 Y 的线性 MMSE 估计器 $\hat{y}_{\text{LMMSE}}(X)$，以及对应的 MMSE。

8.5　假定两个随机变量 X 和 Y 有联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，如图 P8.5 所示，在阴影区域内为常量，在区域外为 0。

(a) 求基于量测信息 X 的 Y 的 LMMSE 估计器。

(b) 在 −2 到 2 范围内的 x，画出完全标记的 Y 的 MMSE 估计器。这里得到的估

计器和(a)中的 LMMSE 估计器相比有什么区别?

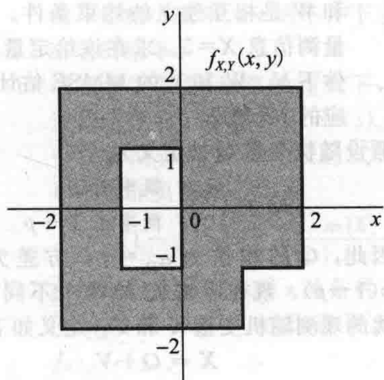


图 P8.5

8.6 假定两个随机变量 X 和 Y 有联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$,如图 P8.6 所示,在阴影区域为一个常量 K,在区域外为 0。

(a) (i) 求 K。

(ii) 画出充分标记的边缘 PDF $f_Y(y)$。

(iii) 画出充分标记的条件 PDF $f_{Y|X}\left(y\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)$。

(b) 求给定 $X=x$ 条件下 Y 的 MMSE 估计,也就是说,确定条件均值 $E(Y\,|\,X=x)$,这里 x 可以是 0~2 的任意值。

(c) 求给定 $X=x$ 条件下 Y 的 LMMSE 估计,这里 x 可以是 0~2 的任意值。注意图 P8.6 中联合概率密度函数的 $E[YX]=\frac{3}{4}$。

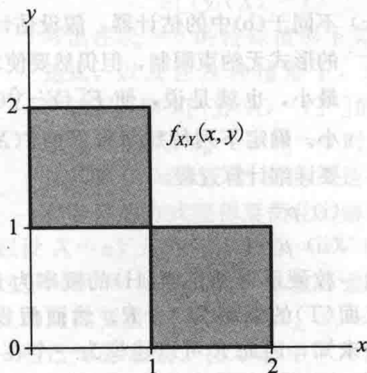


图 P8.6

8.7 考虑一个通信系统,随机变量 Y 通过信道传输后获得随机增益 W,因此接收到的随机变量为 $X=WY$。假设 Y 和 W 是独立的,且两者均在[1,2]上服从均匀分布。

(a) 假设你在接收端想利用 LMMSE 估计器 $\hat{Y}_\ell=d_1X+d_2$,通过接收到的 X 值去估计被发送的 Y 值。求 d_1 和 d_2 的值以及计算相应的 MMSE。

(b) 假设你在发送端想通过量测发送值 Y 去估计接收值 X。求(无约束的)MMSE 估计器 $\hat{X}(Y)$。

8.8 考虑如下形式的一个正弦信号

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$$

其中,ω_0 假定已知,A 和 Θ 是统计独立的随机变量,且 Θ 的 PDF 在区间[0, 2π]上服从均匀分布。假设 $X(t_2)$ 的 LMMSE 估计器构建于量测值 $X(t_0)$ 和 $X(t_1)$ 的基础上,也就是说,设计估计器

$$\hat{X}_\ell(t_2)=a_0X(t_0)+a_1X(t_1)+b$$

来最小化均方误差

$$E[(X(t_2)-\hat{X}_\ell(t_2))^2]$$

(a) 求 b 的最佳值。

(b) 建立可以获得 a_0 和 a_1 最佳值的方程组,写出详细步骤,并计算出相应的 a_0 和 a_1。在以下两种情形中分别检验你的答案取得的合理值:(i) $t_2=t_1$;(ii) $t_2=t_0$。为了使计算更规范简洁,回顾以下 2×2 矩阵求逆的形式也许有所帮助:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$$

你也可以通过将两个矩阵相乘来直接验证上述矩阵形式的正确性。

(c) 证明这个线性估计器对应的 MMSE 为 0。

8.9 对于以下每个命题,判断是对还是错。对于正确的命题,给出一个简短但有说服力的解释;对于错误的命题,给出一个反例或有说服力的解释。

(a) 如果 $\hat{Y}_\ell$ 是基于其他随机变量 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器,则相应的 MMSE $E[(Y-\hat{Y}_\ell)^2]$ 可以表示为

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)^2]=E[Y^2]-E[\hat{Y}_\ell Y]$$

(b) 假设 X 和 Y 是均值为 0、方差 σ^2 相同的随机变量,同时假设对随机变量 X 可以取到的所有 x 值有 $E[Y\,|\,X=x]=\frac{1}{3}x$。那么 X 和 Y 的相关系数必为 $\frac{1}{3}$。

8.10 对于以下每个命题,判断是对还是错。对于正确的命题,给出一个简短但有说服力的解释;对于错误的命题,给出一个反例或有说服力的解释。

(a) 假设基于 X 表示的随机变量 Y 的 LMMSE 估计器 $\hat{Y}_\ell$ 是 Y 的均值,也就是

说$\hat{Y}_\ell=\mu_Y$。则 X 和 Y 必然相互独立。

(b) 假设随机变量 X 在区间$[-1,1]$上服从均匀分布，且 $Y=X^2$(因此 Y 完全由 X 确定)。那么，基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器$\hat{Y}_\ell$ 为 0.

(c) 假设 X_1 和 X_2 是不相关的随机变量，那么，基于 X_1 和 X_2 表示的 Y 的 LMMSE 估计器为$\hat{Y}_\ell=\hat{Y}_{\ell1}+\hat{Y}_{\ell2}$，这里$\hat{Y}_{\ell1}$是仅基于 X_1 表示的 Y 的 LMMSE 估计器，同样$\hat{Y}_{\ell2}$是仅基于 X_2 表示的 Y 的 LMMSE 估计器。

8.11 随机变量 X 和 Y 在图 P8.11 所示的阴影区域内服从均匀分布。

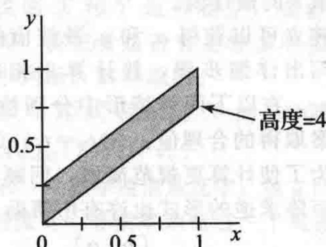


图 P8.11

(a) 给定 X，确定并画出 Y 的 MMSE 估计器$\hat{Y}_{\text{MMSE}}(X)$。

(b) 给定 Y，确定并画出 X 的 MMSE 估计器$\hat{X}_{\text{MMSE}}(Y)$。

8.12 X 和 Y 是两个 PDF 未知的随机变量。X 的均值为 0，给定 X 时 Y 的 MMSE 估计器$\hat{Y}$为$\hat{Y}=5$。从给出的信息中判断 X 和 Y 是否完全统计独立，或完全统计不独立；再或者不能从给定的信息中判断独立与否。解释原因。

高级习题

8.13 令 X 为天线角度位置 Y 的一个含噪量测变量：$X=Y+W$，这里 W 表示加性噪声。假定 Y 和 W 是相互独立的随机变量，且 Y 在区间$[-1,1]$上服从均匀分布，W 在$|w|\leqslant 2$ 时为三角形的 PDF 分布 $f_W(w)=\left[1-\left(\frac{|w|}{2}\right)\right]/2$(除此之外，$f_W(w)=0$)。给定 $X=1$ 条件下 Y 的 MMSE 估计$\hat{Y}_{\text{MMSE}}(1)$是什么？以及相应的 MMSE 是多少？

8.14 令 V 和 W 是零均值单位方差的随机变量且互不相关，假设

$$X=V+4$$

和

$$Y=-V+2W-3$$

(a) 求 X 和 Y 的均值、方差、协方差和相关系数。

(b) 考虑(a)中给定的随机变量，并附加 V 和 W 是相互独立的约束条件。现已知量测信息 $X=5$。求在该给定量测 X 条件下 V、W 和 Y 的 MMSE 估计，及相应的 MMSE。

8.15 假设随机变量 Q 被定义为

$$Q=\begin{cases}1, & \text{概率为 } p\\ 0, & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

因此，Q 的均值为 $\mu_Q=p$，方差为 $\sigma_Q^2=p(1-p)$。现在考虑 Q 的两个不同噪声干扰的观测随机变量 X 和 Y，定义如下：

$$X=Q+V$$
$$Y=Q+W$$

噪声变量 V 和 W 是零均值单位方差的二元高斯随机变量，且相关系数为 r，也就是，

$$f_{V,W}(v,w)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{(v^2-2rvw+w^2)}{2(1-r^2)}\right\}$$

令 Q 与 V 和 W 独立。(注意：所有的期望都要考虑期望运算涉及的所有随机变量。)

(a) 计算下列参量：

(i) $E[VW]$和 $E[QV]$。

(ii) $E[X]$、$E[X^2]$和 $E[XY]$。

(b) 假设利用如下形式的估计器 $\overline{Y}(X)$从 X 中估计 Y：

$$\overline{Y}(X)=\beta X$$

其中，β 是一个标量常数。求能够使均方误差 $E[\{Y-\overline{Y}(X)\}^2]$最小的 β 的表达式。

(c) 不同于(b)中的估计器，假设估计器$\hat{Y}(X)$的形式无约束限制，但仍然要使均方误差最小，也就是说，使 $E[\{Y-\hat{Y}(X)\}^2]$最小。确定下列特殊情形下的$\hat{Y}(X)$，不需要详细计算过程。

(i) $p=0$

(ii) $p=1$

8.16 抛一枚硬币得到正面(H)的概率为 R，得到反面(T)的概率为 $1-R$。然而假设概率完全未知，因此 R 可以建模为一个在区间$[0,1]$上服从均匀分布的随机变量，也就是说，在这个区间上 $f_R(r)=1$。现在的目标是通过一系列独立的抛币试验获得正面 H 的次数，再用合理的方法估计 R。

假设进行了 11 次抛币试验，期间 R 不变，且令 S 表示 11 次实验出现正反面的结果序列。在这里，$s=$ HHTHTTTHHTH (即这次试验出现了 6 次正面 H 和 5 次反面 T)，而计算将基于试验产生的该组特定序列进行。

(a) 给定 $R=r$，求观测到上述特定序列 s 的条件概率 $P(S=s\mid R=r)$，也就是说，在抛币概率为 r 的条件下求正面 H 出现的概率。

(b) 求在没有特定 R 值的约束下，获得上述特定序列 s 的概率 $P(S=s)$。这也许可以帮助你理解下列表达式，其中 m 和 k 为非负整数：

$$\int_0^1 p^m(1-p)^k\,\mathrm{d}p=\frac{m!k!}{(m+k+1)!}$$

(c) 在给定上述特定序列 s 的条件下，确定 R 的条件 PDF，也就是说，求函数 $f_{R\mid S}(r\mid s)$。

(d) 在给定上述序列 s 的条件下，确定 R 的无约束估计 $\hat{R}$，使得条件均方误差 $E[(\hat{R}-R)^2\mid S=s]$ 最小。

8.17 假设随机变量 X 与随机变量 G、Y 和 W 的关系如下：

$$X=GY+W$$

这里 G 的均值为 μ_G，方差为 σ_G^2，且它独立于 Y 和 W。Y 和 W 都是零均值，且互不相关；它们的方差分别为 σ_Y^2 和 σ_W^2。

(a) 根据题目中给定的条件，计算下列参量：

$$E[G^2]、E[X]、E[X^2]、\sigma_X^2、E[YX]、\sigma_{YX}$$

(b) 给定 X，计算 Y 的 LMMSE 估计器。也就是，确定 $\hat{y}_\ell(X)=aX+b$ 中的常数 a 和 b，使得下式最小：

$$E[\{\hat{y}_\ell(X)-Y\}^2]$$

写出在 $\sigma_W^2=0$ 的特殊情形下 $\hat{y}_\ell(X)$ 的表达式，以及在这种情形下，求相应的 MMSE，即 $E[\{\hat{y}_\ell(X)-Y\}^2]$ 的表达式。当假定(除了 $\sigma_W^2=0$) $\sigma_G^2=0$ 时，这里的估计器和 MMSE 的表达式是否能以一种合理的方式变得更简化？解释原因。

8.18 假设 $X=aV+bW+c$ 和 $Y=dV+eW+f$，这里 V 和 W 是零均值、单位方差且互不相关的随机变量，另 a、b、c、d、e、和 f 是一些已知的常数。在本题中，X 是量测的随机变量，V、W 和 Y 是基于量测值 X 并利用 LMMSE 估计器估计的随机变量。

(a) 求基于 X 表示的 V 的 LMMSE 估计器 $\hat{V}_L$，也就是令 $\hat{V}_L=\alpha X+\beta$，确定系数 α 和 β 使得均方误差 $E[(V-\hat{V}_L)^2]$ 最小。并求出相应的 MMSE。

(b) 同样，求基于 X 表示的 W 的 LMMSE 估计器 $\hat{W}_L$，并求出相应的 MMSE。

(c) 你可能会想也许有 $X=a\hat{V}_L+b\hat{W}_L+c$，这样估计 $\hat{V}_L$ 和 $\hat{W}_L$ 更符合 $X=aV+bW+c$ 的事实。利用你在(a)和(b)中得出的结果验证这种说法是否真的成立。

(d) 用在(a)和(b)中相同的计算方法，求基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器 $\hat{Y}_L$，同时求出相应的均方误差。从 $Y=dV+eW+f$ 中，你也许会想到 $\hat{Y}_L=d\hat{V}_L+e\hat{W}_L+f$。检验这种说法是否成立。提示：为了验证一个特定的线性函数是否为某个给定的随机变量的 LMMSE 估计器，只需要验证它是无偏的以及估计器和给定随机变量之间的误差正交于所有可用数据。

8.19 存储空间的信号 $s[n]$ 在恢复时会受到电子元器件故障的影响。恢复信号 $r[n]$ 可以写成

$$r[n]=s[n]+e[n]$$

这里，$e[n]$ 表示电子元器件故障影响的误差。$s[n]$ 和 $e[n]$ 均是独立同分布的随机过程。$r[n]$ 和 $s[n]$ 的联合 PDF 如图 P8.19-1 所示。

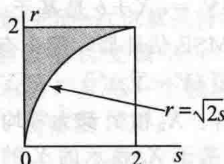


图 P8.19-1

$$f_{R,S}(r,s)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & \sqrt{2s}\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant s\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

在本题余下的部分，你也许会发现下面的式子或多或少有用：

$$f_S(s)=\frac{3}{4}(2-\sqrt{2s}),\quad 0\leqslant s\leqslant 2$$

$$E\{S\mid R=r\}=r^2/4,\quad E(S)=\frac{3}{5},$$

$$E(R)=\frac{3}{2},\quad E(RS)=1,$$

$$E(R^2)=\frac{12}{5},\quad E(S^2)=\frac{4}{7}$$

(a) 证明当 $0\leqslant r\leqslant 2$ 时，有 $f_R(r)=\frac{3}{8}r^2$，取其他值时 $f_R(r)$ 均为 0。

(b) 求 $E\{R\mid S=s\}$。

从 $r[n]$ 中可以得到 $s[n]$ 的估计 $\hat{s}[n]$，如图 P8.19-2 所示。

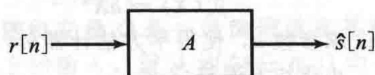


图 P8.19-2

该估计的均方误差 ε 定义为

$$\varepsilon = E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\}$$

(c) 求使均方误差 ε 最小的无记忆系统 A。

(d) 假设系统 A 的输出受限于如下形式

$$\hat{s}[n] = a_0 + a_1 r[n]$$

这里 a_0 和 a_1 是常数。求 a_0 和 a_1 的值，使均方误差 ε 最小。

(e) 假设系统 A 的输出为

$$\hat{s}[n] = cr[n-1]$$

这里 c 是常数。求 c 的值，使均方误差 ε 最小。

8.20 判断下列每个命题是否正确。对于正确的命题，给出一个简短但有说服力的解释；对于错误的命题，给出一个反例或有说服力的解释。

(a) 如果$\hat{Y}_\ell=aX+b$ 是基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器，那么对于任意的常数 c 和 d，$Y-\hat{Y}_\ell$ 正交于 $cX+d$，也就是说，

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)(cX+d)]=0$$

对任意常数 c 和 d 成立。

(b) 如果$\hat{Y}_\ell=aX+b$ 是基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器，那么有

$$E[(Y-\hat{Y}_\ell)^2]=E[Y^2]-E[\hat{Y}_\ell^2]$$

(c) 若 X_1、X_2 和 Y 都为零均值。假设

- 仅基于 X_1 表示的 Y 的 LMMSE 估计器有$\hat{Y}_{1\ell}=a_1X_1$。
- 仅基于 X_2 表示的 Y 的 LMMSE 估计器有$\hat{Y}_{2\ell}=a_2X_2$
- $\hat{Y}_\ell=\gamma_1X_1+\gamma_2X_2$ 是基于 X_1 和 X_2 表示的 Y 的 LMMSE 估计器。

若 X_1 和 X_2 互不相关，那么有

$$\hat{Y}_\ell=\hat{Y}_{1\ell}+\hat{Y}_{2\ell}$$

(换句话说，$\gamma_1=a_1$ 和 $\gamma_2=a_2$。)

(d) 回想一下，基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器为$\hat{Y}=E[Y|X]$。那么 $Y-\hat{Y}$正交于$\frac{1}{X^2+1}$。

(e) 假设 X 和 Y 的相关系数为 $\rho=\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$，那么

$$\sigma_Y^2(1-\rho^2)\geqslant E[(Y-E[Y|X])^2]$$

8.21 两个随机变量 X 和 Y 有联合 PDF$f_{X,Y}(x,y)$。假设所有阶的联合矩均是可得到，随机变量 Y 可以通过下列平方估计器从随机变量 X 中估计得到：

$$\hat{y}_q(X)=aX^2$$

(a) 求参数 a，使得平方估计器 $\hat{y}_q(X)$ 能最小化均方误差：

$$\varepsilon=E_{X,Y}\{[Y-aX^2]^2\}$$

(b) 最佳平方估计器的误差为

$$e=Y-\hat{y}_q(X)$$

误差 e 是否正交于量测值 X？

(c) 最佳平方估计器 $\hat{y}_q(X)$ 是否是无偏的？如果是，给出证明。如果不是，求出偏差，即 $E_{X,Y}(e)$。

8.22 考虑一个信道增益 $g[n]$是时变的通信系统，如图 P8.22-1 所示。

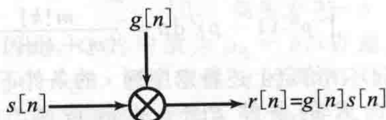


图 P8.22-1

- 发送信号 $s[n]$是一个随机比特流，将其定义为一个独立同分布的伯努利随机过程，在每个时刻发送+1 的概率为 p，发送−1的概率为 $1-p$。
- 信道增益 $g[n]$是一个均匀分布在 0~1 的独立同分布的过程，即在每个时刻有

$$f_G(g[n])=\begin{cases}1, & 0\leqslant g[n]\leqslant 1,\text{对于所有 } n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$s[n]$和 $g[n]$是统计独立的。

(a) 确定并画出完全标记的 PDF$f_R(r[n])$。

(b) 求 $E(r[n])$和 $E(r^2[n])$。

仅对于(c)和(d)两部分，如图 P8.22-2 所示，将 $r[n]$通过一个无记忆可能的非线性系统处理后获得 $s[n]$的估计 $\hat{s}[n]$。



图 P8.22-2

该估计的均方误差 ε 定义为

$$\varepsilon=E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\}$$

(c) 仅在这一部分，令 $P=\frac{1}{2}$。如果 $F\{r[n]\}$限定为如下的形式：

$$F\{r[n]\}=\hat{s}[n]=a_0+a_1r[n]$$

其中，a_0和 a_1 是一些常数。求 a_0 和 a_1 的值，使得均方误差 ε 最小，并确定对应的 ε。

(d) 除了系统是无记忆的，如果对系统 F 的其他形式不加限定，求 F，使得均方误差 ε 最小，并确定对应的 ε 值。

8.23 假设 X 和 Y 是两个随机变量，且基于 X 形式表示的 Y 的 LMMSE 估计器$\hat{Y}_\ell=aX+b$ 为$\hat{Y}_\ell=3X$。判断下列每个命题是否正确。对于正确的命题，给出一个简短但有说服力的解释；对于错误的命题，给出一个反

例或有说服力的解释。

(a) X 和 Y 一定均为零均值。

(b) 基于 Y 表示的 X 的 LMMSE 估计器为 $\hat{X}_\ell=\frac{1}{3}Y$。

(c) $E[Y|X=2]=6$。

(d) 基于 X 表示的 $Z=2Y+7$ 的 LMMSE 估计器为 $\hat{Z}_\ell=6X+7$。

8.24 假设 X 和 Y 是两个随机变量。基于量测 X 得到的指定形式的 Y 的估计 $\hat{Y}=aX^2$，这里 a 是使 $E_{X,Y}\{(Y-\hat{Y})^2\}$ 最小的常数。对 a 的这种选择，证明下式(必然)为真还是(可能)为假：

$$E_{X,Y}\{(Y-\hat{Y})\cdot X\}=0$$

解释原因。

扩展习题

8.25 假设随机变量 X 和 Y 的分布服从联合概率密度，称为摩根斯坦的二元概率密度(Morgenstern's bivariate density)，即在 (x,y) 平面的 $0\leqslant x$、$y\leqslant 1$ 的单位区域内给出下列表达式，而在其余地方均为0：

$$f_{X,Y}(x,y)=1+\alpha(1-2x)(1-2y) \tag{8.99}$$

当 $\alpha=1$、0、-1 时，该二元概率密度的如图 P8.25 所示。

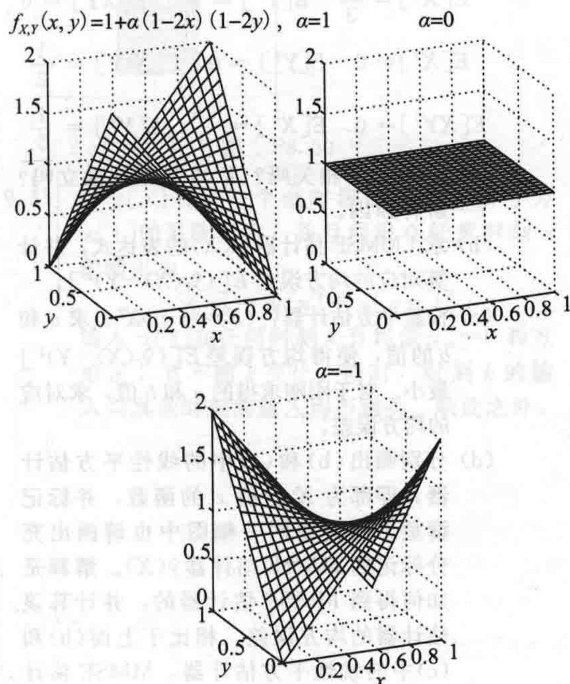


图 P8.25

(a) 求 X 边缘概率密度，即 $f_X(x)$。Y 的边缘概率密度由对称性可得。选择什么样的 a 可使得 X 和 Y 独立?

(b) 求 μ_Y、μ_X、σ_X^2 和 σ_Y^2。

(c) 写出本题中 $E[XY]$ 的积分定义式。计算该积分，将会得到：

$$E(XY)=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{36}$$

求 σ_{XY} 和 ρ_{XY}。

(d) 在给定 X 条件下求 Y 的 LMMSE 估计器以及相应的均方误差。

(e) 求 MMSE 估计器。说明在这种情形下 MMSE 估计器是否比 LMMSE 估计器性能更好。

8.26 本题呈现的是一个可以被看作在大学餐厅里随机选择侍者的服务率 R 的估计问题，侍者(他或她)对 n 个顾客服务的时间的量测值分别是 X_1，X_2，…，X_n(也许是或不是连续的顾客，这对本题没有影响)。这里 X_k 是从第 k 个顾客向侍者点餐下单开始到侍者完成该单服务的时间。

假设(在对大量侍者事先观察的基础之上)一般认为 R 可以建模成一个指数分布的随机变量，其 PDF 如下：

$$f_R(r)=be^{-br}u(r)$$

当给定条件 $R=r$(也就是侍者的服务速度为 r)时，假设随机变量 X_1，X_2，…X_n 是独立同分布的，且每一个独立地服从下列具有参数 r 的指数 PDF：

$$f_{X|R}(x|r)=re^{-rx}u(x),\quad i=1,2,\cdots,n$$

你将发现以下的积分式(以及合适的参数 α、y 和 k)会对解答这个问题有所帮助：

$$\int_0^\infty \alpha^k e^{-\alpha y}d\alpha=\frac{k!}{y^{k+1}},\quad y>0$$

(a) 求 $E[R]$。

(b) 给定 $R=r$，求 X_i 的条件期望 $E[X_i|R=r]$。

(c) 求 R、X_i 的联合 PDF，以及 R、X_1，X_2，…，X_n 的联合 PDF。

(d) 求 X_i 的 PDF，以及 X_1，X_2，…，X_n 的联合 PDF。所有的 X_i 是相互独立的吗(当不存在条件 $R=r$ 时)?

(e) 给定 $X_1=x_1$，$X_2=x_2$，…，$X_n=x_n$ 时，求 R 的条件概率密度。

(f) 给定 $X_1=x_1$，$X_2=x_2$，…，$X_n=x_n$ 时，求 R 的 MMSE 估计。验证对于 $n=0$，你的答案简化成了(a)中的答案。鉴于答案(b)，同时证明对于较大的 n 值，你的答案简化成的表达式看起来是合理的。

8.27 随机变量 Q 是一通信信道在某些时刻点上的输入，服从均匀分布且均值为 μ_Q，方差为 σ_Q^2。假设相应的信道输出为 $X=$

$Q+W$，这里加性干扰是零均值且方差为 σ_W^2、服从均匀分布的随机变量 W，且独立于 Q。

(a) 希望为随机变量 Q 构建一个满足 $\hat{q}_\ell(X)=aX+b$ 形式的线性估计器。选择什么样的 a 和 b，可以使均方误差 $E\{(Q-\hat{q}_\ell(X))^2\}$ 最小？对于所选的 a 和 b，对应的均方误差是什么？证明估计器是无偏的，也就是 $E(Q-\hat{q}_\ell(X))=0$，且证明估计误差正交于 X(这是正交性准则表征线性估计器的一种解释)。

(b) 利用所提供的适当软件计算包基于实验的方法验证在(a)中获得的均方误差值。假设 $\mu_Q=5$，$\sigma_Q^2=\frac{64}{3}$，$\sigma_W^2=\frac{4}{3}$。

(i) 首先利用上面给出的条件确定参数 a 和 b。

(ii) 现在生成 Q 和 W 的 100 个样本值。

(iii) 然后计算对应的 X 值。

(iv) 利用上面确定的估计器参数 a 和 b 的值，计算每一个量测值 X 条件下 Q 的 LMMSE 估计。

(v) 现在计算经验均方误差(empirical mean square mean)。(利用大数定理使样本均值或者经验均值近似得到整体均值或者概率均值。)

(vi) 将上述步骤重复多次(通过产生不同的 Q 和 W 值)，验证经验 MSE 接近于在(a)中由 a 和 b 获得的均方误差。

8.28 (a) 考虑一对二元高斯随机变量 X 和 Y。基于 X 表示的 Y 的 MMSE 估计器为 $\hat{y}_\ell(X)=5$。X 和 Y 是否相关？解释原因。

(b) 考虑一对随机变量 X 和 Y，它们均具有单位方差和零均值。给定 Y 时，X 的 LMMSE 估计器 $\hat{X}_\ell=\frac{2}{3}Y$。是否有一个给定 X，使 Y 的 LMMSE 估计器为 $\hat{y}_\ell=\frac{3}{2}X$？清楚地解释有或没有这类值的原因。

(c) 如果 X 是一个随机变量且有 $Y=X^2$，那么 X 和 Y，是否可以成为不相关的随机变量？

(d) 令 Y 在区间[-1，1]上均匀分布，令 U 等于 1 或 -1 的概率均为 0.5 且独立于 Y，并令 $X=UY$。基于观测值 X，是否可以得到 Y 的 LMMSE 估计器为 $\hat{y}_\ell(X)=X$？

(e) 如果 X 和 Y 是不相关的随机变量，那么基于 X 表示的 Y 的 LMMSE 估计器是否总是为 $\hat{Y}_\ell=\mu_Y$？Y 的期望值为多少？

(f) 如果 X 和 Y 是不相关的随机变量，那么给定 $X=x$，Y 的 LMMSE 估计器是否总是为 $\hat{y}(x)=\mu_Y$？Y 的期望值为多少？

8.29 考虑两个随机变量 X 和 Y，它们的联合 PDF 在如图 P8.29 所示的阴影区域内为常量，在其余区域为 0。

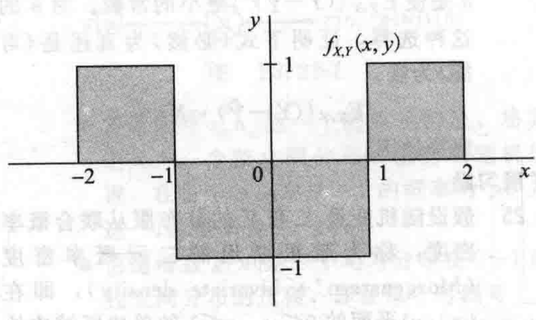


图 P8.29

根据概率密度函数可以计算得到下列统计量：

$$E[X]=0 \quad E[Y]=0$$

$$E[X^2]=\frac{4}{3} \quad E[Y^2]=\frac{1}{3} \quad E[XY]=0$$

$$E[X^3]=0 \quad E[Y^3]=0 \quad E[X^2Y]=\frac{1}{2}$$

$$E[XY^2]=0 \quad E[X^4]=\frac{16}{5} \quad E[Y^4]=\frac{1}{5}$$

(a) X 和 Y 不相关吗？X 和 Y 相互独立吗？解释原因。

(b) 求 LMMSE 估计器 $\hat{y}_\ell(X)$ 的表达式，并计算对应的均方误差 $E[(\hat{y}_\ell(X)-Y)^2]$。

(c) 检验平方估计器 $\hat{Y}_q(X)=a+bX^2$。求 a 和 b 的值，使得均方误差 $E[(\hat{y}_\ell(X)-Y)^2]$ 最小。对于刚刚求得的 a 和 b 值，求对应的均方误差。

(d) 分别画出(b)和(c)中的线性平方估计器，即都为 X 的值 x 的函数，并标记清楚。同时在同一幅图中也请画出充分标记的 MMSE 估计器 $\hat{y}(X)$。解释是如何得到 MMSE 估计器的，并计算该估计器的均方误差。相比于上面(b)和(c)中的线性平方估计器，MMSE 估计器的均方误差如何？

8.30 两个随机变量 X 和 Y 的联合 PDF 在如图 P8.30所示的阴影区域内均匀分布，在其余区域为 0。已知该分布的某些矩如下：

$E(X^2)=20/3$， $E[X^6]=5440/7$，

$E(Y^2)=7$， $E(XY)=6$， $E(X^3Y)=60$

(a) 求 $E(X)$、$E(Y)$和 $E(X^3)$。不需要详细的计算过程，但是要简单证明所得答案。

(b) 令 $\hat{y}_\ell(X)=aX+b$ 是 Y 的一个线性估计器，这里 a 和 b 是常数。求 a 和 b 的值使得 $E[(Y-\hat{y}_\ell(X))^2]$最小，并求出这个最小均方误差。

(c) 令 $\hat{y}_c(X)=cX^3+d$ 是 Y 的一个立方估计器(cubic estimator)，这里 c 和 d 是常数。求 c 和 d 的值，使得 $E[(Y-\hat{y}_c(X))^2]$最小，并写出一个基于 X 和 Y 适当矩表示的这个最小均方误差的表达式。在这个特定例子中，该立方估计器和(b)中的线性估计器相比是更好还是更差?

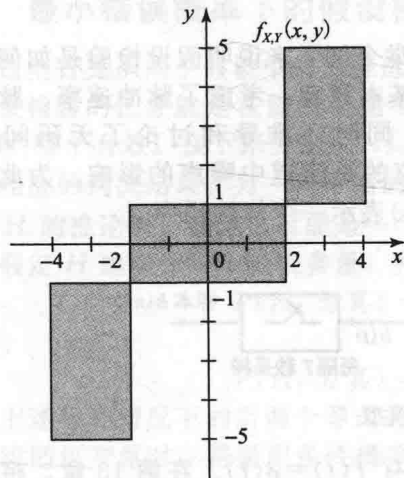


图 P8.30

8.31 令 $y[\cdot]$表示一个全时段随机输入信号为 $w[\cdot]$的系统输出，并且假设在任意时刻 n 的输出为

$$y[n]=w[n]+w[n-1]$$

输入 $w[k]$在任何时刻 k 有均值 $u_w=0$ 和方差 σ_w^2，且不随 k 变化。同时，时刻 k 的输入与其他时刻的输入均不相关。除此之外，并不知道 $w[\cdot]$的其他信息，也没有该输入信号的任何量测值。

(a) 求 $y[n]$的均值 μ_y 和方差 σ_y^2(方差不会随 n 变化)，后者用 σ_w^2 的形式表达。同时求出 $y[n+1]$和 $y[n]$的协方差，以及 $y[n+1]$和 $y[n-1]$的协方差，再一次用 σ_w^2 的形式表示所求答案。

(b) 利用 $y[n]$的量测值求 $y[n+1]$的 LMMSE 估计器，可写为

$$\hat{y}_1[n+1]=ay[n]+b$$

其中，a 和 b 为最佳选择参数。确定 a 和 b 的值，以及相应的均方误差 $E[(y[n+1]-\hat{y}_1[n+1])^2]$。

(c) 利用 $y[n-1]$的量测值求 $y[n+1]$的 LMMSE 估计器，可写为

$$\hat{y}_2[n+1]=cy[n-1]+d$$

其中，c 和 d 为最佳选择参数。确定 c 和 d 的值，以及相应的均方误差。

(d) $y[n+1]-\hat{y}_1[n+1]$是否正交于 $y[n-1]$? 也就是说，确定一步预测(one-step predictor)的残差是否正交于退后两步的值。

(e) 仔细画出本题描述的三个随机变量 $y[n+1]$、$y[n]$、$y[n-1]$之间的相互关系，基于向量的方式(参考 7.8 节)。验证所画图形与(a)～(d)中的答案是否一致。并用它解释为什么使用 $y[n]$和 $y[n-1]$的量测值得到的 LMMSE 估计器优于仅使用 $y[n]$或 $y[n-1]$量测值得到的估计器。

(f) 利用量测值 $y[n]$和 $y[n-1]$求 $y[n+1]$的 LMMSE 估计器，可写为

$$\hat{y}_{12}[n+1]=ey[n]+fy[n-1]+g$$

其中 e、f 和 g 为最佳选择参数。求参数 e、f 和 g，及相应的均方误差。验证所得均方误差小于在(b)(c)中得到的均方误差。

328～342

第9章

假设检验

假设检验(hypothesis testing)广泛应用于信号处理和通信领域，以及医学、统计和其他一些需要基于有限的和含噪的数据在多重解释或者假设中做出一个选择的场景中。例如，从测试的数据中可能需要确定一个人是否得了一种特殊的疾病；返回的特定雷达表明飞行器是否存在；在脉冲幅度调制(PAM)系统中的给定时刻传送的是四个值中的哪一个。诸如此类的问题。假设检验提供了一个以某种原则或最佳的方法从已有数据的 M 种可能解释中进行选择的框架基础。

9.1 噪声中的二进制脉冲幅度调制

作为本章后续部分更广泛讨论的前奏，这里首先举个例子来说明假设检验是如何应用于噪声中的脉冲幅度检测的。第 3 章介绍了 PAM 的基本原理，考虑了脉冲速率、脉冲形状，以及信道和接收滤波器对 PAM 系统的作用。同时还推导和讨论了无码间干扰(no-ISI)的条件。在无码间干扰的前提下，现在想研究的是信道中噪声的影响。为此，考虑图 9.1 中的 PAM 系统总体模型，其中信道噪声 $v(t)$ 表示一个加性噪声。

343

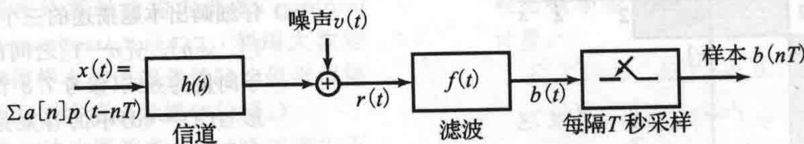


图 9.1 PAM 系统总体模型

暂且假定接收机没有后置滤波(postfiltering)，则有 $f(t)=\delta(t)$。在第 13 章，将会看到接收机采用滤波后系统的性能如何得到提升。脉冲 $p(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ 的信道后在信道输出端产生信号 $s(t)=p(t)*h(t)$。图 9.2是图 9.1 总体系统的简化。

噪声$v(t)$
$\Sigma a[n]s(t-nT)$ $r(t)$ 每隔T秒采样 $b[n]=r(nT)$

图 9.2 PAM 系统的简化表示

既然假定无码间干扰，那么这里的讨论就可以仅关注单个脉冲序号(pulse index) n，为了方便起见，选择 $n=0$。由图 9.2 可得：

$$b[0]=r(0)=a[0]s(0)+v(0) \quad (9.1)$$

将 $r(0)$、$a[0]$、$v(0)$ 分别简化表示为 r、a、v，并不失普遍性地设 $s(0)=1$，则式(9.1)变为

$$r=a+v \tag{9.2}$$

这里更广泛的目标是通过给定的量测值 r 来尽可能准确地确定 a 的值。

上述问题本身存在一些变数，取决于传输序列 $a[n]$ 的属性和噪声的特点。幅度 $a[n]$ 可能跨越一个连续范围，或者也可能是离散的，例如，由一个二进制码字表示的数据。因此幅度可能相应地建模成基于概率密度函数或概率质量函数的随机变量 A，那么 a 就是随机变量 A 在这种概率模型下的一个特定结果或实例。噪声对系统的影响一般也表示为随机变量 V，通常是连续的，且用 v 表示具体的取值。这样，可以将接收机端的参量 r 建模为观测变量 R，有

344

$$R=A+V \tag{9.3}$$

然后根据给定 $R=r$ 的条件估计出随机变量 A 的值。需要在接收机端进一步处理的步

骤就是获得 A 的估计。

在二元信令(binary signaling)的情况下，脉冲幅度只能是两个取值中的一个，这将简化 A 的估计，即只需要依据 R 的两个可能的传输幅度观测值 r。在 PAM 系统中，两种常用的二元信令形式是开关信号(on-off signaling)和反相信号(antipodal signaling)。用 a_1 和 a_0 来表示两个可能出现的幅度值(例如代表二进制的“1”或“0”)，在开关信号中可令 $a_0=0$，$a_1\neq 0$，而在反相信号中可令 $a_0=-a_1\neq 0$。

因此，在二元信令传输中，所需的后处理步骤是在两个可选的假设中做出选择，这里可用的信息也许包含由单个连续随机变量 R 的量测值 r 带来的一些先验信息。假设 H 为

$$H_0: A \text{ 的传输幅度取值 } a_0, \text{则有 } R = a_0 + V$$

$$H_1: A \text{ 的传输幅度取值 } a_1, \text{则有 } R = a_1 + V$$

接下来的任务就是在给定量测值 $R=r$ 的条件下，判决 H_0 还是 H_1 有效。9.2 节将建立这种假设检验或者说分类方法的一个框架。一旦理解了二元假设(two-hypothesis)的情形，就很容易从二元假设拓展到多元假设和多重量测。

9.2 最小错误概率下的假设检验

这里首先从两个假设中的最佳选择开始讨论，之后再拓展到多个假设的情形。通常二元假设检验的任务就是在随机变量 R 的量测值 r 的基础上判决两个假设：$H=H_0$ 或者 $H=H_1$ 哪个有效。接下来分别用‘H_0’和‘H_1’表示这两个判决结果，其中单引号意在建议生成相应的判决结果。另一种常用的表示方法分别是 $\hat{H}=H_0$ 和 $\hat{H}=H_1$，这里 $\hat{H}$ 表示的是假设 H 的推论值。量测值可能是一个连续的或者离散的随机变量。

假定 H 建模为一个随机参量，并且已知先验概率(a priori)，即

$$P(H_0 \text{ 为真}) = P(H = H_0) = P(H_0) = p_0 \tag{9.4}$$

和

$$P(H_1 \text{ 为真}) = P(H = H_1) = P(H_1) = p_1 \tag{9.5}$$

上述每种情况下的后两个等式的简化表法方式将在后续讨论中采用。当量测参量是一个连续随机变量时，需要用条件概率密度 $f_{R|H}(r|H_0)$ 和 $f_{R|H}(r|H_1)$ 来获得在两种不同假设下量测变量是如何分布的。实际上这些条件概率密度组成了将量测数据与两种假设相关联的模型或规范。例如，在 PAM 系统中，R 由式(9.3)定义，且假定 V 在每种假设下均与 A 独立，这时的条件概率密度有

$$f_{R|H}(r|H_0) = f_V(r-a_0) \text{ 和 } f_{R|H}(r|H_1) = f_V(r-a_1) \tag{9.6}$$

如果 R 是一个离散随机变量，那么就用条件概率质量函数来代替条件概率密度。

345

如同 PAM 数字通信系统，在许多情况下都很自然地希望错误假设的概率最低，也就是说，在给定量测值 $R=r$ 的条件下，以最小错误概率(minimum probability of error)的准则从假设中做出判决。对假设检验的初步讨论，关注的就是最小错误概率准则。

9.2.1 最小错误条件概率的判决

首先考虑在没有任何量测值 R 的情况下，如何在 H_0 和 H_1 中选出具有最小错误概率的假设。当选择‘H_0’时，如果 H_0 不成立，则发生了选择错误，该选择的错误概率是 $1-P(H_0)=1-p_0$。类似地，当选择‘H_1’时，该选择的错误概率是 $1-P(H_1)=1-p_1$。因此，基于最小错误概率的准则，应该判决哪个假设具有最大概率——这是一个直观合理的结论。前面的推理可以扩展到从多个假设中选择一个的情形，且与上面有相同的结论。

同样的推理过程也适用于已知 $R=r$ 时基于最小错误概率准则在 H_0 和 H_1 中做判决。然而，在这种情形之下，所有的概率均需要以量测值 $R=r$ 为条件。相应的结论是，为了最小化条件错误概率 $P(\text{error}|R=r)$，需要在量测值 $R=r$ 的条件下选出具有最大条件概率的假设。因此，若 $P(H_1|R=r)>P(H_0|R=r)$，则选‘H_1’；若 $P(H_1|R=r)<P(H_0|R=r)$，则

选‘H_0’。这种判决方式可以被简写成如下形式：

$$P(H_1|R=r) \underset{‘H_0’}{\overset{‘H_1’}{\gtrless}} P(H_0|R=r) \tag{9.7}$$

相应的条件错误概率为

$$P(\text{error}|R=r)=\min\{1-P(H_0|R=r),1-P(H_1|R=r)\} \tag{9.8}$$

[346] 如果两个条件概率是相等的，则无论选择‘H_0’还是‘H_1’，所得到的条件错误概率也是相同的，因此这时的选择是任意的。如果存在多个有量测值的随机变量，而不仅仅是单个随机变量 R，只需要在前面的表达中将所有量测值作为条件来考虑。

在式(9.7)中出现的条件概率 $P(H_0|R=r)$ 和 $P(H_1|R=r)$ 称为假设的后验概率(a posteriori)或假设概率，以区别于先验概率或概率 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$。利用式(9.7)生成的判决相应地指的是最大后验概率(maximum a posteriori probability)的判决，通常简写为 MAP 判决。MAP 判决就是在给定量测值的条件下最小化条件错误概率。

为了计算式(9.7)中的后验概率，可以依据已知的参量用贝叶斯法则重写该表达式，那么通过以下对比就可以做出最佳判决：

$$\frac{p_1 f_{R|H}(r|H_1)}{f_R(r)} \underset{‘H_0’}{\overset{‘H_1’}{\gtrless}} \frac{p_0 f_{R|H}(r|H_0)}{f_R(r)} \tag{9.9}$$

在合理的假设下，即 $f_R(r)>0$，也就是说，R 的 PDF 在实际量测值 r 处为正。既然上述不等式两边的分母相同且均为正，所以上式可以进一步简化为

$$p_1 f_{R|H}(r|H_1) \underset{‘H_0’}{\overset{‘H_1’}{\gtrless}} p_0 f_{R|H}(r|H_0) \tag{9.10}$$

9.2.2 最小化总体错误概率的 MAP 判决准则

判决准则需要对每个可能获得的量测值 r 做出一个判决。与这样的准则相对应的错误概率 P_e 可以通过平均所有可能量测值 r 的条件错误概率得到，即

$$P_e=\int_{-\infty}^{\infty} P(\text{error}|R=r) f_R(r)\,\mathrm{d}r \tag{9.11}$$

这里，通过最小化每一个 r 的 $P(\text{error}|R=r)$，并基于 $f_R(r)\geqslant 0$ 的事实来确保 P_e 达到最小。因此，式(9.7)或式(9.10)给出了 P_e 最小化的判决准则，适用于每一个 r。式(9.11)也表明了在 $f_R(r)=0$ 的情形下，P_e 不会受假设的选择影响。

式(9.10)表示的 MAP 判决准则形式非常直观且易于实现。先验概率 $p_i=P(H_i)$ 用来作为各概率密度函数 $f_{R|H}(r|H_i)$ 的比例因子，这些概率密度函数描述了在每一种假设下量测参量 R 是如何分布的。因此，在量测值 r 的条件下，最佳判决准则就是选择带比例因子的 PDF(scaled PDF)最大所对应的假设。

这里的 MAP 判决准则将量测空间的一个分区，即 r 轴，引入了判决域(decision [347] region)。判决区域 D_1 由判决准则选择‘H_1’对应的那些量测值 r 组成；而判决区域 D_0 由判决准则选择‘H_0’对应的那些量测值 r 组成。

前面的讨论也适用于在多个假设中基于最小错误概率准则的判决，而不仅仅局限于两个假设；同时给定的量测值信息也涉及多个相关联的随机变量，而不仅仅只有一个。推导过程是完全相同的。

例 9.1 MAP 准则应用于均匀噪声中的开关信号

考虑一个随机变量 S 只有 0 和 1 两种取值，且相应的先验概率分别为 $p_0=\frac{1}{4}$ 和 $p_1=$

$\frac{3}{4}$。这可能对应于一个无噪环境下开关PAM信令系统在接收机端的采样值a_0和a_1。当存在加性噪声时，接收到的含噪观测变量为$R=S+N$。假定N独立于S，且其幅度均匀分布在$-2\sim2$，如图9.3所示。在H_0和H_1这两种假设下，接收值R分别为

$$H_0: R = 0 + N \tag{9.12}$$

$$H_1: R = 1 + N \tag{9.13}$$

在给定观察值R的情况下，为了以最小的错误概率在H_0和H_1这两个假设中做出判决，可以采用式(9.7)中的MAP准则，并根据式(9.10)的形式实现。式(9.10)的左右两边已在图9.4中标出。因此，应用MAP准则可以得到下列判决式：

$$\text{当} -2 < r < -1 \text{时}，\quad \text{判为 ‘}H_0\text{’} \tag{9.14}$$

$$\text{当} -1 < r < 3 \text{时}，\quad \text{判为 ‘}H_1\text{’} \tag{9.15}$$

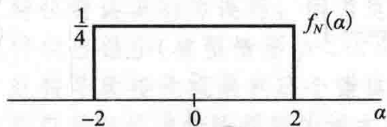


图9.3 噪声N的PDF

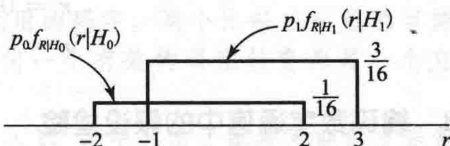


图9.4 带比例因子的条件概率的示意图

348

例9.2将讨论不止两种假设情况下MAP准则的应用，同时给出的是离散随机变量的量测值而不是连续随机变量的。

例 9.2 三种假设情况下MAP准则的应用

在例8.1中，探讨了从含噪量测值R中对离散随机变量S的最小均方误差(MMSE)估计，其中随机变量S和R的联合PMF在图8.1中已给出，现重新在图9.5中示出。这里(S, R)以0.2的概率分别取值(1, 1)、(0, 0)、(−1, −1)，以0.1的概率分别取值(1, 0)、(−1, 0)、(0, 1)，(0, −1)。

尽管随机变量S只能在0、+1或者−1这三个值中取值，但例8.1中的MMSE准则并没有受这个条件约束。在$R=1$时利用MMSE估计得到条件均值$\hat{s}=E[S|R=1]=\frac{2}{3}$。这个估计最小化了均方误差，而不是条件错误概率。给定$R=1$的条件下，当选择$\hat{s}=\frac{2}{3}$时条件错误概率为1。另一方面，给定$R=1$的条件下，当选择$\hat{s}=0$时将导致条件错误概率为$\frac{2}{3}$，因为$S=0$的概率为$\frac{1}{3}$。仍然在给定$R=1$的条件下，选择$\hat{s}=1$时将得到最小的条件错误概率$\frac{1}{3}$，因为$S=1$的概率为$\frac{2}{3}$。

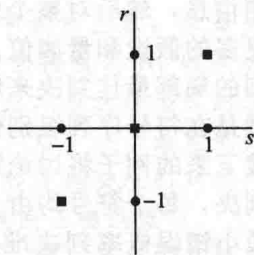


图9.5 S和B的联合PMF
图中的每个方块对应联合概率0.2，每个圆圈对应联合概率0.1

现在扩展这个分析，利用假设检验的表示方法，并调用MAP准则最小化总体错误概率。在这种情况下的三种假设为

$$H_{-1}: S=-1 \tag{9.16}$$

$$H_0: S=0 \tag{9.17}$$

$$H_1: S=+1 \tag{9.18}$$

给定$R=r$的条件下，利用MAP准则可以确定这三种假设下的条件概率，并选出对应于最大条件概率(或后验概率)的假设。例如，若$P(H_{-1}|R=r)$大于$P(H_0|R=r)$和$P(H_1|R=r)$时，则$R=r$时的最佳判决是‘H_{-1}’，相当于$\hat{H}=H_{-1}$。这种方法是式(9.7)对当前这个三

元假设例子的一个扩展。

349

利用贝叶斯准则也可以实现前面式(9.8)描述的 MAP 准则，将 $P(H_i|R=r)$ 表示为

$$P(H_i|R=r)=\frac{P(S=i)P(R=r|S=i)}{P(R=r)},\quad i=0,+1,-1 \tag{9.19}$$

为了比较给定 r 条件下的后验概率，这里的概率 $P(R=r)$ 可以看作每个表达式的公共比例因子，因此仅比较 $i=0$，$+1$，-1 时的 $P(S=i)P(R=r|S=i)$，就足以选出三项中概率最大项所对应的假设 H_i。这是式(9.10)应用于三元假设例子的扩展。

对于这个具体例子，既然图 9.5 已经给出了联合概率，那么很容易得到

$$P(S=i)P(R=r|S=i)=P(R=r,S=i),\quad i=0,+1,-1 \tag{9.20}$$

这样，错误概率就可以通过下列判决准则达到最小：

$$\text{若 } r=+1 \text{ 判为 } S=1 \tag{9.21}$$

$$r=0 \text{ 判为 } S=0 \tag{9.22}$$

$$r=-1 \text{ 判为 } S=-1 \tag{9.23}$$

9.2.3 编码数字通信中的假设检验

本章先前关于 PAM 的讨论主要考虑了单个接收脉冲的二元假设检验，其两个幅值分别表示为 0 和 1。在现代数字通信系统中，传送的消息采用了大量的字母符号，且每个符号都编码成了 0 和 1 的二进制序列。因此，除了判决每一个接收到的脉冲代表传输的是 0 还是 1 外，还需要进一步解码这样的比特串，用以对传输的符号做最佳判断。也许，更进一步的处理就是对组成整个传输消息的符号序列做出判断。原则上，最好是获得所有的原始量测信息，然后对整个传输符号序列进行最佳判决，但是这将是一项非常复杂的任务，涉及更多的假设和量测值。因此，实际上这个任务通常被拆分为几个阶段，首先是单个脉冲级别的局部最佳判决来解码 0、1 序列，然后进一步在符号级别进行译码判决，更进一步的就是在符号序列级别做出判决。

接下来的例子将讨论第二个译码阶段的判决过程。这个例子涉及接收机端四个可能符号的判决，每个符号均由 0、1 编码的码字表示，由发射机通过信道传输。这个例子所导出的最小错误概率判决准则的方式与之前的推导稍有差异，但结果仍然用的是 MAP 准则，也体现了式(9.7)和式(9.10)在本例中的恰当扩展。

350

例 9.3 最小错误概率的符号检测

考虑图 9.6 中的系统。假定发射机随机地在四个可能发送的符号 A、B、C 和 D 中选择发送。符号被选中的概率分别记为 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$ 和 $P(D)$。无论发射机选择什么符号，现都需要适当编码，以便在二进制信道中传输。编码中加入一些冗余可以为接收机的检错和纠错提供依据，以抵抗信道噪声引起的传输比特错误。接下来编码后的信号将被传送到接收机端。接收机对接收到的脉冲进行译码，并会在此过程中尝试着对信道噪声带来的错误进行纠正，然后判决传送的是哪个符号。

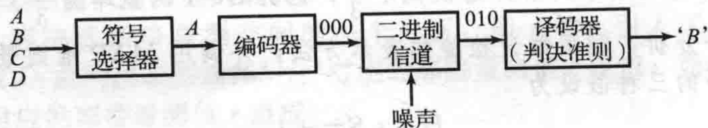


图 9.6 二进制信道上的通信

将此信道建模为二进制信道(binary channel)，接收来自发射机的 0、1 序列，并传送 0、1 序列到接收机。假定由于信道噪声的存在，存在发送为 1 接收到 0 和发送为 0 接收到 1 的概率 $p>0$。由于这两种类型错误发生的概率相同，因此该二进制信道称为对称的(symmetric)。非对称的情形也是容易处理的，只是增加了一些符号表示的负担。在该信

道的定义中，隐含地假定了它是非记忆的，也就是说，任何特定传输间隙的信道特性独立于在其他传输间隙所传输的信息。同时信道也假定为时不变的。

给定这样一个信道，发射机需要将选中的发送符号编码为二进制的形式。假定发射机用3位二进制数或比特对每个符号进行编码，如下所示：

$$A:000,\quad B:011,\quad C:101,\quad D:110 \tag{9.24}$$

因为信道引入了非零的比特错误概率，那么对于任何一个发送字符，接收序列都可能为下列任意的3比特二进制数：

$$\begin{aligned}&R_0=000,\quad R_1=001,\quad R_2=010,\quad R_3=011,\\&R_4=100,\quad R_5=101,\quad R_6=110,\quad R_7=111\end{aligned} \tag{9.25}$$

采用3个比特位，而不是满足四个符号通信的2个比特位，其所引起的冗余主要是为对抗信道噪声提供保护。值得注意的是，对于这组特定的3比特位编码，接收机可以将单个的比特位错误识别为误码，因为这将产生一个无用的码字。两个比特位出错的可能性比单个比特位出错小(典型情形 $p<0.5$)，将会把任何一个有效的码字转变为另一个有效的码字，这将导致接收机漏判这个错误。

351

单个符号经信道传输得到的样本空间可参考表9.1，表中列出了每种可能的发送符号和接收序列组合的概率。例如，A 列第$(j+1)$行的 $P(A, R_j)$ 代表发送 A 接收 R_j 的概率，B、C、D 列也类似。实际上计算这个概率最简单的方法是意识到 $P(A, R_j)=P(R_j|A)P(A)$，即根据信道的特性可以计算出 $P(R_j|A)$，同时由发射机端的信息源可以获得先验概率 $P(A)$。R_0 情形下的相应计算已在表中列出。

对每一个可能的接收序列 R_j，接收机端的判决准则均要在四个可能的符号或假设 A、B、C、D 中选出一个。因而任何这样的判决准则可以在表9.1中表示出来，从每一行中选择一项，也仅此一项。例如，某个特定的判决准则可能认为每当接收到 R_4 时发送信号对应为 D，这在表中 R_4 行 D 列对应项上加框说明了这一点。因此，与这种形式的表格相关联的每一个可能的判决准则在每一行都恰好对应一个框住的项。对于一个给定的判决准则，判决正确的概率就是所有框中的项的概率总和，因为这个总和是判决准则对所传输的相同符号做出判决的总体概率。因此，错误概率 P_e 就是1减去判断正确的概率。

由此看来，要确定最小错误概率或最大正确概率的判决准则，需在表中每一行选择框中的最大值项。如果有不止一个输入具有最大值，可以在其中任意选择，P_e 不会因为选择的不同而受影响。对于表9.1中的 R_j 行，根据最佳判决准则，选择的符号应使下列表达式的值最大：

$$P(\text{符号},R_j)=P(R_j\mid\text{符号})P(\text{符号}) \tag{9.26a}$$

$$=P(\text{符号}\mid R_j)P(R_j) \tag{9.26b}$$

表9.1 发送符号和接收二进制序列的联合概率

	$A:000$	$B:011$	$C:101$	$D:110$
$R_0=000$	$P(A, R_0)$ $=P(R_0\mid A)P(A)$ $=(1-p)^3P(A)$	$P(B, R_0)$ $=P(R_0\mid B)P(B)$ $=p^2(1-p)P(B)$	$P(C, R_0)$ $=P(R_0\mid C)P(C)$ $=p^2(1-p)P(C)$	$P(D, R_0)$ $=P(R_0\mid D)P(D)$ $=p^2(1-p)P(D)$
$R_1=001$				
$R_2=010$				
$R_3=011$				
$R_4=100$	$P(A, R_4)$	$P(B, R_4)$	$P(C, R_4)$	$\boxed{P(D, R_4)}$
$R_5=101$				
$R_6=110$				
$R_7=111$				

表9.2示出了一些所需计算的例子，其中参数的值在表格标题中已给出，计算是根据式(9.26a)右边得到的。

352

表9.2 最佳(MAP)判决准则示例，其中 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{8}$，$P(D)=\frac{1}{8}$，$P=\frac{1}{4}$

	000 A	011 B	101 C	110 D	判决
R_0 000					
R_1 001					
R_2 010	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{8}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	‘A’
R_3 011					
R_4 100					
R_5 101					
R_6 110	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}\frac{1}{8}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{8}$	‘D’
R_7 111					

式(9.26a)的右边直观地说明了最佳判决准则做了些什么。既然要通过沿着表中的行找到最大的项，而对于给定的R_j，在式(9.26b)中出现的$P(R_j)$沿着行的值都相同，因此需要比较的就仅是后验概率P(符号$|R_j$)，也就是给定条件下不同符号的概率。这又是MAP判决准则，只是和之前的导出方式有一点不同。◀

9.3 二元假设检验

这部分内容将关注二元假设检验，阐述各种相关联的概念，提供更为详细的理解。最根本的任务是利用随机变量R的量测值r在两个假设H_0和H_1中做出判决，它们的先验概率分别为p_0和$1-p_0$。

353

9.3.1 虚警、漏警和检测

用于进行二元假设检验判决准则的样本空间由以下四个相互排斥且穷尽的可能性样本组成：H_i为真，判为‘H_j’，i，$j=1$，2。对于这四个可能的结果，其中(H_0，‘H_1’)和(H_1，‘H_0’)代表错判。因此，基于量测随机变量所有可能取值的平均，错误概率P_e是

$$P_e = P(H_0,‘H_1’)+P(H_1,‘H_0’) = p_0P(‘H_1’|H_0)+p_1P(‘H_0’|H_1) \quad (9.27)$$

条件概率$P(‘H_1’|H_0)$称为虚警(false alarm)条件概率，记为P_{FA}。条件概率$P(‘H_0’|H_1)$称为漏警(miss alarm)条件概率，记为P_M。通常在使用中省略条件这个词，不过重要的是应该记住虚警概率和漏警概率均是按条件概率来定义的，而且也作用于不同的事件上。

上述术语是从雷达系统衍生而来的，H_1代表目标存在，H_0代表目标不存在。当目标判定为存在而实际不存在时，发生虚警；当目标判定为不存在而实际存在时，发生漏警。

同时还可以得到检测(detection)条件概率，即

$$P_D = P(\text{'}H_1\text{'} \mid H_1) \tag{9.28}$$

在雷达系统中，这是指目标判定为存在而目标确实存在的概率。与 P_{FA} 与 P_M 一样，通常在使用中省略条件这个词，不过重要的是应该记住检测概率仍然是一个条件概率。

用 P_{FA} 和 P_M 来表示错误概率，则式(9.27)变为

$$P_e = p_0 P_{FA} + p_1 P_M \tag{9.29}$$

同时有

$$P(\text{'}H_0\text{'} \mid H_1) + P(\text{'}H_1\text{'} \mid H_1) = 1 \tag{9.30}$$

或

$$P_M = 1 - P_D \tag{9.31}$$

无论判决准则是什么，为了明确建立其与 P_{FA} 和 P_M 的关系，可以回顾一下量测空间中判决域的概念。在单个连续随机变量 R 量测基础之上的判决情形中，判决准则对应于选择实轴上落入判决区域 D_1 的点，当 R 的量测值 r 落在 D_1 中，判定'H_1'成立，当 r 落在 D_1 之外——这个区域记为 D_0——判定'H_0'成立。如图 9.7 所示，其中 D_1 的选择是任意的。典型的，每个判决域都是由实数轴上的区间组成的集合。可以直接把这个概念推广到有多个随机变量量测值的情形。

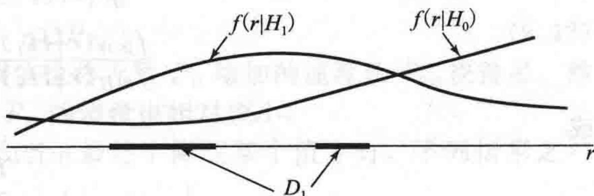


图 9.7　判决域。这里标注的 D_1 的选择是任意的，不是基于最小错误概率的最佳选择。

354

根据前面的定义，可以得出

$$P_{FA} = \int_{D_1} f_{R|H}(r \mid H_0)\,\mathrm{d}r \tag{9.32}$$

和

$$P_M = \int_{D_0} f_{R|H}(r \mid H_1)\,\mathrm{d}r \tag{9.33}$$

例 9.4　虚警、漏警、检测及错误的概率

回到例 9.1 中，利用那里推导出的 MAP 准则计算 P_{FA}、P_M、P_D 和 P_e。根据定义有

$$P_{FA} = P(\text{判定 } H_1\text{，给定 } H_0 \text{ 为真}) \tag{9.34}$$

$$P_M = P(\text{判定 } H_0\text{，给定 } H_1 \text{ 为真}) \tag{9.35}$$

$$P_D = P(\text{判定 } H_1\text{，给定 } H_1 \text{ 为真}) \tag{9.36}$$

可以得到

$$P_{FA} = \frac{3}{4},\quad P_M = 0,\quad P_D = 1$$

所以

$$P_e = p_0 P_{FA} + p_1 P_M = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$ ◀

尽管前面介绍的术语(例如，虚警、漏警和检测的概率)来自于雷达检测系统，但在其他二元假设检验的系统中常常也有对应于这些概念的特定术语。例如，在医学文献中，临床结果的诊断也通常以假设检验的框架来理解和描述，类似于这里通信和信号检测的问题。在医学中，假设 H_0 表示一种医学疾病没有被诊断出，H_1 则表示已被诊断出。这里的任务就是将临床检验的结果建模成随机变量 R，在获得量测值 r 后在这些假设中做出判决。尽管当前的术语略有不同，但仍然可根据应用意图来理解，如下列所描述的：

355

- P_D 是临床检验的敏感性。

- P_{FA}是假阳性的概率。
- $1-P_{FA}$是临床检验的特异性。
- P_M 是假阴性的概率。
- $P(H_1)$是检验目标疾病的患病概率。
- $P(H_1|'H_1')$是检验中阳性预测值的概率，$P(H_0|'H_0')$是阴性预测值的概率。

利用贝叶斯法则和上面的术语可以轻松推测出，如果目标疾病的患病率很低，那么临床检验中的阳性预测值也会非常小，即使该检验是十分灵敏和明确的。

9.3.2 似然比检验

式(9.10)中的最小 P_e 判决准则的另一种书写形式也经常用到。重新整理该表达式可以得到下列等价的判决准则：

$$\frac{f_{R|H}(r|H_1)}{f_{R|H}(r|H_0)} \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \frac{p_0}{p_1} \tag{9.37}$$

或

$$\Lambda(r) \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \eta \tag{9.38}$$

这里可以将 $f_{R|H}(r|H_i)$理解为在假设 H_i 条件下，度量获得量测值 r 的可能性，那么比值 $\Lambda(r)$就称为似然比(likelihood ratio)。上述检验式中将似然比和一个阈值 η 做比较。当 H_0 的先验概率 p_0越大时，阈值 η 也越大，相应地，为了将检验判定为 H_1，那么似然比也就需要更大。

将判决准则重新写成关于似然比的阈值检验形式是非常有用的，因为其他一些二元假设检验问题——判决准则不再限于最小化的 P_e——通常生成的判决准则也可以表示成似然比检验的形式。唯一的区别就是(非负的)阈值 η 的选择在这些其他检验表达形式中有所不同。下一小节将讨论这些其他检验表达形式中的一种，即纽曼-皮尔逊(Neyman-Pearson)方法。本章的最后一节会再介绍一种表示法，其目的是最大限度地减小代价期望，而代价期望将再次导出一个似然比检验。

356

9.3.3 纽曼-皮尔逊判决准则和接收者操作特性

在很多情况下难以利用最小 P_e 的判决准则，这是因为这种判决准则依赖于先验概率 p_0 和 p_1，而它们可能很难确定。一种有用的替代方法由纽曼和皮尔逊提出，即最大化检测条件概率 P_D，同时保持虚警条件概率 P_{FA}低于某个指定的容限水平。条件概率由不同假设下的量测模型和判决准则所决定，但是不再由控制假设选择的先验概率决定。这个依据 P_D 和 P_{FA}的假设检验问题推导的纽曼-皮尔逊表达式生成的判决准则也涉及似然比和阈值的比较。但是阈值的选取与最小错误概率的情形有所不同。具体方法会在接下来的内容中详细推导，其中假设量测参量 R 是一个连续的随机变量，这将贯穿本节始终。

首先将 P_D 和 P_{FA}与定义判决准则的判决域相关联。在此重写式(9.32)，展示出 P_{FA}与判决域的关系：

$$P_{FA} = P('H_1'|H_0) = \int_{D_1} f_{R|H}(r|H_0)\,dr \tag{9.39}$$

类似的积分可以定义 P_D，即

$$P_D = P('H_1'|H_1) = \int_{D_1} f_{R|H}(r|H_1)\,dr \tag{9.40}$$

两个积分区域均为判决域 D_1，并且被积函数均非负。这样，增大 P_D 则需要通过扩展更多的实轴区间(相对应的是减少 D_0 区域)来增大 D_1 的区域。然而，增大区域 D_1 仅允许 P_{FA}

保持不变或增大，不能减小。因此，这里的目标是尽量将区域 D_1 中的 r 值贡献到定义 P_D 的积分式中，但是尽量少地影响定义 P_{FA} 的积分式。即将看到，此目标可以通过选择判决域 D_1 实现，以使其包含的量测值 r 的似然比 $\Lambda(r)$ 大于指定阈值 η，因此

$$\Lambda(r)=\frac{f_{R|H}(r|H_1)}{f_{R|H}(r|H_0)}\underset{`H_0'}{\overset{`H_1'}{\gtrless}}\eta \tag{9.41}$$

357

在推导出上述准则之前，考虑如何让 η 值从 ∞ 开始并稳步下降是很有帮助的。当 $\eta=\infty$ 时，判决结果始终为'H_0'，因此判决域 D_1 为空，相应地，$P_D=0$，$P_{FA}=0$。一旦 η 下降到 $\Lambda(r)$ 可取的最大值之下时，对于某些 r 值，判决结果为'H_1'，因此这时的判决域 D_1 非零。如果在某些 η_0 的邻近区域极小地降低 η 的值，引起 P_D 的值增加 ΔP_D，P_{FA} 的值增加 ΔP_{FA}，则由式(9.32)、式(9.40)、式(9.41)可得

$$\Delta P_D=\eta_0\Delta P_{FA} \tag{9.42}$$

因此，对于较大的 η_0 值，即使极小地降低阈值也将导致 P_D 增加的速度比 P_{FA} 快得多。然而对于较小的 η_0 而言，相比于 P_{FA} 的增加，P_D 的增量也相对较小。

如果随着 η 的下降，P_{FA} 连续增加，那么当 η 最终下降到某个值 $\bar{\eta}$ 时，下列情形之一将会发生：

- 当 $P_D<1$ 时，P_{FA} 将达到其确定上界；或者
- 在 P_{FA} 还没有达到其上界前，P_D 的值已达到1；或者
- P_{FA} 达到其上界的同时，P_D 的值达到1。

这里的值 $\bar{\eta}$ 就是纽曼-皮尔逊检测中用到的阈值。

存在一种可能的情况是，当 η 一直低于 $\bar{\eta}$ 时，且 $P_D<1$，P_{FA} 的值将从低于它确定上界的一个值不连续地跳到一个高于它上界的值。这种情形下的结果就是，关于阈值 $\bar{\eta}$ 的一个随机化的判决准则允许 P_{FA} 达到它的确定上界，从而使 P_D 最大。这个随机化的准则在 $\Lambda(r)>\bar{\eta}$ 时以概率 α 选择'H_1'，否则就选'H_0'。选择概率 α 使得 P_{FA} 等于其确定上界。习题9.20就涉及这样一个随机化判决准则。

如图9.8所示，接下来的讨论将更加详细地阐述为什么纽曼-皮尔逊准则产生的是一个似然比检验。如果判决域 D_1 对于纽曼-皮尔逊准则来说是最佳的，那么，任何能够保持 P_{FA} 不变的 D_1 中的改变都不会使得 P_D 有所改善。因此，假设在最佳域 D_1 中的点 r 处的一个无穷小的区间 dr 变成了 D_0 的一部分。为了保持 P_{FA} 不变，在最佳域 D_0 中任意点 r' 处存在的无穷小的区间 dr' 必然变成 D_1 的一部分。

358

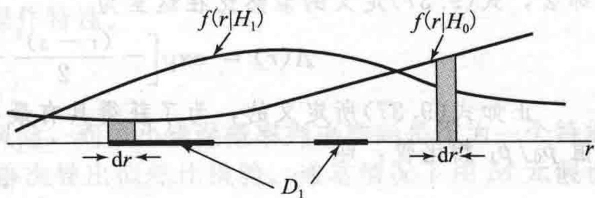


图9.8 依据纽曼-皮尔逊准则推导似然比检验的结构示意图

如果要求 P_{FA} 不变，那么需要附加条件：

$$f_{R|H}(r'|H_0)dr'=f_{R|H}(r|H_0)dr \tag{9.43}$$

同时要求新的 P_D 值不能大于原来的值，这意味着

$$f_{R|H}(r'|H_1)dr'\leqslant f_{R|H}(r|H_1)dr \tag{9.44}$$

结合式(9.43)和式(9.44)可得

$$\Lambda(r')\leqslant\Lambda(r) \tag{9.45}$$

式(9.45)表明在 D_1 中的似然比不能比 D_0 中的似然比小。因此，可以认为纽曼-皮尔逊表达式的最优解实际上建立在一个似然比的阈值检验上，其中阈值 η 的选取要确保获得最大可能 P_D 的同时，还要保证 P_{FA} 不会大于之前确定的上界。

接收者操作特性

在纽曼-皮尔逊检验中，需要考虑选用哪个数值作为 P_{FA} 的上界，通常比较有用的方法是观察参数 η 从 0 变到∞时 P_D 作为 P_{FA} 函数所得的曲线。这也称为接收者操作特性(Receiver Operating Characteristic，ROC)。更广泛地，当判决准则中的一些参数发生变化时，ROC 可以用来描述 P_D 相对于 P_{FA} 的变化特性。例如，当修改给定检验中的可变参量使得 P_{FA} 略微增大时，ROC 可以用来验证这种情形下是否会导致 P_D 显著增大。ROC 还可以用来比较不同的检验。

例 9.5 高斯噪声中的信号检测和接收者操作特性

考虑这样一个场景，一个雷达脉冲从地面站发射出去。若一架飞机恰好在雷达信号的传播路径上，则有一反射脉冲返回到雷达地面站。如果没有飞机出现，则接收信号仅由噪声组成；若有飞机出现，则接收信号就为噪声加反射脉冲。对接收信号的处理将得到一个数，这个数被建模成随机变量 R。若飞机没有出现，则 $R=W$，其中 W 表示仅处理噪声得到的随机变量。若飞机出现，则 $R=s+W$，其中常量 s 表示反射回来的脉冲的处理结果，这里假定 s 的值已知。因此，可以得到以下两个假设：

$$H_0: R=W \tag{9.46}$$

$$H_1: R=s+W \tag{9.47}$$

假定加性噪声项 W 是零均值单位方差的高斯噪声，即

$$f_W(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2} \tag{9.48}$$

359

所以

$$f_{R|H}(r|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2} \tag{9.49}$$

$$f_{R|H}(r|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(r-s)^2/2} \tag{9.50}$$

那么，式(9.37)定义的似然比在这里为

$$\Lambda(r)=\exp\left[-\frac{(r-s)^2}{2}+\frac{r^2}{2}\right]=\exp\left[sr-\frac{s^2}{2}\right] \tag{9.51}$$

正如式(9.37)所定义的，为了获得具有最小错误概率的检测，判决准则将似然比与阈值 p_0/p_1 相比较，即

$$\exp\left[sr-\frac{s^2}{2}\right]\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}\eta=\frac{p_0}{p_1} \tag{9.52}$$

比较有趣也很重要的是，在这种情况下，基于似然比的阈值检验可以重新写成基于接收值 r 的阈值检验。特别地，式(9.52)可以等价地表示成：

$$\left[sr-\frac{s^2}{2}\right]\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}=\ln\eta \tag{9.53}$$

或者，若 $s>0$，

$$r\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}\frac{1}{s}\left[\frac{s^2}{2}+\ln\eta\right]=\gamma \tag{9.54}$$

这里 γ 表示关于 r 的阈值。(若 $s<0$，则式(9.54)的不等号反向。)例如，若两个假设都有相同的先验概率，即 $p_0=p_1$，那么 $\ln\eta=0$，当 $s>0$ 时具有最小错误概率的判决准则变为

$$r \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \frac{s}{2} = \gamma \tag{9.55}$$

这种情形在图9.9中示出。

接收者操作特性显示了η在$0\sim\infty$变化，或等效为γ在$-\infty\sim\infty$变化时，P_D相对P_{FA}的变化。在这个问题中，当$s>0$时，对于指定的γ，有

$$P_{FA} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-r^2/2}\,dr \tag{9.56}$$

和

$$P_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-(r-s)^2/2}\,dr \tag{9.57}$$

360

当γ在$-\infty\sim\infty$变化时得到的ROC如图9.10中所示。其中，$P_{FA}=0=P_D$的点对应于$\gamma=\infty$；$P_{FA}=1=P_D$的点对应于$\gamma=-\infty$。

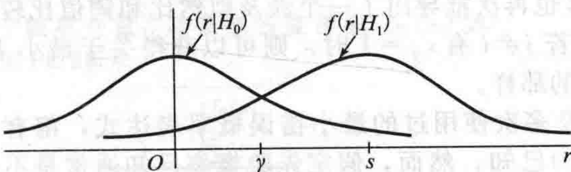


图9.9 基于量测值r的阈值γ

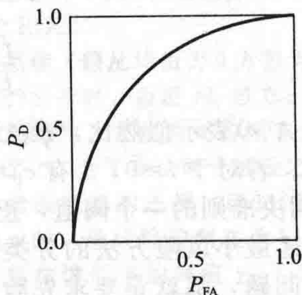


图9.10 接收者操作特性

在比例9.5中高斯噪声情形更一般化的环境中，基于似然比的阈值检验不能简单地转化为对量测值r的阈值检验。尽管如此，仍然可以采用基于r的一个简单的阈值检验作为判决准则，然后再生成和评估联合接收者操作特性。

9.4 最小风险判决

本节将简要描述的判决准则称为最小风险，而最小错误概率判决准则是作为一个特例包含于其中，同时在二元假设情形下也会再次导出似然比检验。通常情况下用M元假设来描述。

令随机变量R的可用量测值为r(如果有多个随机变量的量测值，则用同样的方法处理)。假定存在一个代价因子C_{ij}，它与每个正确假设H_j和判决'H_i'($0\leqslant i, j\leqslant M-1$)的组合相关联，并反映这个组合模型和判决结果所引起的代价。因此，这里的目标就是在给定量测信息的情况下，选择的判决具有最小代价期望，或最小"风险"。

361

在$R=r$的条件下，判为'H_i'的代价期望由下式给出：

$$E['H_i' \mid R=r\text{的代价}] = \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij} P(H_j \mid R=r) \tag{9.58}$$

比较所有i的条件代价期望，再判决出具有最小条件代价期望的假设。对每个可能的r都做这一指定的最佳判决，即可得到最小化总体代价期望或风险的判决准则。

在这种情形下，假设检验和第8章考虑的连续随机变量的估计问题紧密联系在了一起。值得注意的是，第8章中许多这样的估计问题都能够通过最小化代价期望函数得以确切解决。对一个连续随机变量的估计就类似于对一个连续的数值化的特定假设完成假设检验，而不仅仅是一般的M元假设，还需要通过代价函数将实际假设和判决假设间的距离用一些数值化的量测值反映出来。

注意到，若对所有 i 有 $c_{ii}=0$，同时若当 $j\neq i$ 时，$c_{ij}=1$，则所有错误发生概率相等，这时式(9.58)的条件代价期望变为

$$E[\text{‘}H_i\text{’}|R=r\text{ 的代价}]=\sum_{j\neq i}P(H_j|r)=1-P(H_i|r) \tag{9.59}$$

因此，这里的条件代价期望恰好是在给定 $R=r$ 的条件下判决为‘H_i’时的条件错误概率。等式的右边表明要使条件错误概率最小，应该选择具有最大条件概率的假设。换句话说，当选择有这样的代价时，风险(当期望遍历所有可能的 r 值时)恰好为错误概率 P_e，而最小化这个准则的最佳判决准则再次是 MAP 准则。

利用贝叶斯法则重写式(9.58)中的 $P(H_j|R=r)$，同时注意到 $f_R(r)$——假定为正——在比较中涉及的所有这些参量都是很常见的，因此只需要将下列更加直观且易于实现的等价表达式最小化，即可完成假设的选择：

$$\sum_{j=0}^{M-1}c_{ij}f_{R|H}(r|H_j)P(H_j) \tag{9.60}$$

在二元假设的情况下，假定 $c_{01}>c_{11}$，容易看出基于式(9.60)的判决准则可以重新写成：

$$\Lambda(r)=\frac{f_{R|H}(r|H_1)}{f_{R|H}(r|H_0)}\underset{\text{‘}H_0\text{’}}{\overset{\text{‘}H_1\text{’}}{\gtrless}}\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{P(H_1)(c_{01}-c_{11})}=\eta \tag{9.61}$$

这里的 $\Lambda(r)$表示似然比，η 表示阈值。这也再次推导出了一个涉及似然比和阈值比较的判决准则。若对于 $i=0$，1 有 $c_{ii}=0$，同时若 $j\neq i$ 有 $c_{ij}=1$ 时，则可以获得关于最小 P_e 的 MAP 判决准则的一个阈值，正如所期望的那样。

362

上述最小风险方法的分类研究，以及多次使用过的最小错误概率表达式，都有一个潜在的问题，那就是要求先验概率 $P(H_i)$已知。然而，假定先验概率已知通常是不容易实现的，因此需要考虑可替代的判决准则。在这些可替代的准则中最重要的就是先前探讨过的纽曼-皮尔逊方法，其判决是基于条件概率 P_D 和 P_{FA}的，避免了对假设先验概率的需求。

9.5 延伸阅读

第 7 章结尾给出的延伸阅读中的大部分文献都包含了假设检验的知识素材，除此之外，读者还可参阅[Kay3][He2][He3]。[DeG][Dek][Rce]和[Wal]从统计学的角度对假设检验做了很好的介绍，而在实际应用领域如医学统计中所遇到的挑战在[Bl1][Bl2]中有清楚的描述。一般统计学相关的文献很少提到信号与系统的概念。随着人工智能和计算机或“机械”视觉的发展，假设检验在数据的分类和模式识别任务中占据了中心位置。这些任务构成了许多机器学习的基础，可参阅[Abu][Alp][Alp][Kul]和[Mur]。

363

习题

基础习题

9.1 考虑一个二元假设检验问题，观察到的随机变量 X 具有以下条件 PDF，如图 P9.1 所示：

$$f_{X|H}(x|H_0)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

和

$$f_{X|H}(x|H_1)=\frac{2}{\pi(x^2+4)}$$

假定两个假设 H_0 和 H_1 分别具有先验概率 $P(H_0)=0.4$ 和 $P(H_1)=0.6$。现在感兴趣的是设计一个判决准则来选择‘H_0’或者‘H_1’，并分析这个准则的性能。

(a) 找出具有最小错误概率的判决准则，也就是说，这个判决准则要使 $P(H_0,\text{‘}H_1\text{’})+P(H_1,\text{‘}H_0\text{’})$达到最小。尽量简化你的答案。

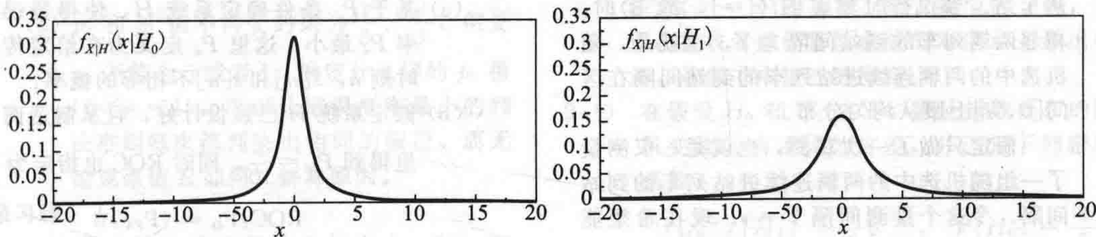


图 P9.1

(b) 在图中的条件概率密度曲线上适当标注出阴影区域，表明你如何计算以下概率：

(i) (条件)虚警概率 P_{FA}。

(ii) (条件)漏警概率 P_M。

9.2 考虑下列假设检验问题。在两个假设 H_0 和 H_1 之下，观测变量 Y 为

$$H_0: Y = s_0 + N$$
$$H_1: Y = s_1 + N$$

这里 s_0 和 s_1 均为已知的常量，同时 N 是一个随机变量，其概率密度函数 $f_N(\alpha)$ 如图 P9.2所示。

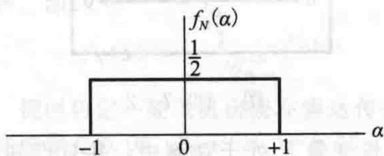


图 P9.2

作为一个提醒，以下是与判决准则相关的一些定义：

(i) P_0 和 P_1 分别是 H_0 和 H_1 的先验概率。

(ii) P_{FA}代表 $P(‘H_1’ | H_0)$。

(iii) P_M 代表 $P(‘H_0’ | H_1)$。

(iv) P_D 代表 $P(‘H_1’ | H_1)$。

(v) $P(\text{error}) = P(H_0, ‘H_1’) + P(H_1, ‘H_0’)$，也就是说，这个概率表示判决假设和真实假设不符的概率。

(a) 每个判决准则的 P_{FA} 与 P_D 的和都为 1 吗？简要地证明你的答案。

(b) 假定 $P_0 = \frac{1}{4}$，且对于某个特定的判决准则有 $P_{FA} = \frac{1}{4}$ 和 $P_D = \frac{3}{4}$。求检测器判决为 H_1 的概率 $P(‘H_1’)$。

(c) 假定有以下值：

$$P_0 = \frac{1}{4}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = 1 \tag{9.62}$$

确定观测值 y 的范围，使得判决‘H_1’的错误概率最小。

(d) 假定有以下值：

$$s_0 = -\frac{1}{2}, \quad s_1 = \frac{1}{2} \tag{9.63}$$

判决准则为

$$y \underset{‘H_0’}{\overset{‘H_1’}{\gtrless}} \gamma$$

画出当 γ 在 $-\infty \sim \infty$ 变化时，P_D 相对于 P_{FA} 的 ROC。

9.3 当给定量测值 x 服从均值为 0 方差为 4 的标准(即高斯)分布时，假设 H_0 成立；当此量测值服从均值为 1 方差为 4 的标准分布时，假设 H_1 成立。为了在这两个假设之间做出具有最小错误概率的选择，已知当 x 超过某个阈值 γ 时，最佳检验判决为‘H_1’。确定在下面每种情形下的阈值 γ：(i)条件虚警概率 $P_{FA} = 0.5$；(ii)条件漏警概率 $P_M = 0.5$。

9.4 考虑接收机观测随机变量 R 的一个二元假设检验问题。基于观察值接收机将在两个假设 H_0 和 H_1 中，选择一个判决为真。接收机可以调谐到接收者操作特性曲线上的任何点运行，且已知 $P_D = \sqrt{P_{FA}}$，其中 $P_D = P(‘H_1’ | H_1)$和 $P_{FA} = P(‘H_1’ | H_0)$。(提示：接收机判决的错误概率 P_e 定义为当 H_1 为真时判定为‘H_0’，或者当 H_0 为真时判定为‘H_1’。)

(a) 假定假设 H_0 为真的先验概率 $P(H_0) = \frac{3}{4}$，同时接收机调谐在 ROC 曲线上的点为 $P_D = \frac{1}{2}$。确定这一点对应的 P_{FA} 和错误概率 P_e。

(b) 对于(a)中给定的 H_0 的先验概率(即 $P(H_0) = \frac{3}{4}$)，在 ROC 曲线上有一个运行点可以使总体错误概率 P_e 最小。确定接收机运行在该点时 P_D。

(c) 现令 $P(H_0) = \frac{1}{4}$。确定 ROC 曲线上的 P_D 和 P_{FA}，以及相应的最小化 P_e。

9.5 在一些特别的日子，进站的地铁列车按照三个等概率时刻表 H_1、H_2 和 H_3 中的一个到

达车站。当执行时刻表 $H_i(i=1, 2, 3)$时，相邻两辆列车的到站间隔为 Y，也就是，随机选中的两辆连续进站列车的到站间隔在区间$[0, i]$上服从均匀分布。

假定只做了一次观测，也就是，仅测量了一组随机选中的两辆连续进站列车的到站间隔。令这个量测间隔 $Y=y$。现在希望能判断出当前的哪个时刻表是有效的。

(a) 基于这个观测值，确定具有最小错误概率的判决准则。

(b) 利用你在(a)中找到的判决准则，求相应的错误概率。

9.6　一名学生正在参加一门考试，而她没学过(假设 H_0)和她学过(假设 H_1)的概率是相同的。

考卷包括两个问题 a 和 b。如果这个学生正确回答了问题 a(或问题 b)，则说事件 A(或事件 B)发生了，否则就说事件 $\overline{A}$(或事件 $\overline{B}$)发生了。如果该学生没有学过，则假定该学生回答 a 题的表现独立于她回答 b 题的表现；如果这名学生学过，假定同样成立。

假定 $P(A|H_1)=0.8$，$P(B|H_1)=0.6$，$P(A|H_0)=0.5$，$P(B|H_0)=0.2$。

(a) 对于每种可能出现的考试结果，也就是 A 或者 $\overline{A}$ 与 B 或者 $\overline{B}$ 可能的每种组合，找到具有最小错误概率的判决准则。

(b) 用你在(a)中找到的判决准则，求该学生在确实学过的情况下(H_1)判定为没有学过('H_0')的条件概率。

9.7　考虑一个数字通信系统，已知一独立同分布的 0、1 比特流 $s[n]$通过一个有损无记忆的信道传输。P_0 记为发送 0 的概率，P_1 记为发送 1 的概率，且有 $P_1=1-P_0$。发送 1 而接收到 0 的概率为$\frac{1}{4}$，发送 0 而接收到 1 的概率也为$\frac{1}{4}$。接下来将接收到的信号 $r[n]$送入一个无记忆、可能非线性的系统 H 中进行处理，以便从 $r[n]$中获得 $s[n]$的估计 $\hat{s}[n]$。整个系统如图 P9.7-1 所以。

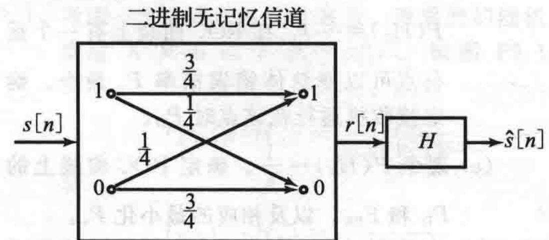


图　P9.7-1

(a) 基于 P_0 条件确定系统 H，使得错误概率 P_e 最小。这里 P_e 定义为在给定传输时刻 n，$\hat{s}[n]$和 $s[n]$不相等的概率。

(b) 假定系统 H 已经设计好，且从制造商那里得到 $P_M=\frac{1}{10}$，同时 ROC 也指定为

$$\text{ROC}: P_D = (P_{FA})^{\frac{1}{10}}$$

这里，

P_D = 概率(判定接收到的为 1 | 发送 1)

P_{FA} = 概率(判定接收到的为 1 | 发送 0)

P_M = 概率(判定接收到的为 0 | 发送 1)

图 P9.7-1 中的整个系统可以重新表示为一个新的二进制无记忆信道，如图 P9.7-2所示。确定新的概率值 P_a、P_b、P_c 和 P_d。

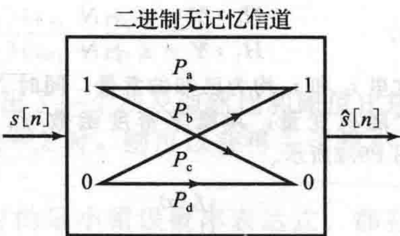


图　P9.7-2

9.8　随机变量 R 处于观测中，并且已知其 PDF 为 $f_0(r)$的概率为 $p_0=\frac{1}{3}$，而其 PDF 为 $f_1(r)$的概率为 $p_1=(1-p_0)=\frac{2}{3}$，PDF 的具体定义如下：

$$f_0(r)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant r\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_1(r)=\frac{1}{2}e^{-|r|}$$

通过观测随机变量 R 的值，来判定当前潜在的 PDF 是 $f_0(r)$还是 $f_1(r)$。



仅对(a)和(b)，假定判决器遵循以下规则：

若 $|r|>\gamma$，判定为 $f_0(r)$

若 $|r|\leqslant\gamma$，判定为 $f_1(r)$

(a) 对于 $\gamma=\frac{1}{2}$，求错误概率。详细给出推导过程。

(b) 当 γ 从 0 到 ∞ 变化时，画出完全标记的此判决器的 ROC。详细给出推导过程。

(c) 设计判决器，从而使错误概率概率最小。详细给出推导过程。

(d) p_0 和 p_1 值不再受约束为$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$，但是 p_0 不能为0或者1。确定什么样的 p_0 值 ($0<p_0<1$)，可以让错误概率最小的判决准则每次都判决出相同的假设，而无论观察值 R 如何？解释原因。

高级习题

9.9 一个雷达脉冲从地面站发射出去。若一架飞机恰好在雷达信号的传播路径上，则有一反射脉冲返回到雷达地面站。假定如果有飞机出现，则接收信号由噪声和反射脉冲组成；如果没有飞机出现，则接收信号仅由噪声组成。将接收信号处理成一个可被建模成随机变量的数 R。如果有飞机出现，则有 $R=s+N$；如果没有飞机出现，则有 $R=N$。常量 $s>0$ 代表反射脉冲且它的值已知；随机变量 N 代表噪声。这样，可以得到以下两个假设：

$$H_1: R=s+N$$
$$H_0: R=N$$

假定加性噪声是零均值方差为 σ^2 的高斯噪声，即，

$$f_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

同时假定一架飞机出现在雷达传播路径上的概率是0.05，即 $P(H_1)=0.05$。

(a) 求飞机出现时 R 的 PDF，即 $f_{R|H_1}(r|H_1)$ 是多少？

(b) 求飞机不出现时 R 的 PDF，即 $f_{R|H_0}(r|H_0)$ 是多少？

(c) 假定采用一个错误概率最小的检测策略，其相应的判决准则是：

$$\Lambda(r)\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}\eta$$

这里，'H_i'表示"判定为 H_i"。确定似然比 $\Lambda(r)$ 和阈值 η。同时，当由该检测策略得到下列表达式时，求 r，并找出阈值 γ。

$$r\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}\gamma$$

(d) 标准 Q 函数定义如下，

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

求生成一个错误的概率。

(e) 回忆条件检测概率的定义 $P_{\mathrm{D}}=P('H_1'|H_1)$，以及虚警概率 $P_{\mathrm{FA}}=P('H_1'|H_0)$。

(i) 当 $P_{\mathrm{FA}}=1$，$P_{\mathrm{D}}=1$ 时，γ 为多少？

(ii) 当 $P_{\mathrm{FA}}=0$，$P_{\mathrm{D}}=0$ 时，γ 为多少？

(iii) 当 $P_{\mathrm{D}}=0.5$ 时，γ 为多少？

(iv) 当 $P_{\mathrm{FA}}=0.5$ 时，γ 为多少？

注意(i)～(iv)的答案，结合相应的 γ 值，允许在接收者操作特性曲线的对应点上做出标注，就像书中描述的那样。

9.10 在假设 H_0 和 H_1 之下，服从指数分布的随机变量 X 有不同的方差，并已知下列密度函数：

$$f_{X|H}(x|H_0)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad P(H_0)=\frac{3}{5}$$

$$f_{X|H}(x|H_1)=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{4}},\quad P(H_1)=\frac{2}{5}$$

(a) 在给定量测值 $X=x$ 的条件下，以最小错误概率准则在假设 H_0 和 H_1 中做出选择时，需要涉及绝对值 $|x|$ 和阈值 γ 的比较。写出判决准则的确切形式，并求出 γ。

(b) 利用同一坐标系画出两个概率密度函数(也就是将两个概率密度函数叠画在一幅图中)，然后利用(a)中推出的判决准则在图中指出和标明(条件)虚警概率 P_{FA} 和(条件)漏警概率 P_{M} 分别对应的区域。

(c) 如果有 $P_{\mathrm{FA}}=\alpha$ 和 $P_{\mathrm{M}}=\beta$，写出判决中出现一个错误的概率 P_{e} 的表达式。同时求出 $P(H_1|'H_1')$，即表示 H_1 确实成立的条件下判定为 H_1 的概率。

(d) 现假定先验概率为 $P(H_0)=p_0$ 和 $P(H_1)=1-p_0$，而不是前面部分考虑的具体值。那么，无论 x 的值如何变化，是否存在某个范围的 p_0 值让判决结果总为'H_1'？无论 x 的值如何变化，是否存在某个范围的 p_0 值让判决结果总为'H_0'？

9.11 考虑一个用来判断无线信道是否在进行隐蔽通信会话的系统。假设 H_1 表示这样的一个通话正在进行中，假设 H_0 则表示没有进行通话。判决将建立在天线对信道的单个标量量测值 R 的基础上。这个量测值是一个零均值的高斯随机变量，当通话在进行中时它的方差更大，具体定义如下：

$$H_0: f_{R|H}(x|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$H_1: f_{R|H}(x|H_1)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4}}$$

先验概率分别记为 $p_0=P(H_0)$ 和 $p_1=P(H_1)$。

(a) 求 p_0，使得最小错误概率的判决准则为

$$|r|\underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}}1$$

(b) 求常量 a_1、a_2、b_1、b_2 和 c，使得由(a)

中的判决准则求出的错误概率可以表示成如下形式：

$$P_e = a_1 Q(b_1) + a_2 Q(b_2) + c$$

这里Q函数的定义为

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(c) 判断下列命题是否正确。

"无论观测值 r 如何，当 $p_0>0$ 时，最佳判决准则有可能会一直判定为 H_1。"

如果你认为是错误的，请解释原因。如果你认为是正确的，请构建一个例子(即确定一个 $p_0>0$ 的值，使得具有最小错误概率的判决准则的判决一直为 H_1)。

9.12 假定 X 和 Y 是两个实的随机变量。可以观测到 $X=x$，但是却不知道 Y 的取值，希望能用最小错误概率准则判断 Y 是大于还是小于 x(可以假定 X 和 Y 的联合、条件以及边缘概率密度函数均是连续的，也就是，没有跳跃或冲激函数)。

(a) 当 X 与 Y 相互独立时，确定适当的判决准则(你应该发现你的答案中包含以下一个或多个与PDF相关的数值：(i)均值或期望；(ii)中值(累计分布函数取值为0.5时的点，也就是，中值以上的概率分布等于中值以下的概率分布)；(iii)模式(PDF取最大值的点))。

(b) 当 X 与 Y 不相互独立时，确定适当的判决准则。

9.13 考虑一个发送消息为 m_0(假设 H_1)或者发送消息为 m_1(假设 H_1)的发送机，其中这些假设发生的概率分别为 p_0 和 p_1。假定接收机观测值 $R=r$，这里的 R 具有下列条件统计特性：当 H_0 为真时，R 是一个均值为 s_0、方差为 σ_0^2 的高斯随机变量；当 H_1 为真时，R 是一个均值为 s_1、方差为 σ_1^2 的高斯随机变量。同时假定 $0<s_1<s_0$ 和 $0<\sigma_0^2<\sigma_1^2$。

(a) 证明对于本题的最小错误概率判决准则，可以简化为下列形式：

$$r^2 + ar \underset{\text{'}H_0\text{'}}{\overset{\text{'}H_1\text{'}}{\gtrless}} \gamma$$

并写出常量 a 和 γ 的表达式；

(b) 现假定采用一种简单的阈值判决准则

$$r \underset{\text{'}H_0\text{'}}{\overset{\text{'}H_1\text{'}}{\gtrless}} \xi$$

而不是最小错误概率准则。根据该阈值，并基于下列Q函数，写出接收机关于(条件)虚警概率 P_{FA} 和(条件)漏警概率 P_M 的表达式：

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

(c) 为(b)中的接收机选择 ξ 的值，使 $P_{FA}=P_M$。找出这个结果的错误概率，并写成基于Q函数的形式。

9.14 在本题中，你可以采用一个适当的计算机平台，利用蒙特卡洛仿真的方式，来获取一些关于信号检测中判决准则性能的经验感受，也就是，通过重复运行判决准则的随机试验并计算出相应的统计数据。

假定对接收信号进行一些处理后，获得了一个数字参量 R，根据一些信号检测过程中已有的模型，R 等于随机变量 X(X 等概率取 $\pm A$ 值)和随机变量 N 的和，即

$$H_1(x=+A): R=+A+N$$
$$H_0(x=-A): R=-A+N$$

(a) 利用 $\sigma=2$ 和 $A=2$，产生 N 的10000个样本值和 X 的10000个样本值。之后定义接收值

$$R = X + N$$

对应于10000次实验产生的数值结果。

(b) 画出 X 和 R 前50个点的图，并对两幅图做比较。

(c) 确定从 R 中恢复出 X 的最小错误概率判决准则。利用Q函数估计这个判决准则所对应的理论上的错误概率 P_e。

(d) 利用(c)中的判决准则，对你的数据集中的每一个 R，判决潜在的 X 值(即，$\pm A$)，并将判决结果以向量 $\hat{X}$ 的形式存储起来。

(e) 比较 X 和 $\hat{X}$。这个判决准则总共做了多少个错误的判决准则？通过将判决准则判决错误的点数除以判决的总点数，计算出经验错误概率 $\hat{P}_e$。

(f) 令 $\sigma=-2$ 和 $A=1$，重复步骤(a)~(e)。

(g) 适当改变一下参数，令 $P(X=+A)=0.75$ 而不是0.5，重复步骤(a)~(e)。

9.15 已知量测信号 $X[n]$，$n=1, 2$，它由下列两种假设之一产生：

$$H_{neg}: X[1]=-1+W[1]$$
$$\quad\quad X[2]=-s+W[2]$$
$$H_{pos}: X[1]=+1+W[1],$$
$$\quad\quad X[2]=+s+W[2]$$

这里 s 是某个已知的正数，并且在每种假设下，$W[1]$ 和 $W[2]$ 是均匀分布在区间[-2, 2]的独立同分布随机变量。现分别给出 $X[1]$ 和 $X[2]$ 的量测值 $x[1]$ 和 $x[2]$，需要在假设 H_{neg} 和 H_{pos} 之间做出判决。

(a) 一种处理量测值的 ad hoc 策略是将判决建立在量测值之和的基础之上：

$$r = x[1] + x[2]$$

为了分析建立在和值 r 上的判决准则，首先检测随机变量：

$$R = X[1] + X[2]$$

对于 $s=2$ 的情形，画出在每个假设之下 R 的条件概率密度(即 $f_{R|H}(r|H_{neg})$ 和 $f_{R|H}(r|H_{pos})$)完全标记的图。

(b) 继续沿用(a)中的参数设置，同时假定两个假设具有相同的先验概率，即 $P(H_{neg})=P(H_{pos})=\frac{1}{2}$。在已知 $R=r$ 的条件下，确定一个具有最小错误概率的判决准则，在 H_{neg} 和 H_{pos} 之间做出判决。同时计算这个判决准则对应的错误概率。

(c) 如果根据(b)中的判决准则判定为 H_{neg}，那么假设 H_{neg} 确实成立的概率为多少？也就是说，$P(H_{neg}|'H_{neg}')$ 为多少？

(d) 现在忘掉与量测值之和相关的工作，转而充分利用实际获得的两个量测值。相应地，仍在 $s=2$ 的情形下，首先画出或者充分描述条件概率：

$$f_{X[1],X[2]|H}(x[1],x[2]|H_{neg})$$

和

$$f_{X[1],X[2]|H}(x[1],x[2]|H_{pos})$$

并基于此确定一个判决准则，能够确实在两个假设中做出完美判决(即判决具有零错误概率)，而不管两个假设的先验概率是多少。

(e) 假定现在 $s=1$，再一次画出或者充分描述(d)中列出的两个条件概率密度。然后，在 $P(H_{neg})=\frac{1}{3}$ 和 $P(H_{pos})=\frac{2}{3}$ 时，根据已有知识 $X[1]=x[1]$ 和 $X[2]=x[2]$，确定一种判决准则，该准则在两假设之和之间做判决时具有最小错误概率。同时求判决为 H_{pos} 成立但实际是 H_{neg} 成立的条件概率。最后，求该准则对应的错误概率。

9.16 考虑一个二元假设检验问题，两个假设之下的数据的条件概率密度函数为：

$$H_0: f_{R|H}(r|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu_0)^2}{2}}$$

$$H_1: f_{R|H}(r|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2}}$$

假设的先验概率分别记为 $p_0=P(H_0)$ 和 $p_1=P(H_1)$。假定 $p_0=p_1=\frac{1}{2}$。同时已知贯穿本题的一个正值 $A>0$。

图 P9.16 示出了一组不同检测系统的 ROC 曲线。在 $\mu_0=0$ 和 $\mu_1=+A$ 的情况下，ROC 曲线实线上的点 X 表示在 H_0 和 H_1 之间做出判决时具有最小错误概率的检测器的检测概率(P_D)或速率和虚警概率(P_{FA})。

回答下面的问题并证明你的答案。

(a) 现在已知 $\mu_0=-A$(同时有 $\mu_1=+A$)，且先验概率依然相等。在给定的前提条件下，验证图 P9.16 中的点集(M, N, O, P)中对应于最小错误概率检测器的可能点。

(b) 现在已知 $\mu_0=0$ 和 $\mu_1=+A$，但是先验概率变为

$$p_0 = 0.38 \quad 和 \quad p_1 = 0.62$$

(c) 在给定的前提条件下，验证图 P9.16 中的点集(M, N, O, P)中对应于最小错误概率检测器的可能点。

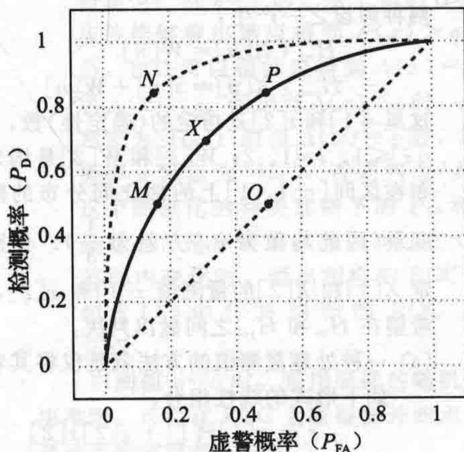


图　P9.16

扩展习题

9.17 假定基于一个量测随机变量 X 对假设 H_0 和 H_1 做出判决。给定 H_0 和 H_1 条件下，X 的条件概率密度如图 P9.17 所示。

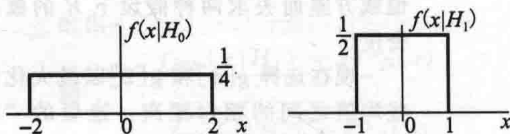


图　P9.17

(a) 现已观测到 $X=x$，当 $P(H_0)=P(H_1)$ 时，在'H_0'和'H_1'之间做出选择的最小错误概率判决准则是什么？求对应的(条件)检测概率 P_D、(条件)虚警概率 P_{FA} 和错误概率 P_e。

(b) 对于什么范围的 $P(H_0)$ 值，最小错误概率判决准则总是判定为'H_0'？

(c) 现在考虑当分别获得两个随机变量 X_1

和 X_2 的量测值 x_1 和 x_2 时，会发生什么。假定在每个 H_0 和 H_1 假设下，这些随机变量均是独立的，且它们每一个的分布如图 P9.17 所示。在 $P(H_0)=P(H_1)$时，具有最小错误概率的判决准则是什么？相应的错误概率是多少？与在(a)中获得的错误概率 P_e 比较，这里求得的错误概率的值是否合理？

(d) 假定此问的前提条件仍然是$P(H_0)=P(H_1)$，不过并没有分别给出 x_1 和 x_2，而是仅有和值 $s=x_1+x_2$，其可以看作随机变量 $S=X_1+X_2$ 的量测值。在每个假设之下，求出并画出完全标记的 S 的概率密度，且利用这些信息确定出具有最小错误概率的判决准则和相应的错误概率 P_e。

9.18 已知量测信号 $X[n]$，$n=1, 2$，其由下列两种假设之一产生：

$$H_{no}: X[n]=W[n]$$
$$H_{yes}: X[n]=s[n]+W[n]$$

这里 $s[1]$和 $s[2]$是指定的(确定性)数，$0<s[i]\leqslant 1$，$i=1, 2$；$W[1]$和 $W[2]$是均匀分布在区间$[-1, 1]$上的独立同分布的随机变量(因此均值为 0，方差为$\frac{1}{3}$)。分别给定 $X[1]$和 $X[2]$的量测值 $x[1]$和 $x[2]$，现希望在 H_{no}和 H_{yes}之间做出判决。

(a) 一种处理量测值的方法就是仅将其看成如下形式的线性组合：

$$r=g[1]x[1]+g[2]x[2]$$

为了分析建立在数值 r 上的判决准则，考虑随机变量：

$$R=g[1]X[1]+g[2]X[2]$$

求在每种假设下 R 的均值和方差，并注意到方差并不依赖于哪种假设成立。提示：你不需要为了求出这里的条件均值或方差而去求两种假设下 R 的概率密度。

现在选择 $g[1]$和 $g[2]$以最大化这些均值之间的相对距离，这里的"相对"是指在假设 H_{no}(或等价地，在假设 H_{yes})之下，R 的量测值和标准差之间的距离，也相当于最大化如下所示的信噪比(SNR)：

$$\frac{(E[R\mid H_{yes}]-E[R\mid H_{no}])^2}{\text{方差}(R\mid H_{no})}$$

(b) 在 $s[1]=s[2]=1$ 的特殊情形下，本题余下部分将关注的是，对于任何的非零常量 c，选择 $g[1]=g[2]=c$ 来最大化(a)中的 SNR。令 $c=3$，画出并完全标记出在每个假设下 R 的条件概率密度图，也就是说，画出 $f_{R\mid H}(r\mid H_{no})$和 $f_{R\mid H}(r\mid H_{yes})$。假定现在每个假设的先验概率为 $p(H_{no})=\frac{2}{3}$，$p(H_{yes})=\frac{1}{3}$。

在已知 $R=r$ 的基础上，确定一个具有最小错误概率的判决准则，在 H_{no} 和 H_{yes}之间做出判决。同时计算这个准则相对应的错误概率。(这可能会帮助你对图中的条件"假 yes"概率和条件"假 no"概率所对应的区域添加适当阴影。)

(c) 如果并不急于利用由量测值 $x[1]$和 $x[2]$的线性组合获得的标量量测值去工作，那么也许可以做得更好。相应地，首先在已知 $s[1]=s[2]=1$ 的情形下，画出或者充分描述出条件概率密度

$$f_{X[1],X[2]\mid H}(x[1],x[2]\mid H_{no})$$

和

$$f_{X[1],X[2]\mid H}(x[1],x[2]\mid H_{yes})$$

之后，在已知 $X[1]=x[1]$，$X[2]=x[2]$的基础上，并且仍然用如同(b)中指定的先验概率，即 $p(H_{no})=\frac{2}{3}$，$p(H_{yes})=\frac{1}{3}$，确定一种具有最小错误概率的判决准则，在 H_{no}和 H_{yes}之间做出判决。计算出该判决准则对应的错误概率，并与(b)中的结果进行比较。

9.19 已知量测信号 $X[n]$，$n=[1, 2]$，其由下列两种假设之一产生：

$$H_0: X[n]=s_0[n]+W[n]$$
$$H_1: X[n]=s_1[n]+W[n]$$

这里 $s_0[n]$和 $s_1[n]$是确定信号，$W[n]$是均值为 0 方差为 σ^2 的独立同分布高斯随机变量。现希望以最小错误概率的准则在假设 H_0 和 H_1 之间做出判决。在这种高斯情形下，最佳判决准则涉及将量测值的加权组合和一个阈值做比较。加权组合用如下形式给出：

$$R=v[1]X[1]+v[2]X[2]$$

其中，$v[1]$和 $v[2]$为所选择的适当权重，同时将阈值记为 γ。当获得量测值时，随机变量 R 取一特定值 r。如果 $r>\gamma$，则判定为'H_1'，否则，判定为'H_0'。

(a) 假定两个假设的先验概率相等，且当 $n=1, 2$时，$s_0[n]=0$，同时有 $s_1[n]=\delta[n-1]=\delta[n-2]$。用于最佳判决的 $v[1]$、$v[2]$和 γ 应该是多少？同时写出

相应的错误概率 P_e 和 $P(H_0|`H_0')$ 的表达式。你的结果应该基于如下的标准函数：

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

另外，首先分别画出在假设 H_0 和 H_1 之下 R 的分布图，也许可以帮助你来解答。

(b) 假定(a)中的假设先验概率并不相等，且通过最佳判决可以得出结果 $P(`H_1'|H_0)=0.5$。在这种情形下的 $v[1]$、$v[2]$ 和 γ 将是多少？

(c) 假定(a)中的假设先验概率并不相等，但两者均不为0。那么，对于 $P(H_0)\neq0$，$P(H_1)=1-P(H_0)\neq0$ 的值，最佳判决准则是否会使得判决结果总为 H_0？解释原因。

(d) 假定 $s_1[n]$ 和(a)中的一样，但 $s_0[n]=-s_1[n]$。如果两个假设的先验概率相等，求 $v[1]$、$v[2]$ 和 γ。这种情况下的错误概率和(a)中的相比，是变大了？相等？还是变小了？解释你的答案。

9.20 假定在假设 H_0 之下，随机变量 X 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布；而在假设 H_1 之下，随机变量 X 在区间 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布。现在可以获得 X 的量测值 x，希望设计出一个判决准则，使得条件检测概率 $P_D=(`H_1'|H_1)$ 最大，同时限定条件虚警概率不超过一个指定上界 $\beta$，也就是说，$P_{FA}=P(`H_1'|H_0)\leqslant\beta$。由纽曼-皮尔逊准则可知，这里需要设计的判决准则是，当似然比

$$\Lambda(x)=\frac{f_{X|H}(x|H_1)}{f_{X|H}(x|H_0)}$$

超过一个适当选择的阈值 η 时，即 $\Lambda(x)>\eta$，就可以判定'H_1'成立；当似然比低于这个阈值时，即 $\Lambda(x)<\eta$，就可以判定'H_0'成立。选择的 η 值将决定获得什么样的 P_D 值和 P_{FA} 值。本题将探讨如果 $\Lambda(x)=\eta$ 的概率不为0，如何将上述简单的纽曼-皮尔逊判决准则进行扩展。

(a) 当 $-2<x<2$ 时，画出 $\Lambda(x)$ 关于 x 函数的草图。值得注意的是，不必花时间去担心在边缘 PDF 或 $|x|>2$ 时，$\Lambda(x)$ 会是什么，因为 X 取任何这些值的概率为0。同时要注意，在下面(c)中用到的 $\Lambda(x)$，以随机变量 X 替代自变量 x，它是随机变量的一个函数，因此它本身也成了一个随机变量。

(b) 当 η 在下列范围内取某个固定值时，分别确定相应的 P_D 和 P_{FA}：

(i) 当 η 的取值严格小于0时；

(ii) 当 η 的取值严格处于0和2之间时；

(iii) 当 η 的取值严格大于2时。

从(b)中的结果可以清楚地看到，当 η 被限制在这些范围内时，仅可以获得3个可能的 P_{FA} 值，以及相应的3个可能的 P_D 值。换句话说，P_D 作为 P_{FA} 函数的 ROC 图中将仅有3个点。接下来的部分将显示如何获得 P_{FA} 的其他值及相应的 P_D 值，以更好地满足条件 $P_{FA}\leqslant\beta$，从而获得一个比上述仅3点 ROC 更高的 P_D 值。

(c) 假定选择 $\eta=2$。如果判定为 H_0，那么获得 $\Lambda(x)=2$ 的概率是多少？如果判定为 H_1，那么获得 $\Lambda(x)=2$ 的概率又是多少？当 $\eta=2$ 时，从上面的计算中应该能够看出难以得到 $\Lambda(x)>\eta$，但是，也许可以很好地得到 $\Lambda(x)=\eta$ 或者 $\Lambda(x)<\eta$。假定当 $\Lambda(x)<\eta$ 时，仍然判定为'H_0'；而当 $\Lambda(x)=\eta$ 时，则以概率 α 判定为'H_0'，否则判为'H_1'。这个随机化的判决准则下的 P_{FA} 和 P_D 是什么？给出详细推导。当 α 在0～1范围内变化时，画出相应的ROC，并包含(b)中计算得到的ROC上的三点。

当阈值 $\eta=0$ 时，采用同样的随机化判决准则，可以在ROC上获得额外的点，但是这里将省略相关讨论。

9.21 在一间肺部疾病相关的医院病房，一位医生通过X光检查发现了病人肺部的一个可疑阴影。假设 H 有两种取值 H_0 或 H_1。在假设 H_1 下该阴影代表癌症，而在假设 H_0 下，该阴影代表无害的疤痕组织。此外，假定X光检查结果由随机变量 X 来给出：

$$f_{X|H}(x|H_1)=x\mathrm{e}^{-x}\mu(x)$$

和

$$f_{X|H}(x|H_0)=\mathrm{e}^{-x}\mu(x)$$

其中，$\mu(x)$ 是单位阶跃函数。基于X光检查结果获得的 X 值的基础上，医生必须决定是否需要手术。由于先验概率很难运用在这里，可以考虑一个替代MAP准则的判决方法。特定地，定义正确检测的条件概率 P_D 如下：

$$P_D=P(\text{判决 }H_1|H_1\text{ 为真})$$

条件虚警概率 P_{FA} 如下：

$$P_{FA}=P(\text{判决 }H_1|H_0\text{ 为真})$$

这里假设检验准则的目的是在约束条件 $P_{FA}=\alpha=0.1$ 下最大化 P_D。这个框架即对应于纽曼-皮尔逊假设检验。

(a) 证明这个最大化问题等价于最小化下式：

$$\eta(1-\alpha)+\int_{D_0}[f_{X|H}(x|H_1)-\eta f_{X|H}(x|H_0)]\mathrm{d}x$$

其中，D_0 表示判定为 H_0 时 X 值的范围(其补集范围对应于判定为 H_1，记为 D_1)。

(b) 从(a)可以很清楚地看到，最佳域 D_0 恰好包含使得上述积分方括号内的项是负值的那些 x 值。证明这和下式等价：

$$\Lambda(x) \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \eta$$

这里阈值 η 的选取要使得 $P_{FA}=\alpha$。

(c) 利用(b)中的结果，找到最佳域 D_0 和 D_1，以决定是否对病人进行手术，对应的 P_D 值是多少？

9.22 一个连续随机变量 X 可以在[0，2]范围内取值，并且它的值取决于两个可能 PDF 中的一个，对应于以下两个假设：

$$H_0: f_X(x)=\frac{1}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

$$H_1: f_X(x)=\frac{x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

换句话说，在假设 H_0 下，X 服从均匀分布，而在假设 H_1 下，X 有一个“三角形的”分布。

(a) 在同一幅图中(即使用共同的横轴和纵轴)，画出完全标记的以下条件概率：

$$f_{X|H}(x|H_0),\quad f_{X|H}(x|H_1)$$

在不同于上幅图的另一幅图中画出完全标记的以下似然比：

$$\Lambda(x)=\frac{f_{X|H}(x|H_1)}{f_{X|H}(x|H_0)}$$

(b) 前面已经看到过许多判决准则采用下面的表达形式：

$$\Lambda(x) \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \eta$$

其中，η 为适当选取的阈值。那么，η 在什么范围内，$P_D=('H_1'|H_1)$将取值为 0；η 在什么范围内，$P_D=P('H_1'|H_1)$可以取值为1？同时求出这两种情形下对应的 $P_{FA}=P('H_1'|H_0)$值。

(c) 当 $0\leqslant\eta\leqslant 2$ 时，写出基于 η 形式表示的 P_D 和 P_{FA}，并且检验该表达式是否能够根据对应的 η 值范围得到(b)中的答案。

(d) 利用(c)中的表达式计算关于 P_{FA} 的函数 P_D。如果正确地完成了这一步，将会发现$\frac{\mathrm{d}P_D}{\mathrm{d}P_{FA}}=\eta$，这是一个更加通用的形式，也是一个非常有效的检验方式。画出这个函数的接收者操作特性(ROC)曲线。在同一幅图中，画出关于 P_{FA} 的函数 $P_M=P('H_0'|H_1)$。

(e) 这个判决准则的错误概率通常依赖于先验概率 $P(H_0)=p_0$ 和 $P(H_1)=1-p_0$。然而，如果 P_{FA} 和 P_M 之间存在一种特殊的关联形式，错误概率将不再依赖于 p_0。那么，在这种情况下，P_{FA} 和 P_M 是怎样关联在一起的呢？是否存在某个 η 的值，将 P_{FA} 和 P_M 特殊地关联在一起？画出如(d)中 P_M 关于函数 P_{FA} 的图，应该可以帮助你做出判断。

9.23 观察一个随机变量 Y，它有以下的统计特性：

$$Y=\begin{cases}W, & H=H_0\\ 1+W, & H=H_0\end{cases}$$

其中，假设 $H=H_0$，$H=H_1$ 的先验概率分别是 P_0 和 $P_1=1-P_0$，同时在假设 H_0 和 H_1 下，W 是一个概率密度为 $f_W(w)$的连续随机变量(也就是说，W 独立于 H)。

(a) 基于 $f_W(w)$的形式表示出条件概率密度 $f_{Y|H}(y|H_0)$和 $f_{Y|H}(y|H_1)$。

(b) 假定在观测值 $Y=y$ 的基础上，采用阈值检验

$$y \underset{'H_0'}{\overset{'H_1'}{\gtrless}} \gamma$$

来做出判决。相应的漏警条件概率 P_M 作为检验阈值 γ 的函数，如图 P9.23所示。利用 P_M 关于 γ 的特性以及(a)中的答案，确定和画出条件概率密度 $f_{Y|H}(y|H_0)$和 $f_{Y|H}(y|H_1)$。

(c) 利用(b)中的结果，对于上面给出的阈值检验，确定作为阈值 γ 的函数的条件虚警概率 P_{FA}。并画出你的答案。

(d) 假定 $P_0=P_1=\frac{1}{2}$，找出最小错误概率 $P_{\min}$，它可以通过优化上面给定的阈值检验中的 γ 值来实现。

(e) 假定 $P_0=P_1=\frac{1}{2}$。确定具有最小错误概率的判决准则，在‘H_0’和‘H_1’之间做出判决的。你的答案应该是一对明确的判决域：$D_0=\{y：‘H_0’\}$，当判决为‘H_0’时对应的量测值 y 的集合；$D_1=\{y：‘H_1’\}$，当判决为‘H_1’时对应的量测值 y 的集合。值得注意的是，你不需要受限于使用给定的阈值检验。利用你的最佳判决准则，计算出错误概率 P_e。

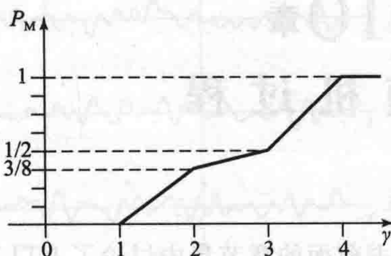


图　P9.23

364 ~ 379

第10章 随机过程

本书前面的章节集中讨论了 LTI 系统对确定信号的作用，开发分析这类信号与系统的工具，并用这些工具来理解了通信(例如 AM 和 FM 调制)、控制(例如反馈系统的稳定性)，以及信号处理(例如滤波)中的应用。开发一种类似的工具进行相关的分析，来研究 LTI 系统对另一类信号的作用是很重要的，这类信号就是随机信号，是对概率试验结果的模型化描述，或者称为随机过程信号。这类信号在信号与系统的分析和设计中扮演着核心角色。本章是通过相关的信号总体来定义随机过程，并探索它们的时域特性。在第 11 章将考察随机过程的频域特性。后面的章节将把在通信、控制和信号处理的应用中出现的随机的或不确定的信号，采用随机过程来建模，研究包括信号估计和假设检验在内的各种相关的推理问题。

10.1 随机过程的定义和举例

在 7.3 节定义了一个随机变量 X，即把它当成一个函数，将每一次概率试验的结果映射成一个实数。用类似的方式，一个实的 CT 或者 DT 的随机过程记为 $X(t)$或 $X[n]$，可以当成一个函数，是将一个概率试验的每一个结果映射到一个实的 CT 信号或者 DT 信号，在这里称这个概率试验是随机过程的实现。在任意固定时刻$t=t_0$或 $n=n_0$，数据量 $X(t_0)$和 $X[n_0]$是简单的随机变量。随机过程中产生的所有信号的集合称为随机过程中的信号总体(the ensemble of signal)。

380

例 10.1 随机振荡器(random oscillator)

作为一个随机过程的例子，考虑一个包含 N 个谐波振荡器(harmonic oscillator)的仓库(warehouse)，每个谐波振荡器产生一个有特定幅度、频率和相位的正弦波形。通常不同的振荡器的这三个参数不同。这个集合构成了信号的总体。概率试验要产生一个特定信号，是根据某个概率质量函数(PMF)来选择一个振荡器来实现。这个概率质量函数对 1～N的每一个振荡器赋一个概率值，因此第 i 个振荡器被选中的概率为 p_i。和这个试验的每个结果相关联的是一个具体的正弦波形。在选择出具体的振荡器之前，试验结果的幅度、频率和相位是不确定的，也就是说，幅度 A、频率 Φ 和相位 Θ 都是随机变量。因此，在本例中可以将这个随机过程表示如下：

$$X(t;A,\Phi,\Theta) = A\sin(\Phi t + \Theta) \qquad (10.1)$$

如图 10.1 所示，图中已经列出了分号之后的随机变量参数。随着讨论的进行，在知道哪些参数是随机变量的情况下，通常会化简符号来讨论 $X(t)$，这样式(10.1)就可以写成：

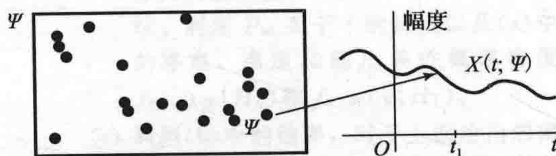


图 10.1 一个随机过程

$$X(t) = A\sin(\Phi t + \Theta) \qquad (10.2)$$

在具体时刻 t_1，值 $X(t_1)$也是一个随机变量。在这个试验背景下，知道了与数字 1～N对应的概率质量函数，以及该数字代表的所选择的振荡器，还有该振荡器具体的幅度、频率和相位，这样就可以确定上面提到的任意一个基本随机变量 A、Φ、Θ，或者说是 $X(t_1)$的概率分布。

在本章和后面的章节中会考虑很多随机过程的例子。然而，当前重要的是形成一个对

于什么是随机过程的正确认识。一个随机过程不仅仅是一个信号，而是一个信号的总体。这一点在图 10.2 中进行了图示说明。其中，概率试验的结果可以是图中给出的四个波形中的任意一个。每一个波形都是确定的，但是产生的过程是概率性的，或者说是随机的，因为由概率试验产生哪一个波形是预先不知道的。因此，在得到概率试验的结果之前，信号的许多特性是不可预知的，因为会产生哪个信号存在不确定性。在试验之后，或者称为“后验”，输出的结果才能被完全确定。

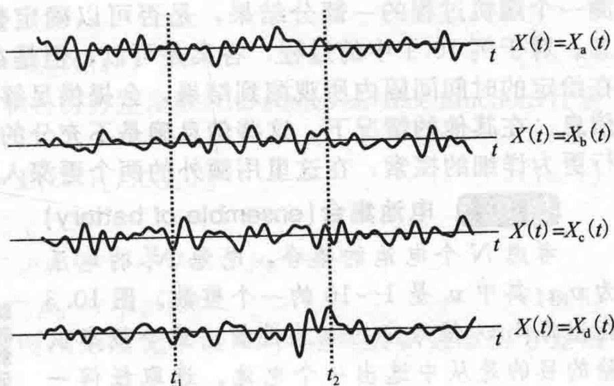


图 10.2　随机过程 $X(t)$的实现

381

如果关注一个 CT 随机过程 $X(t)$在某个特定时刻(比如 t_1 时刻)的取值，也就是说，如果在固定的时刻考察整个总体，将得到一个随机变量，即 $X(t_1)$。如果关注在由 ℓ 个固定时刻 $t_1<t_2<\cdots<t_\ell$(ℓ 是一个任意的正整数)组成的一个任意集合的取值总体，就得到一组 ℓ 个联合分布的随机变量 $X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_\ell)$，这些变量都由基本概率试验的结果共同确定。根据这一观点，一个随机过程可以看作按照 t 索引的联合分布随机变量的集合。这个随机变量集合的一个全概率特性(full probabilistic characterization)需要任意时刻信号的、多重采样(multiple sample)的联合概率密度函数，其表达式为

$$f_{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_\ell)}(x_1,x_2,\cdots,x_\ell) \tag{10.3}$$

对所有的 ℓ 和所有的 t_1，t_2，…，t_ℓ 成立。

382

相应地，一个 DT 随机过程由随机变量 $X[n]$(n 取所有整数值)的集合组成，其全概率特性由以下联合概率密度函数表示：

$$f_{X[n_1],X[n_2],\cdots,X[n_\ell]}(x_1,x_2,\cdots,x_\ell) \tag{10.4}$$

对所有的 ℓ 和所有的整数 n_1，…，n_ℓ 成立。

一般情况下，要得到像式(10.3)或式(10.4)给出的一个随机过程的全特性描述是不现实的。在下面例 10.2 和本章的其他例子中将会看到，在许多有用的情况下，全特性描述可以从更简单的概率特性描述中推断出来。而且就像在 10.2 节中讨论的一样，对于本书中处理的大多数问题，通过一阶矩和二阶矩得到的随机过程的特性描述就是有用的和充分的。

例 10.2　一个独立同分布过程

考虑一个 DT 随机过程，其在每一个时刻 n 的值 $X[n]$可以认为是从一个固定的概率密度函数 $f_X(x)$中独立选择出来的，所以这些值是独立的和同分布的，从而产生一个独立同分布(independent identically distributed，i. i. d)的过程。这种过程在建模和仿真方面有着广泛的应用。比如，假设有一个特殊的 DT 通信信道，其会用加性噪声干扰一个传输信号，如果这个噪声在每一个时刻有独立的值，但其特性不随时间窗的移动而改变，那么这个噪声可以很好地建模，描述为一个独立同分布过程。如果已有一个随机数发生器，可以根据具体的概率密度函数来产生样本点，那么在仿真环境中，产生一个独立同分布的过程也同样简单。时间样本之间有更复杂联系的过程，可以通过对独立同分布过程进行滤波或者其他操作来得到，正如在本章和下一章即将看到的那样。

对一个独立同分布过程，可以将联合概率密度函数写作边缘密度的乘积，即

$$f_{X[n_1],X[n_2],\cdots,X[n_\ell]}(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_\ell) \tag{10.5}$$

对任意的 ℓ 和 n_1，…，n_ℓ 均成立。◀

在接下来的章节中，要研究随机过程时，会出现一个重要的问题，那就是仅仅通过观

测一个随机过程的一部分结果，是否可以确定整个结果。答案取决于随机过程的详细信息。对于例 10.1 中的过程，答案是可以，但是在一般情况下却不能。对于一些随机过程，在给定的时间间隔内所观测到结果，会提供足够的信息来确切地知道它对应的全体成员的信息。在其他的情况下，这些信息确是不充分的。对这些方面的部分内容在后面章节会进行更为详细的探索，在这里用额外的两个更深入强调这些问题的例子来结束本节。

例 10.3 电池集合(ensemble of battery)

383

考虑 N 个电池的集合，电池 N_i 的电压为 v_i，其中 v_i 是 1～10 的一个整数。图 10.3 指出每个 v_i 值对应的电池数量。这个概率试验的目的是从中选出一个电池。选取任何一个电池的概率为$\frac{1}{N}$，也就是说，任何一个电池被选取都是等概率的。因此将图 10.3缩放$\frac{1}{N}\left(\text{译者注：纵轴数值缩小为}\frac{1}{N}\right)$，即可作为以电池电压为概率试验结果的概率质量函数。因为电池电压是一个信号(在本例中恰巧是时不变的)，所以这个概率试验产生了一个随机过程。事实上，这个例子和前面讨论过的振荡器的例子是相似的，只是频率和相位都为零，因此只有幅度是随机的，并且被限定为整数。

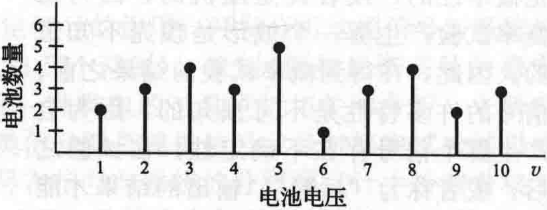


图 10.3 例 10.3 中的电池电压分布

在这个例子中，基于任一时刻 $X(t)$ 的观测信息足以确定全部时间内的结果。◀

例 10.3 是一个非常简单的随机过程，它和例 10.4 一起形象地显示了随机过程的平稳性和各态历经性中的一些重要内涵。

例 10.4 硬币投掷者集合(ensemble of coin tosser)

在这个例子中，考虑 N 个人的一个集合，每个人已经独立写下一长串任意的 1 和 0 组成的序列，其中每一个元素(entry)的选择都独立于序列中的其他元素(类似于独立的硬币投掷序列)，并且每一个元素选择 1 的概率都是相同的。这个随机过程现在包含 1 和 0 组成的全体序列。这个过程的实现可通过随机选择一个人(因此可以从 N 个 1 和 0 组成的序列中选出一个)得到。选择之后，随机过程一个具体实现的全体成员就完全确定了。

下面，假设你只知道选中序列的第 10 个元素。根据序列产生的方法可知，很明显不能由这个信息确定第 11 个元素。同样，如果第 10 个元素及其以前的序列是已知的，也不能确定第 10 个元素之后剩下的序列。

虽然根据试验特性，整个序列已经提前确定，但是给定的全体成员(ensemble member)中的部分观测信息通常是不足以完全确定全成成员。

384

这里应该考虑第 n 个元素的整个集合取值(N 个)所对应的随机变量，而不是一个随机信号实现的全体成员中的第 n 个元素。例如考虑 $n=10$ 的整个集合构成的随机变量，可以看到其取 1 和 0 的比率与每个随机过程实现个体在 $n=10$ 时选择 1 和 0 的概率是一致的。◀

10.2 随机过程的一阶矩和二阶矩特性

在上面的讨论中，已经知道一个随机过程可以看成由 t 或 n 索引的、联合分布的随机变量的集合。然而，用这种方法解析地描述一个随机过程通常是非常困难的，或者是不可能的。幸运的是，应用最广泛的随机过程模型有特殊的结构，允许在这样一种统计特性下进行计算。同样，特别是当使用线性系统来处理信号时，经常只需要考虑这个过程的一阶矩或二阶矩来对这个过程进行设计或者对结果进行分析。

CT 随机过程 $X(t)$ 的一阶矩，或者说平均函数，通常表示为 $\mu_X(t)$。它是随机变量

$X(t)$在每一个时刻t的期望值，即

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \tag{10.6}$$

自相关函数(the autocorrelation function)和自协方差函数(the autocovariance function)代表了二阶矩。自相关函数$R_{XX}(t_1, t_2)$为

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \tag{10.7}$$

自协方差函数$C_{XX}(t_1, t_2)$为

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1,t_2) &= E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))] \\ &= R_{XX}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \end{aligned} \tag{10.8}$$

其中，t_1和t_2是两个任意的时刻。"自"（有时用来简化术语)指的是相关函数或协方差函数中的两个样本都是来自同一个过程。

事实上可以用一阶矩和二阶矩完全确定一个过程的一个例子就是高斯过程，它的实现样本总是联合高斯的，可以给出从二元高斯(the bivariate Gaussian)到多元变量的通用表示。

这里也可以考虑多个随机过程，比如两个过程$X(\cdot)$和$Y(\cdot)$。其完整的随机特性描述需要$X(\cdot)$和$Y(\cdot)$的样本的全部可能组合的概率密度函数。如果$X(\cdot)$的每个样本集合都独立于$Y(\cdot)$的每个样本集合，就称$X(\cdot)$和$Y(\cdot)$是相互独立的，故联合概率密度函数的因子可表征如下：

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1),\cdots,X(t_k),Y(t'_1),\cdots Y(t'_\ell)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_\ell) \\ &= f_{X(t_1),\cdots,X(t_k)}(x_1,\cdots,x_k)\cdot f_{Y(t'_1),\cdots,Y(t'_\ell)}(y_1,\cdots,y_\ell) \end{aligned} \tag{10.9}$$

对所有的k、ℓ以及任意选择的时刻均成立。

如果只对一阶矩和二阶矩感兴趣，那么除了$X(\cdot)$和$Y(\cdot)$自身的一阶矩和二阶矩，还需要考虑互矩(cross-moment)函数。具体地说，互相关函数$R_{XY}(t_1, t_2)$和互协方差函数$C_{XY}(t_1, t_2)$分别为

385

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{10.10}$$

和

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1,t_2) &= E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(Y(t_2)-\mu_Y(t_2))] \\ &= R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \end{aligned} \tag{10.11}$$

对任意时间t_1、t_2均成立。若对所有的t_1、t_2，均有$C_{XY}(t_1, t_2)=0$，就称过程$X(\cdot)$和$Y(\cdot)$是不相关的。再次说明，这里的"不相关"在它的习惯用法中意味着这些过程有零协方差而不是零相关。

上面的讨论可以移植到DT的随机过程情况，除了采样时刻被限制在整数时间序号。其余与DT信号的时间参数外使用方括号[·]的惯例一致，在这里使用$\mu_X[n]$表示离散过程$X[\cdot]$在时刻n的平均函数。同样地，在这里使用$R_{XX}[n_1, n_2]$和$C_{XX}[n_1, n_2]$分别表示在时刻n_1和n_2采样的相关函数和协方差函数，$R_{XY}[n_1, n_2]$和$C_{XY}[n_1, n_2]$分别表示在时刻n_1和n_2采样的两个随机变量$X[\cdot]$和$Y[\cdot]$的互矩函数。

10.3 平稳性

10.3.1 严格平稳性

通常认为对于任意给定一个数ℓ，在ℓ个任意时刻的一个随机过程的采样，所得到的随机变量的联合概率密度函数是时间依赖的，也就是说，下列联合概率密度函数取决于t_1，…，t_ℓ的具体值。

$$f_{X(t_1),\cdots,X(t_\ell)}(x_1,\cdots,x_\ell) \tag{10.12}$$

如果所有的联合概率密度函数在任意时移下保持一致，也就是说，如果

$$f_{X(t_1),\cdots,X(t_\ell)}(x_1,\cdots,x_\ell) = f_{X(t_1+\alpha),\cdots,X(t_\ell+\alpha)}(x_1,\cdots,x_\ell) \tag{10.13}$$

对任意的 α 均成立，那么这个随机过程称为严格平稳的(Strict-Sense Stationary，SSS)。换种说法，对于一个严格平稳过程，其统计特性只取决于采样的相对时间，而不是绝对时间。在例 10.2 和例 10.3 中给出的过程是 SSS 的。更一般地说，任何独立同分布过程都是严格平稳的。

10.3.2 广义平稳性

广义平稳性对于特定应用往往是一种限制更少的平稳性类型。具体来说，如果均值 $\mu_X(t)$ 是时不变的，并且自相关 $R_{XX}(t_1, t_2)$ 或者等价地自协方差 $C_{XX}(t_1, t_2)$，只是时间差 (t_1-t_2) 的函数，那么这个过程称为广义平稳的(Wide-Sense Stationary，WSS)。严格平稳过程总是广义平稳的，但是反过来却不一定成立。对一个 WSS 随机过程 $X(t)$，有

386

$$\mu_X(t) = \mu_X \tag{10.14}$$

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1,t_2) &= R_{XX}(t_1+\alpha,t_2+\alpha) = R_{XX}(t_1-t_2,0) \\ &= R_{XX}(t_1-t_2), \quad \text{对于每一个 } \alpha \end{aligned} \tag{10.15}$$

其中，最后一个等式定义了一个更加简洁的表示方法，因为把时间差 (t_1-t_2) 作为唯一的自变量，足以满足 WSS 过程的需要。同理，对于 WSS 随机过程，$C_{XX}(t_1, t_2)$ 也可以写成 $C_{XX}(t_1-t_2)$。时间差 (t_1-t_2) 通常记作 τ，并且被看作自相关函数和自协方差函数的间隔变量(lag variable)。

对于一个高斯过程，即样本服从联合高斯分布的过程，广义平稳就意味着是严格平稳，因为联合高斯变量完全由它们的联合一阶矩和二阶矩确定。

对于两个随机过程 $X(\cdot)$ 和 $Y(\cdot)$，如果它们的一阶矩和二阶矩(包括互协方差)是固定的，那它们就是联合 WSS 的。在这种情况下，用符号 $R_{XY}(\tau)$ 来表示 $E[X(t+\tau)Y(t)]$。值得注意的是，在其他文献中，有些会使用另一个替代的约定符号，即使用 $E[X(t)Y(t+\tau)]$ 来定义 $R_{XY}(\tau)$。在本书的约定符号中，这个期望由 $R_{XY}(-\tau)$ 表示。在参考其他资料时，考虑遵循何种标记约定是很重要的。当然，你同样需要清楚本书中的符号约定。

例 10.5 随机振荡器回顾

再次考虑例 10.1 中介绍的谐波振荡器：

$$X(t;A,\Theta) = A\cos(\phi_0 t+\Theta) \tag{10.16}$$

其中，A 和 Θ 是独立随机变量，现在频率固定在由 ϕ_0 表示的某个已知值上。

如果 Θ 也固定为一个常值 θ_0，那么每个结果都有 $x(t)=A\cos(\phi_0 t+\theta_0)$ 的形式，可以很明显地看出这个过程不是 WSS 的(因此也不是 SSS 的)。例如，如果 A 有一个非零均值，$\mu_A \neq 0$，那么这个过程的期望值(即 $\mu_A\cos(\phi_0 t+\theta_0)$)是时变的。为了说明即使 $\mu_A=0$ 时这个过程也不是 WSS 的，可以检测其自相关函数。注意，当 t 取所有使 $\phi_0 t+\theta_0$ 等于 $\pi/2$ 的奇数倍的值时，$x(t)$ 恒为 0；而当 t 取在这些点的中间时，$x(t)$ 的取值为 $\pm A$。因此在时间上相距 π/ϕ_0 的采样点之间的相关函数值相应地为 0(前面的一种情形)，或者是 $-E[A^2]$(后面的一种情形)。因此即使 $\mu_A=0$，这个过程也不是 WSS 的。

然而，如果 Θ 在 $[-\pi, \pi]$ 均匀分布，那么

$$\mu_X(t) = \mu_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\phi_0 t+\theta)\mathrm{d}\theta = 0 \tag{10.17}$$

$$C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) = E[A^2]E[\cos(\phi_0 t_1+\Theta)\cos(\phi_0 t_2+\Theta)] \tag{10.18}$$

387

式(10.18)可以按以下方式计算：

$$C_{XX}(t_1,t_2) = \frac{E[A^2]}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}[\cos(\phi_0(t_2-t_1))+\cos(\phi_0(t_2+t_1)+2\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{10.19}$$

可得

$$C_{XX}(t_1,t_2) = \frac{E[A^2]}{2}\cos(\phi_0(t_2-t_1)) \tag{10.20}$$

那么，在这个限定的情况下，该过程是 WSS 的。还可以证明它也是 SSS 的，尽管这

里不是在完全直接地正式证明。◀

大多数情况下所处理的随机过程将会是 WSS 的。前面提到，为了化简 WSS 过程的标记，把相关函数写作 $R_{XX}(t_1-t_2)$；变量 (t_1-t_2) 也常用计算自相关中的间隔变量 τ 表示。如果只考虑一阶矩和二阶矩，而不是全体概率密度函数或者累积分布函数(Cumulative Distribution Function，CDF)，那么区分随机过程 $X(t)$ 和它的一个具体实现 $x(t)$ 就不那么重要了，所以可以通过用小写字母表示自身的随机过程，来进一步简化使用的标记。因此针对随机过程 $x(t)$，如果它是一个 WSS 过程，可以用 μ_x 表示其均值，用 $R_{xx}(\tau)$ 表示其相关函数 $E[x(t+\tau)x(t)]$。相应地，对于 DT 情况，可以针对随机过程 $x[n]$，在 WSS 的情况下，用 μ_x 表示其均值，用 $R_{xx}(m)$ 表示它的相关函数 $E[x[n+m]x[n]]$。

10.3.3 WSS 相关函数和协方差函数的性质

考虑实的 WSS 过程 $x(t)$ 和 $y(t)$，相关函数和协方差函数有如下对称性质：

$$R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau),\quad C_{xx}(\tau)=C_{xx}(-\tau) \tag{10.21}$$

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau),\quad C_{xy}(\tau)=C_{yx}(-\tau) \tag{10.22}$$

例如，式(10.22)中互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 的对称性通过交换定义式中的期望里的变量位置直接得到

$$R_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t-\tau)] \tag{10.23a}$$

$$=E[y(t-\tau)x(t)] \tag{10.23b}$$

$$=R_{yx}(-\tau) \tag{10.23c}$$

式(10.21)和式(10.22)中的其他性质可由同样的方法得到。

式(10.21)表明自相关函数和自协方差函数具有偶对称性。式(10.22)表明，对于互相关函数和互协方差函数，交换随机变量的位置与关于 τ 轴进行翻折是等效的。当然，式(10.21)是式(10.22)在 $y(t)=x(t)$ 时的特殊情况。对于 DT 的 WSS 过程也有同样的性质。

388

下面推出相关函数和协方差函数的另一个重要性质。注意，正如在 7.7 节的式(7.63)中所讨论的那样，两个随机变量的相关系数幅度不超过 1。具体来说，因为 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 的相关系数为 $C_{xx}(\tau)/C_{xx}(0)$，所以有

$$-1\leqslant\frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}\leqslant 1 \tag{10.24}$$

或者等价为

$$-C_{xx}(0)\leqslant C_{xx}(\tau)\leqslant C_{xx}(0) \tag{10.25}$$

对上式的每一项加上 μ_x^2，可以得到

$$-R_{xx}(0)+2\mu_x^2\leqslant R_{xx}(\tau)\leqslant R_{xx}(0) \tag{10.26}$$

在第 11 章中将证明，相关函数和协方差函数存在的傅里叶变换具有在任何频率都是实的且非负的特性，因为这些变换描述的是随机过程中期望功率的频率分布。上面推导所遵循的对称条件和边界特性是自然的结果，但是它们在这里是值得强调的。

下面再用两个例子来结束本节。第一个例子是伯努利过程(Bernoulli process)，它是掷硬币看硬币的翻转面的重复独立随机过程的一个更正式的名字。第二个例子称为随机电报波(random telegraph wave)，通常用作一个随机方波或者电子开关或者通信系统的一个模型的简化。

例 10.6 伯努利过程

伯努利过程是这样一个例子，它是满足如下条件的独立同分布的 DT 的过程：

$$P(x[n]=1)=p \tag{10.27}$$

$$P(x[n]=-1)=1-p \tag{10.28}$$

并且每一个时刻 n 的取值独立于其他所有时刻的取值。其均值、自相关和协方差函数为

$$E\{x[n]\}=2p-1=\mu_x \tag{10.29}$$

$$E\{x[n+m]x[n]\}=\begin{cases}1, & m=0\\ (2p-1)^2, & m\neq 0\end{cases} \tag{10.30}$$

$$C_{xx}[m]=E\{(x[n+m]-\mu_x)(x[n]-\mu_x)\} \tag{10.31}$$

$$=\{1-(2p-1)^2\}\delta[m]$$

$$=4p(1-p)\delta[m] \tag{10.32}$$

◀

389

例 10.7 随机电报波

在CT的随机过程中，偶尔会作为参考的一个例子就是随机电报波。随机电报波过程的一个代表性的样本函数如图10.4所示，并且可通过下面两个性质定义。

性质1：$x(0)=\pm1$ 的概率相等且均为0.5。这一特性再加上这样的事实：在任意时隙内符号改变的次数(为独立的随机数)可能为奇数，或者为偶数。这可以表明在任意时刻 t，$x(t)=\pm1$ 也具有相等概率且均为0.5。

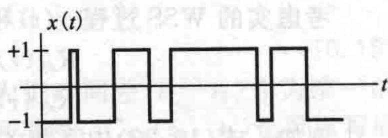


图10.4 随机电报波的一个实现

性质2：$x(t)$ 在泊松(Poisson)时间内改变极性，即在长度为 T 的时间间隙，有 k 次符号改变的概率为

$$P(\text{在长度为 } T \text{ 的时间间隙内 } k \text{ 次符号改变})=\frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \tag{10.33}$$

其中，常数 λ 代表变化率。

性质2意味着在长度为 T 的时间间隙内，(非负的)偶数次符号改变的概率为

$$P(\text{偶数次符号改变})=\sum_{k=0,\text{偶数}}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}=e^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{2}\frac{(\lambda T)^k}{k!} \tag{10.34}$$

使用恒等式

$$e^{\lambda T}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!} \tag{10.35}$$

式(10.34)变为

$$P(\text{偶数次符号改变})=e^{-\lambda T}\frac{(e^{\lambda T}+e^{-\lambda T})}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda T}) \tag{10.36}$$

同样，在长度为 T 的时间间隙内，奇数次符号改变的概率为

390

$$P(\text{奇数次符号改变})=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda T}) \tag{10.37}$$

通过式(10.36)和式(10.37)，可以知道

$$\mu_X(t)=0 \tag{10.38}$$

$$R_{xx}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$=1\times P(x(t_1)=x(t_2))+(-1)\times P(x(t_1)\neq x(t_2))$$

$$=e^{-2\lambda|t_1-t_2|} \tag{10.39}$$

换句话说，这个过程是以指数方式相关的，并且是WSS的。◀

10.4 各态历经性

各态历经性的正式概念是复杂而又精细的，超出了本书讨论的范围，但是在这里对其基本思想进行描述。通常观察一个随机过程的特定实现(比如记录一个噪声波形)，并想通过对这个实现的全体成员的测量，来描述这个随机过程的统计特性。比如，可以用波形的时平均(time average)代表这个过程的平均值，假设该过程的均值在所有时间上都是恒定

的。如果对于(几乎)所有的实现，或者概率 1，都有时平均等于总体平均值，那么这个过程就是均值各态历经(ergodic in mean value)的。

这里也可以构建一个直方图，它是代表从一段时间片内统计出来的，而不是在给定任意时刻对总体成分统计出来的。在这时间片内波形有不同的幅度，然后检测基于时间统计的幅度直方图是否反映了一个某一特定采样时间的总体成分的概率密度，如果随机过程满足(或几乎满足)任意时间的特定实现的幅度分布，则可以代表总体概率分布，那么这个过程的分布是满足各态历经(ergodic in distribution)的。更一般地，一个过程简单地称为是各态历经的，如果它的总体统计特性可以(或几乎可以)由它的任意一个特定实现进行的暂时性统计特性所替代。一个不是各态历经的过程的简单例子是例 10.3，尽管这个过程是 SSS 的。在这个例子中，任何一个特定实现的特性都不能代表总体的特性。

在关于随机过程的讨论中，主要关注的是一阶矩和二阶矩。尽管一般情况下很难确定一个随机过程是不是各态历经的，但可以根据随机过程的矩来构建满足均值和自相关是各态历经的条件。当然，一个有着时变均值的随机过程是不可能均值各态历经的。然而，可以证明，每个时刻有有限方差并在延迟趋于无限大时自相关函数趋于零的 WSS 过程，具有均值各态历经性。均值各态历经的条件在例 11.3 进行研究(也可参见习题 10.43)。

通常如果仅仅为了方便就假设各态历经性，在缺乏证明的情况下，这种假设是不合理的。在这样的假设下，均值和自相关可以由(或者几乎可以)任意单个样本的总体成员的时平均或者任意一个实现的时平均得到。对于 CT 情况，可以通过以下等式得到 391

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x'(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.40}$$

和

$$E[x(t)x(t-\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x'(t)x'(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{10.41}$$

其中，$x'(t)$表示一个特定的实现而非总体样本。

如果式(10.40)和式(10.41)对一个随机过程的(几乎)任意实现均成立，那么该过程就称为是二阶各态历经的(second-order ergodic)。对一个均值各态历经的过程，式(10.40)的 DT 形式为

$$E\{x[n]\} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1}\sum_{-K}^{K} x[k] \tag{10.42}$$

对于相关的各态历经有与式(10.41)类似的形式。

10.5 随机过程的线性估计

在通信、控制和信号处理的多种问题中常见的一类是从另外一个随机过程的观测量对一个随机过程的估计，或者从一个随机过程过去时刻取值的观测量来估计(预言)其未来的取值。例如在通信系统中，接收机接收的信号通常是传输信号的干扰版本，那么就希望从接收到的信号中估计出传输信号。另外的一个例子就是利用过去的观测数据来预测天气或者经济数据。第 12 章会更详细地讨论这个宽泛的话题，但是在这里，对它的初步认识有利于理解随机过程。

首先来考虑一个随机过程线性预测的简单例子，然后介绍对有噪声干扰的过程进行线性有限冲激响应(FIR)滤波，来估计出潜在的随机信号。

10.5.1 线性预测

作为线性预测的一个简单例子，考虑一个 WSS、DT 的随机过程 $x[n]$。知道时刻 n_0 的值，希望能预测 m 个样本之后的值，也就是在时刻 n_0+m 的值。这里规定预测策略是仿射变换的。用$\hat{x}[n_0+m]$表示预测值，规定$\hat{x}[n_0+m]$为以下形式：

$$\hat{x}[n_0+m] = ax[n_0]+b \tag{10.43}$$

392

并且选择预测参数 a 和 b 来最小化均方误差，即选择 a 和 b 来最小化

$$\varepsilon = E\{(x[n_0+m]-\hat{x}[n_0+m])^2\} \tag{10.44}$$

或者等价地

$$\varepsilon = E\{(x[n_0+m]-ax[n_0]-b)^2\} \tag{10.45}$$

这和 8.2 节讨论的线性最小均方误差估计问题是相同的。式(8.38)和式(8.43)中的$\hat{Y}_\ell$对应$\hat{x}[n_0+m]$，X 对应 $x[n_0]$。在 8.2 节中推导出，最优估计的误差 $x[n_0+m]-\hat{x}[n_0+m]$ 与可用数据 $x[n_0]$是正交的，也就是说误差的期望为零，相应的表达式为

$$E\{(x[n_0+m]-ax[n_0]-b)x[n_0]\} = E\{(x[n_0+m]-\hat{x}[n_0+m])x[n_0]\} = 0 \tag{10.46a}$$

和

$$E\{x[n_0+m]-ax[n_0]-b\} = E\{x[n_0+m]-\hat{x}[n_0+m]\} = 0 \tag{10.46b}$$

执行式(10.46)中的乘法和期望运算，可以由期望的常量解出如下结果：

$$R_{xx}[n_0+m,n_0]-aR_{xx}[n_0,n_0]-b\mu_x[n_0]=0 \tag{10.47a}$$

$$\mu_x[n_0+m]-a\mu_x[n_0]-b=0 \tag{10.47b}$$

等价地，由式(8.57)可以得到

$$a = C_{xx}[n_0+m,n_0]/C_{xx}[n_0] \tag{10.48}$$

由式(8.52)可以得到

$$b = \mu_x[n_0+m]-a\mu_x[n_0] \tag{10.49}$$

因为假设这个过程为 WSS，$R_{xx}[n_0+m,\ n_0]=R_{xx}[m]$。同样假设它是零均值的，所以 $\mu_x=0$。式(10.47)、式(10.48)和式(10.49)可以简化为

$$a= R_{xx}[m]/R_{xx}[0] = C_{xx}[m]/C_{xx}[0] \tag{10.50}$$

$$b= 0 \tag{10.51}$$

所以

$$\hat{x}[n_0+m]=\frac{C_{xx}[m]}{C_{xx}[0]}x[n_0] \tag{10.52}$$

当过程是 WSS 的但不是零均值时，线性最小均方误差预测器为

393

$$\hat{x}[n_0+m] = \mu_x+\frac{C_{xx}[m]}{C_{xx}[0]}(x[n_0]-\mu_x) \tag{10.53}$$

这个讨论的一个扩展是考虑在有多个过去值的量测值可用时，如何进行线性最小均方误差预测。

在下一节将要考虑另外一个应用环境，在该环境中自然会对随机过程进行线性估计，它需要根据有噪声干扰的量测值来进行随机过程的一个特定估计。

10.5.2 线性 FIR 滤波

下面考虑另外一个例子，第 12 章将会对其进行更加一般的讨论。考虑一个 DT 的信号 $s[n]$，它已经被一个加性噪声 $d[n]$干扰。比如 $s[n]$是要在信道上传输的信号，$d[n]$是信道引入的噪声，那么接收到的信号 $r[n]$为

$$r[n] = s[n]+d[n] \tag{10.54}$$

假设 $s[\cdot]$和 $d[\cdot]$是零均值联合 WSS 随机过程，并且是不相关的。在接收端，想用一个因果 FIR 滤波器处理 $r[\cdot]$来估计传输信号 $s[n]$，如图 10.5 所示。

如果 $h[\cdot]$是一个长度为 L 的因果 FIR 滤波器，那么

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{L-1}h[k]r[n-k] \tag{10.55}$$

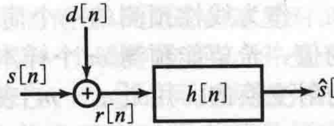


图 10.5 估计被噪声干扰的信号

这里希望确定滤波系数 $h[k]$来最小化$\hat{s}[n]$和 $s[n]$的均方误差，即最小化下面给出的 ε，即

$$\varepsilon = E\{(s[n]-\hat{s}[n])^2\} = E\left\{\left(s[n]-\sum_{k=0}^{L-1}h[k]r[n-k]\right)^2\right\} \quad (10.56)$$

再次应用 8.2 节的结论。具体来说，最优估计的误差 $\{s[n]-\hat{s}[n]\}$ 是与可用数据 $r[n-m]$（其中 $m=0$, …, $L-1$）正交。满足这个条件时有

$$E\{(s[n]-\sum_k h[k]r[n-k])r[n-m]\} = 0, \quad m = 0,1,\cdots,L-1 \quad (10.57)$$

执行式(10.57)的乘法运算，得到期望结果，即

394

$$\sum_{k=0}^{L-1}h[k]R_{rr}[m-k] = R_{sr}[m], \quad m = 0,1,\cdots,L-1 \quad (10.58)$$

式(8.87)和式(8.88)是针对 FIR 滤波环境的正规方程(normal equation)。这里依据相关函数而不是协方差函数来写出它们，因为它们两个符合假设为零均值的情况。式(10.58)建立了 L 个方程，可以求解出 L 个参数 $h[k]$。已知 $r[n]=s[n]+d[n]$，很明显，可以证明 $R_{sr}[m]=R_{ss}[m]+R_{sd}[m]$。并且因为假设 $s[\cdot]$ 和 $d[\cdot]$ 是不相关的，那么 $R_{sd}[m]=0$，故 $R_{sr}[m]=R_{ss}[m]$。类似地，$R_{rr}[m]=R_{ss}[m]+R_{dd}[m]$。

就像在第 12 章将会实现的那样，在随机过程不具有零均值的情况下，可以很容易对这些结果进行改进。

10.6 WSS 过程的 LTI 滤波

在后面的章节中将会看到，WSS 随机过程的相关特性以及这些特性对 LTI 系统的影响，在理解和设计一个系统时是如何扮演重要的角色，这些系统设计用来完成滤波、信号估计、信号检测和系统识别等任务。本节将在时域上理解 LTI 系统是如何塑造一个 WSS 随机过程的相关特性的。到了第 11 章，在建立了用自相关函数的傅里叶变换来描述的、WSS 随机信号期望功率的频率分布之后，将会在频域上画出类似的图像。

考虑一个 LTI 系统，其输入是一个 WSS 随机过程 $x(t)$ 的样本函数，即从构成随机过程 $x(t)$ 的总体中通过概率试验得到的信号。更简单地说，输入是一个随机过程 $x(t)$。

在其他所有考虑之中，知道输出过程 $y(t)$ 是不是 WSS 的，并且确定其均值、自协方差和自相关函数，以及它和输入过程的互相关，都是有意义的。输出过程 $y(t)$ 的总体信号集合是由输入过程的总体集合中随机信号的所有响应构成的。对于冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 系统，其输出 $y(t)$ 由卷积得到

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}h(v)x(t-v)\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty}x(v)h(t-v)\mathrm{d}v \quad (10.59)$$

对任何给定的输入信号 $x(t)$，该卷积都是定义明确的。这里所谓卷积是定义明确的指的是，比如要求输入 $x(t)$ 是有界的，并且系统是有界输入有界输出(BIBO)稳定的，也就是说系统的冲激响应是绝对可积的。在图 10.6 中给出了卷积积分中被积函数的两项的一般性描述。

395

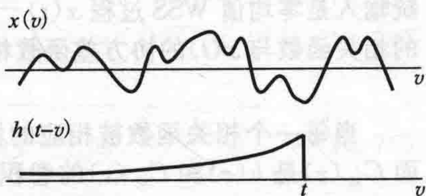


图 10.6 式(10.59)中被积函数的两项的图解

不用要求输入过程的每一个样本函数都是有界的，只要假设 $E[x^2(t)]=R_{xx}(0)$ 是有界的就能满足下面卷积运算的需要。这个假设也包含了假设系统是 BIBO 稳定的，以确保 $y(t)$ 是一个定义明确的随机过程。在下面对表达式执行形式变换处理，比如互换期望计算和卷积计算，这种处理可以证明是合理的，证明方法超出了这里讨论的范围。实际上，这个结果也可以应用到输入过程的二阶矩不是有界的情况中，只要对结果进行正确的理解则可。例如，当 $x(t)$ 是 CT 的白噪声时，$R_{xx}(\tau)=\delta(\tau)$ 的情况。同样，这些结果也可以应用到不一定是 BIBO 稳定的系统中，只要系统能有定义明确的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$，比如说在一个理想低通滤波器的情况下。

式(10.59)中的卷积关系可以用来推导出 $y(t)$ 的一阶和二阶特性。将要确立的是，$y(t)$本身就是 WSS 的，实际上 $x(\cdot)$和 $y(\cdot)$是联合 WSS 的。输出的自相关表达式与输入和输出的互相关表达式也将被一起推导出来。

首先，考虑输出的均值。对式(10.59)两边取期望值

$$E[y(t)]=E[\int_{-\infty}^{\infty}h(v)x(t-v)\mathrm{d}v]=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)E[x(t-v)]\mathrm{d}v$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)\mu_x\mathrm{d}v=\mu_x\int_{-\infty}^{\infty}h(v)\mathrm{d}v=H(j0)\mu_x=\mu_y \tag{10.60}$$

换句话说，输出过程的均值是常数，并且等于输入的均值乘以系统的直流或零频增益。这也是如果输入保持均值为 μ_x 不变时，系统的响应均值就是常数。

由前面的结果和系统的线性性质，可以知道应用零均值 WSS 过程 $x(t)-\mu_x$ 作为稳定 LTI 系统的输入，会使得输出为零均值过程 $y(t)-\mu_y$。在下面把为相关函数推断出的结果转化到适用于协方差函数的结果的推导过程，这是有用的。

396

接下来，考虑输入和输出之间的互相关，即

$$E[y(t+\tau)x(t)]=E[\{\int_{-\infty}^{\infty}h(v)x(t+\tau-v)\mathrm{d}v\}x(t)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)E[x(t+\tau-v)x(t)]\mathrm{d}v \tag{10.61}$$

因为 $x(t)$是 WSS 的，$E[x(t+\tau-v)x(t)]=R_{xx}(\tau-v)$，所以

$$E[y(t+\tau)x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)R_{xx}(\tau-v)\mathrm{d}v=R_{yx}(\tau) \tag{10.62}$$

注意，互相关只取决于输出和输入过程之间的延迟 τ，而不是同时取决于 τ 和绝对时刻 t 两个变量。

把式(10.62)中的积分视为系统冲激响应和系统输入的自相关函数的卷积。式(10.62)中的卷积运算是确定性关系，也就是说，输出和输入之间的互相关和输入的自相关是确定有关的，并且可以把它看作是以自相关函数 $R_{xx}(\tau)$作为输入的系统的输出信号，如图 10.7 所示。相应地，与 $R_{xy}(\tau)$等价的 $R_{yx}(-\tau)$，可以看作以自相关函数 $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$作为输入的系统的输出结果，此时这个系统有时间翻转的冲激响应，即 $h(-\tau)$，将它用 $\overleftarrow{h}(\tau)$表示，相关表达式如下：

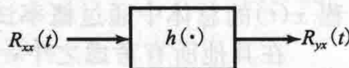


图 10.7 式(10.62)的表示

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\overleftarrow{h}(v)R_{xx}(\tau-v)\mathrm{d}v \tag{10.63}$$

上面的关系也可以用协方差函数来表示，而不是自相关函数。对于这一点，简单考虑系统输入是零均值 WSS 过程 $x(t)-\mu_x$ 的情况，相应的零均值输出为 $y(t)-\mu_y$。因为$x(t)-\mu_x$ 的相关函数与 $x(t)$的协方差函数相同，即因为

$$R_{x-\mu_x,x-\mu_x}(\tau)=C_{xx}(\tau) \tag{10.64}$$

当每一个相关函数被相应的协方差函数代替时，上面的结果保持不变。因此，例如下面 $C_{yx}(\tau)$是 $h(\tau)$和 $C_{xx}(\tau)$的卷积，或者表示为

397

$$C_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)C_{xx}(\tau-v)\mathrm{d}v \tag{10.65}$$

下面考虑输出 $y(t)$的自相关：

$$E[y(t+\tau)y(t)]=E\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty}h(v)x(t+\tau-v)\mathrm{d}v\right\}y(t)\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)\underbrace{E[x(t+\tau-v)y(t)]}_{R_{xy}(\tau-v)}\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)R_{xy}(\tau-v)\mathrm{d}v$$
$$=R_{yy}(\tau) \tag{10.66}$$

式(10.66)表明了$R_{yy}(\tau)$是系统冲激响应和互相关$R_{xy}(\tau)$的卷积。注意，输出的自相关仅仅取决于τ，而非τ和t两个变量。结合这个结论和前面的结果，可以得出结论：$x(\cdot)$和$y(\cdot)$是联合WSS的，与前面声称的一样。

协方差对应的结果是

$$C_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)C_{xy}(\tau-v)\mathrm{d}v \tag{10.67}$$

式(10.63)和式(10.66)的组合可以用图形表示，如图10.8所示。它对应于下列关系：

$$R_{yy}(\tau)=\overline{R}_{hh}(\tau)*R_{xx}(\tau) \tag{10.68}$$

复合后的冲激响应$\overline{R}_{hh}(\tau)$是第1章介绍的$h(t)$的确定自相关函数，并由下面给出：

$$\overline{R}_{hh}(\tau)=\overleftarrow{h}(\tau)*h(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+\tau)h(t)\mathrm{d}t \tag{10.69}$$

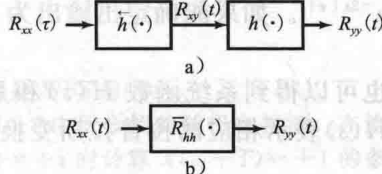


图10.8 式(10.63)和式(10.66)的组合

对于式(10.68)中的协方差函数，可推出

$$C_{yy}(\tau)=\overline{R}_{hh}(\tau)*C_{xx}(\tau) \tag{10.70}$$

注意，即使在推导输入和输出的协方差关系时，仍然要使用$h(t)$的确定性相关函数。在得到当前结果的推导中，只有输入和输出过程的均值有调整，系统的冲激响应不受影响。 398

式(10.62)、式(10.63)、式(10.66)和式(10.68)的相关关系，以及它们对应的协方差是非常有用的，需要充分利用它们。同样重要的是它们在傅里叶变换域和拉普拉斯变换域的表述。用$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$和$S_{xx}(s)$分别表示相关函数$R_{xx}(\tau)$的傅里叶和拉普拉斯变换，其他感兴趣的相关函数也可以同样地进行变换域表示，具体有

$$S_{yx}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)S_{xx}(\mathrm{j}\omega),\quad S_{yy}(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$$
$$S_{yx}(s)=H(s)S_{xx}(s),\quad S_{yy}(s)=H(s)H(-s)S_{xx}(s) \tag{10.71}$$

可以用$D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$和$D_{xx}(s)$分别表示协方差函数$C_{xx}(\tau)$的傅里叶变换和拉普拉斯变换，并且，其他感兴趣的协方差函数也可以进行同样的变换域表示，然后写出和上面一样的那种关系。

在DT情况下有完全类似的结果。考虑一个稳定的DTLTI系统，其冲激响应为$h[n]$，输入为WSS的随机过程$x[n]$。在CT情况下也是一样，可以知道输出过程$y[\cdot]$和输入过程$x[\cdot]$是联合WSS的，并且有

$$\mu_y=\mu_x\sum_{-\infty}^{\infty}h[n] \tag{10.72}$$

$$R_{yx}[m]=h[m]*R_{xx}[m] \tag{10.73}$$

$$R_{yy}[m]=\overline{R}_{hh}[m]*R_{xx}[m] \tag{10.74}$$

其中，$\overline{R}_{hh}[m]$是$h[m]$的确定自相关函数，定义为

$$\overline{R}_{hh}[m]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n+m]h[n] \tag{10.75}$$

这些关系相应的傅里叶变换和z变换的形式为

$$\mu_y=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})\mu_x,S_{yx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}),S_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$
$$\mu_y=H(1)\mu_x,S_{yx}(z)=H(z)S_{xx}(z),S_{yy}(z)=H(z)H(1/z)S_{xx}(z) \tag{10.76}$$

对于所有的这些表达式，还可以进一步推写出协方差和它们的变换域表示。

在第11章中将用这些关系来说明，自相关函数的傅里叶变换描述了WSS过程的期望功率在频率上是如何分布的。出于这个原因，自相关函数的傅里叶变换称为随机过程的功率谱密度(PSD)。 399

本章建立的关系对利用随机过程去测量或确定一个LTI系统的冲激响应也是很重要

的。例如，根据式(10.73)，如果一个 DT 的 LTI 系统的输入 $x[n]$是一个 WSS 随机过程，其自相关函数 $R_{xx}[m]=\delta[m]$，那么通过测量输入和输出的互相关，就可以得到系统冲激响应的测量结果。可以就像例 10.6 一样，构造一个自相关函数为 $\delta[m]$的 DT 输入过程，比如说，产生一个独立同分布过程，其在每个时刻以相等的概率取值为+1 或−1。

另外一个例子，假设一个冲激响应为 $h(t)$的 CTLTI 系统的输入 $x(t)$是一个 WSS 随机电报波，正如例 10.7 所描述的那样。过程 $x(t)$是零均值的且自相关函数 $R_{xx}(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$。如果能确定出输出为 $y(t)$时的互相关 $R_{yx}(\tau)$，然后用关系式

$$R_{yx}(\tau)=R_{xx}(\tau)*h(\tau) \tag{10.77}$$

也可以得到系统函数 $H(s)$和系统冲激响应 $h(\tau)$。具体来说，如果 $S_{yx}(s)$，$S_{xx}(s)$，和 $H(s)$表示相应的拉普拉斯变换，那么

$$H(s)=\frac{S_{yx}(s)}{S_{xx}(s)} \tag{10.78}$$

注意，在这里，$S_{xx}(s)$是复变量 s 的一个性能良好的函数，然而过程 $x(t)$的任何特定的样本函数不一定会有性能如此良好的变换。同样的结论也适用于 $S_{yx}(s)$。

第三个例子，假设已经知道 DTLTI 系统的输入 $x[n]$的自相关函数 $R_{xx}[m]$，但是不知道$x[n]$，因此不能确定输出为 $y[n]$时的互相关函数 $R_{yx}[m]$，假设可以确定输出的自相关函数 $R_{yy}[m]$，此时，假如

$$R_{xx}[m]=\delta[m] \tag{10.79}$$

同时确定的$R_{yy}[m]$为 $R_{yy}[m]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$，那么

$$R_{yy}[m]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}=R_{hh}[m]=\bar{h}[m]*h[m] \tag{10.80}$$

等价地，$H(z)H(z^{-1})$是 $R_{yy}[m]$的 z 变换 $S_{yy}(z)$。加上另外的假设或者约束，比如在系统及其逆系统的稳定性和因果性上进行一些假设和约束，就可以从已知的 $H(z)H(z^{-1})$恢复出 $H(z)$。

400

10.7　延伸阅读

第 7 章结尾建议了用于延伸阅读的一些参考书目，包含特定类型的随机过程的详细讨论，比如伯努利、泊松、更新、马尔可夫、高斯和鞅过程(martingale process)。可以简单地描述 WSS 过程的特性，这非常适合作为 LTI 系统的输入和输出的随机信号以进行分析，因为高斯过程的特性可以用一阶矩和二阶矩来表征，它们很适合使用在类似的分析中应用。因此第 7 章所列的包含 WSS 过程资料的参考文献，会像本章一样对 WSS 过程的 LTI 滤波进行一般性的描述；也会像在第 11 章中将要讨论的那样，检测 WSS 过程的频域特性或者说是谱特性；还会处理将在第 12 章和第 13 章中考虑的信号估计与信号检测问题。本章和后面章节中的额外的一些参考书目包括[Dav]和[Van]这类经典著作，也包括最近的一些文献，如[Gar][Had][Hay][Jan][Pur]和[Shi]。随机过程处理及其谱特性和信号估计——这些与第 10 章、第 11 章和第 12 章相关的内容——也同样可以在致力于时间序列处理和预测处理的书中找到，比如[Blo][Bro][Cht][Dur]和[Woo]。它们通常更基于统计学，并在计量经济学、气候学和过程控制等方面有丰富的应用。[Kle]给出了时间序列(信号处理)的引人入胜的跨越了[St1]和[St2]描述的统计时代的一个时期的发展历史。

401

习题

基础习题

10.1　如图 P10.1 所示，一个特定的随机过程 $X(t)$由一个样本空间表示，该样本空间有三个可能的时间函数作为结果。这三个结

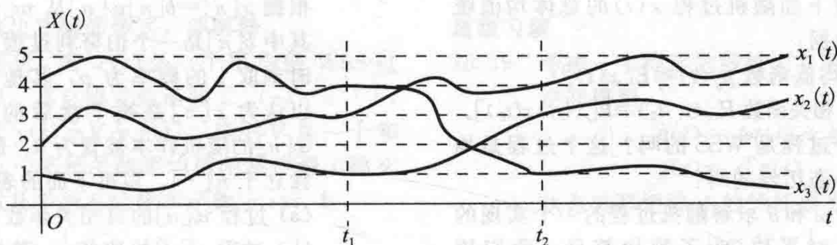


图 P10.1

果 $x_1(t)$、$x_2(t)$和 $x_3(t)$的概率分别为

$$P\{x_1(t)\}=\frac{1}{3},\quad P\{x_2(t)\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{x_3(t)\}=\frac{5}{12}$$

(a) 求解随机变量 $X(t_1)$的概率质量函数。

(b) 求解两个随机变量 $X(t_1)$和 $X(t_2)$的联合概率质量函数 $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$。

(c) 求解自相关 $R_{XX}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]$。

10.2 一个随机过程 $W(t)$可以有四个不同的时间函数作为结果，如图 P10.2 所示。四个结果的概率为

$$P\{w_1(t)\}=\frac{1}{3},\quad P\{w_2(t)\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{w_3(t)\}=\frac{1}{4},\quad P\{w_4(t)\}=\frac{1}{6}$$

给出 $W(t_1)=6$ 和 $W(t_2)=4$，求 $W(t_3)$的最小均方误差估计。

10.3 (a) 考虑一个随机过程 $X(t)$，其满足 $X(t)=A\cos(\omega_0 t)$，其中 ω_0 是一个常数。

(i) 假设 A 是一个随机变量，均匀分布在[0,1]。求解 $X(t)$的自相关 $R_{XX}(t_1,t_2)$和自协方差 $C_{XX}(t_1,t_2)$。

(ii) 当 A 是一个高斯随机变量，并且均值 $\mu_A=0.5$，方差 $\sigma_A^2=\frac{1}{12}$时，重复(i)的过程。

(iii) $X(t)$是 WSS 的吗？

(b) 现在令 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta_0)+B\cos(\omega_1 t+\theta_1)$，其中，$\omega_0\neq\omega_1$ 且为常数。A、B、θ_0 和 θ_1 都是相互独立的随机变量，并且 θ_0 和 θ_1 均在区间 $0\leqslant\theta<2\pi$ 均匀分布。过程 $X(t)$的一阶矩和二阶矩是多少？即求解 $E[X(t)]$和 $E[X(t_1)X(t_2)]$。这个过程是 WSS 的吗？

10.4 针对例 10.7 中所介绍的随机电报波，在给出 $X(t_0)=+1$ 时计算 $X(t_0+T)=+1$ 的条件概率(为 T 的函数，$T>0$)。在 $T>0$ 的什么范围内，该条件概率高于 $X(t_0+T)=-1$ 的条件概率？对于给定的 $T>0$，如果已知 $X(t_0)=+1$，要预测 $X(t_0+T)=+1$，预测错误的概率是多少？这个概率随 T 如何变化，这看起来合理吗？

10.5 (a) 假设 $x(t)$是一个均值为 μ_x 和自协方差函数为 $C_{xx}(\tau)=2e^{-|\tau|}$ 的 WSS 随机过程。这个描述中的什么特征能确保过程 $x(t)$是一个均值各态历经的，也就是几乎对每一个样本函数 $x(t)$都有时间平均等于总体平均：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,dt=\mu_x$$

(b) 如果现在 $y(t)=x(t)+Z$，其中，Z 是方差为 σ_Z^2 的零均值随机变量，并且 Z 和过程 $x(t)$不相关，求解过程 $y(t)$的均值 μ_y 和自协方差函数 $C_{yy}(\tau)$。并求解过程 $y(t)$的一般样本函数的时平均

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\,dt$$

用这个或者其他的结果确定过程 $y(t)$是否是均值各态历经的。

10.6 考虑一个 CT 随机过程 $x(t)$，其定义如下：

$$x(t)=\cos(Wt+\Theta),\quad -\infty<t<\infty$$

其中，W 和 Θ 是统计独立随机变量，W 的取值 ω 均匀分布在区间$[-\omega_0,\omega_0]$，Θ 的取值 θ 均匀分布在区间$[0,2\pi]$。

下面的三角恒等式可能会有帮助：

$$\cos(A)\cos(B)=\frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}$$

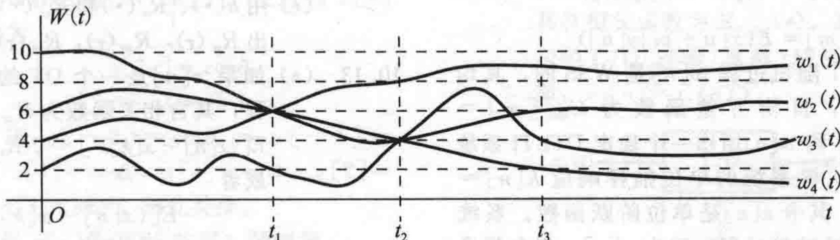


图 P10.2

(a) 求解下面随机过程 $x(t)$ 的总体均值统计数据：

(i) 均值函数 $\mu_x(t)\equiv E[x(t)]$；

(ii) 相关函数 $R_{xx}(t_1,t_2)\equiv E[x(t_1)x(t_2)]$。

(b) 这个过程是 WSS 的吗？这个过程是均值各态历经的吗？

(c) 根据 ω 和 θ 求解随机过程的一个实现的如下时平均（为了简化符号，我们用 $x(t)$ 代表这个特定实现）：

$$\langle x(t)\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\langle x(t+\tau_0)x(t)\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t+\tau_0)x(t)\,\mathrm{d}t$$，其中 τ_0 为正的常数。

(d) 可以用一个实现的长记录和合适的时平均来计算（最少是大体上的）$R_{xx}(t_1,t_2)$ 吗？

10.7 考虑随机过程

$$X(t)=\cos(\omega t+\theta)$$

其中，ω 和 θ 是独立的随机变量，ω 均匀分布在 $[-B_0,B_0]$，θ 均匀分布在 $[-\pi,\pi]$。

(a) 求解 $X(t)$ 的期望值 $E[X(t)]$。

(b) 求解自相关函数

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

(c) 过程 $X(t)$ 是 WSS 的吗？详细解释为什么是或者不是。

10.8 一个 DT 零均值 WSS 过程 $e[n]$ 有自相关函数

$$R_{ee}[m]=\frac{\sin(\pi m/3)}{m}$$

其中，$m\neq 0$，且 $R_{ee}[0]=\pi/3$。过程 $x[n]$ 由以下关系确定：

$$x[n]=(-1)^n e[n]$$

对所有的 n 成立。证明 $x[n]$ 是 WSS 的，并且画出它在 $|\Omega|\leqslant\pi$ 范围内的功率谱密度 $S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$。$x[\cdot]$ 和 $e[\cdot]$ 是联合 WSS 的吗？

10.9 假设 $x[n]$ 是一个零均值、WSS 随机序列，其自相关 $R_{xx}[m]=\delta[m]$，并且是 LTI 系统的输入，该系统的冲激响应为

$$h[n]=\begin{cases}1, & n=0,1,2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

系统输出为 $y[n]$。求解下面定义的 $R_{yy}[m]$ 和 $R_{xy}[m]$：

$$R_{yy}[m]\stackrel{\Delta}{=}E(y[n+m]y[n])$$

$$R_{xy}[m]\stackrel{\Delta}{=}E(x[n+m]y[n])$$

10.10 假设 DT 随机过程 $w[n]$ 是 WSS 的，其均值为 μ，自协方差函数为 $C_{ww}[m]=\sigma^2\delta[m]$。将 $w[n]$ 用作一个稳定 DTLTI 系统的输入，该系统的单位抽样响应 $h[n]=\beta^n u[n]$，其中 $u[n]$ 是单位阶跃函数。系统输出端的随机过程标记为 $y[n]$。现在假设根据 $x[n]=b[n]w[n]$ 从 $w[n]$ 得到 $x[n]$，其中 $b[n]$ 是一个伯努利过程，其值在任意时刻取 1 的概率为 p，其他情况取 0。可以认为 $x[n]$ 是被干扰后的 $w[n]$，其中 $w[n]$ 的随机样本被置为 0。假设过程 $b[\cdot]$ 独立于 $w[\cdot]$。写出下面的表达式：

(a) 过程 $w[n]$ 的自相关函数 $R_{ww}[m]$。

(b) 过程 $y[n]$ 的均值 μ_y 和自协方差函数 $C_{yy}[m]$。

(c) 过程 $y[\cdot]$ 和 $w[\cdot]$ 的互协方差函数 $C_{yw}[m]$。

(d) 过程 $x[n]$ 的均值 μ_x 和自协方差函数 $C_{xx}[m]$。

(e) 过程 $x[\cdot]$ 和 $w[\cdot]$ 的互协方差函数 $C_{xw}[m]$。

(f) 过程 $y[\cdot]$ 和 $x[\cdot]$ 的互协方差函数 $C_{yx}[m]$。

10.11 如图 P10.11 所示系统，$x(t)$ 是 WSS 的，其功率谱密度 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)=N_0$。根据 N_0、t_0 和 $h(t)$，求解 $r(t)$ 的期望值、$E\{r(t)\}$。

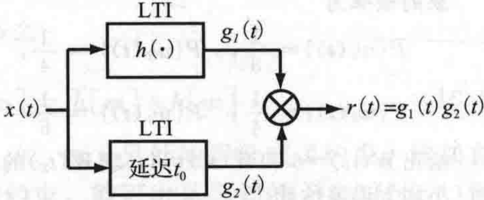


图 P10.11

10.12 如图 P10.12 所示，$p(t)$ 是一个稳定的 LTI 系统的输出，该系统冲激响应为 $h(\cdot)$，输入为 WSS 的 $x(\cdot)$，所以

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)x(t-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

假设 $y(t)=p(t)+e(t)$ 对一些与 $x(\cdot)$ 无关的零均值 WSS 过程 $e(\cdot)$ 成立。令 $e(\cdot)$ 和 $x(\cdot)$ 的自相关函数分别为 $R_{ee}(\tau)$ 和 $R_{xx}(\tau)$。

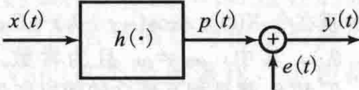


图 P10.12

(a) 用 $h(\cdot)$ 和 $R_{xx}(\cdot)$ 的适当组合表示 $R_{px}(\tau)$。

(b) 求解 $R_{xe}(\tau)$，并解释为什么 $R_{pe}(\tau)=0$。

(c) 用 $h(\cdot)$、$R_{ee}(\cdot)$ 和 $R_{xx}(\cdot)$ 的适当组合写出 $R_{ye}(\tau)$，$R_{yp}(\tau)$，$R_{yx}(\tau)$ 和 $R_{yy}(\tau)$。

10.13 (a) 如果 $x[n]$ 是一个 DT 的 WSS 随机过程，其自相关函数为 $R_{xx}[m]$，那么

$$E[(x[n]-x[k])^2]=2(R_{xx}[n]-R_{xx}[k])$$

或者

$$E[(x[n]-x[k])^2]=2(R_{xx}[0]-R_{xx}[n-k])$$

选出正确的等式，并解释。

(b) 判断：若 $x(t)$ 是一个零均值 WSS 过程，其自协方差函数 $C_{xx}(\tau)=e^{-|\tau|}$，且 $y(t)=V+x(t)$，其中 V 是一个和 $x(\cdot)$ 不相关的零均值随机变量，那么对几乎所有的样本函数 $y(t)$，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\mathrm{d}t=0$$

10.14 对下面每一部分，判断给出的叙述是正确的还是错误的。对于正确的叙述，给出简明的但是能让人信服的解释；对于错误的叙述，给出反例或者令人信服的解释。

(a) 考虑一个 CTLTI 系统，其(单位)冲激响应是 $-\delta(t-17)$。若系统的输入是一个 WSS 过程 $x(t)$，并且其自相关函数为 $R_{xx}(\tau)$，那么相应的 WSS 输出过程 $y(t)$ 的自相关函数 $R_{yy}(\tau)=R_{xx}(\tau)$。

(b) 假设一个稳定 CTLTI 系统的 WSS 输入 $x(t)$ 的自相关函数为 $R_{xx}(\tau)=e^{-|\tau|}$。相应的 WSS 输出过程 $y(t)$ 可能有自相关函数 $R_{yy}(\tau)=e^{-3|\tau|}$。

(c) 假设 $x(t)$ 是一个 CT WSS 随机过程，其自相关函数为 $R_{xx}(\tau)$，设 $y(t)$ 为

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

那么

$$R_{yx}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_{xx}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$$

10.15 一个 SSS 随机过程 $x(t)$ 一定是均值各态历经的吗？解释原因。

10.16 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个零均值 WSS 随机过程，且对所有的 τ 有 $R_{xy}(\tau)=0$，是否总是有

$$E\{x^2(t+\tau)y^2(t)\}=R_{xx}(0)R_{yy}(0)$$

成立？解释原因。

10.17 考虑一个冲激响应为 $h(t)$ 的稳定 LTI 系统，若输入一个自相关函数 $R_{xx}(\tau)=e^{-|\tau|}$ 的 WSS 信号 $x(t)$，则输出 $y(t)$ 的自相关函数 $R_{yy}(\tau)=e^{-|\tau|}$。$y(t)$ 可以总是写成 $y(t)=\alpha x(t-t_0)$(其中 α、t_0 是某个常数)的形式吗？给出解释。

10.18 设 $\{\theta_k\}$ 是一个独立同分布随机变量的集合，均匀分布在区间 $[0, 2\pi]$ 上。设过程 $x[n]$ 的构成为

$$x[2n]=\cos\theta_n$$
$$x[2n+1]=\sin\theta_n$$

那么，若 $x[-2]=\cos\theta_{-1}$，$x[-1]=\sin\theta_{-1}$，$x[0]=\cos\theta_0$，$x[1]=\sin\theta_0$，$x[2]=\cos\theta_1$，$x[3]=\sin\theta_1$，以此类推。

(a) 过程 $x[n]$ 是 WSS 的吗？请解释。

(b) 过程 $x[n]$ 是独立同分布的吗？请解释。

高级习题

10.19 考虑一个特定的线性 CT 系统的二阶状态空间模型：

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{b}x(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(t)$$

状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=-1$$
$$\lambda_2=-2$$

状态 $\lambda_1=-1$ 从输入不可达。

状态 $\lambda_2=-2$ 从输出端不可见。

设 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 分别为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=-2$ 的模型的状态变量。

假设系统在长时间之前启动，实际上在 $t=-\infty$ 时启动，并已经达到稳定状态。输入 $x(t)$ 是零均值 CT 噪声，其恒定的功率谱密度为 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$。

求解下面未知量的比例因子形式：

(a) $r_2(t)$ 的功率谱密度 $S_{r_2r_2}(\mathrm{j}\omega)$；

(b) 输出 $y(t)$ 的功率谱密度 $S_{yy}(\mathrm{j}\omega)$。

10.20 对下面每一部分，判断给出的叙述是否正确。对正确的叙述，给出简明但使人信服的解释；对于错误的叙述，给出一个反例或者令人信服的解释。

(a) 可以生成两个联合 WSS DT 过程 $x[\cdot]$ 和 $y[\cdot]$，它们的互相关函数 $R_{yx}[m]$ 是任意具体的函数 $g[m]$，已知

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|g[m]|<\infty$$

(b) 若一个 CT WSS 过程 $y(t)$ 的期望值为 μ_y，自协方差函数 $C_{yy}(\tau)=3^{-|\tau|}+2$，那么

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\mathrm{d}t=\mu_y$$

(在某种意义上，左边和右边之差的方差为 0)。

10.21 假设 $x[n]$ 是一个零均值 WSS 随机过程，其自相关函数

$$R_{xx}[k]=\rho^{|k|}, 0<\rho<1$$

求 $x[n]$ 的线性最小均方误差预测，已知 $x[n-1]$ 和 $x[n-2]$。并求出相应的均方误差。

10.22 假设 $x_c(t)$ 是一个零均值 WSS 随机过程，其自相关函数为 $R_{x_cx_c}(\tau)$。图 P10.22-1 所示的 C/D(连续/离散)转换器是理想的，即，$x_d[n]=x_c(nT)$。

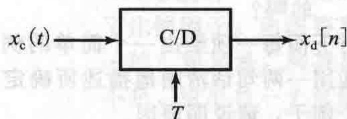


图 P10.22-1

(a) 求解均值 $E\{x_d[n]\}$，并用 $R_{x_cx_c}(\tau)$ 表示 DT 随机过程 $x_d[n]$ 的自相关函数 $E\{x_d[n+m]x_d[n]\}$。若 $x_c(t)$ 是 WSS 的，那么 $x_d[n]$ 一定是 WSS 的吗？

(b) 假设 $R_{x_cx_c}(\tau)$ 的 CT 傅里叶变换 $S_{x_cx_c}(j\omega)$ 如图 P10.22-2 所示，求 $R_{x_cx_c}(\tau)$ 和 $E\{x_c^2(t)\}$。

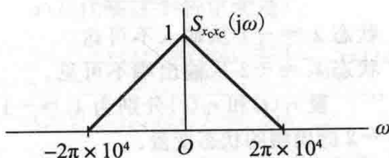


图 P10.22-2

(c) 求解 $\frac{1}{T}=40\text{kHz}$ 和 $\frac{1}{T}=15\text{kHz}$ 时的 $E\{x_d^2[n]\}$。

10.23 (a) 考虑随机过程 $X(t)=A\cos(\Omega t+\Theta)$，其中 A、Ω 和 Θ 都是互相独立的随机变量，其中 Θ 均匀分布在区间 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。假设 Ω 的概率密度函数，记作 $f_\Omega(\omega)$，是一个关于自变量的偶函数，即 $f_\Omega(-\omega)=f_\Omega(\omega)$。(实际上，如此假设不失一般性，因为 $\cos(\omega t)$ 是 ω 的偶函数。)

用 $g(\tau)$ 表示这个概率密度函数的傅里叶反变换，即 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_\Omega(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$。求解均值函数 $E[X(t)]$ 和自相关函数 $E[X(t+\tau)X(t)]$，并用 $E[A^2]$ 和 $g(\tau)$ 表示后者。这个过程是 WSS 的吗？再求出这个过程在下列情况中的自相关函数：

(i) $f_\Omega(\omega)=\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$；

(ii) $f_\Omega(\omega)$ 均匀分布在区间 $[-\omega_0,\omega_0]$；

(iii) $f_\Omega(\omega)=\frac{1}{2\pi a^2+\omega^2}\frac{2a}{}$，其中 $a>0$。

(b) 考虑随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0t+\Theta_0)+B\cos(\omega_1t+\Theta_1)$，其中 $\omega_0\neq\omega_1$，但是这两个数都是固定的且是已知的。假设 Θ_0 和 Θ_1 是独立于随机变量 A 和 B 的随机变量；并假设 A 和 B 互相正交，即 $E[AB]=0$。若 Θ_0 和 Θ_1 都均匀分布在区间 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上，求 $E[X(t)]$ 和 $E[X(t+\tau)X(t)]$。这个过程是 WSS 的吗？

10.24 对下面每一项给出一个简单的例子。若不能用一两句话清晰地描述所确定的这样一个例子，请说明原因。

(a) 是 SSS 但不是广义各态历经的或严格各态历经的随机过程。

(b) 是广义各态历经但不是 WSS 的随机过程。

(c) 不平稳的随机过程。

10.25 考虑一个 CT 的零均值 WSS 过程 $x(t)$，其相关函数

$$R_{xx}(\tau)=r_0e^{-\beta|\tau|}$$

(a) 证明 $x(t)$ 的线性最小均方误差估计，给出 $x(t-\tau_k)(k=1,2,\cdots,N$ 且 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N)$ 的测量值，是 $\hat{x}(t)=ax(t-\tau_1)$，其中 a 是某个合适的常数。换句话说，估计量只取决于最近的过去测量值。求解常数 a 和最小均方误差。一种方法是证明选择合适的 a 以满足线性最小均方误差的条件，即估计误差和数据之间的无偏性和正交性条件

$$E[\{x(t)-ax(t-\tau_1)\}x(t-\tau_k)]=0$$

或等价地，

$$E[x(t)x(t-\tau_k)]=aE[x(t-\tau_1)x(t-\tau_k)]\quad(k=1,2,\cdots,N)$$

它们是等价的，可以二选一。建立联合正规方程并证明有这样一个结果，其中只有估计量的参数向量的一个分量是非零的，即与 $x(t-\tau_1)$ 相对应的那个。

(b) 证明 $x(t)$ 的线性最小均方误差估计，给出 $x(t-\tau_k)$ 和 $x(t+\tau_k')(k=1,2,\cdots,N$，且 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N$，$0<\tau_1'<\tau_2'<\cdots<\tau_N')$ 的测量值，对某个合适的常数 a 和 b 有 $\hat{x}(t)=ax(t-\tau_1)+bx(t+\tau_1')$ 的形式。同样，建立正规方程，并注意有一个只是 $x(t-\tau_1)$ 和 $x(t+\tau_1')$ 有非零值的结果。

10.26 一个特定的 WSS 过程 $x[n]$ 有均值 μ_x，其自协方差函数 $C_{xx}[m]$ 在原点的值 $C_{xx}[0]=4$。还知道 $x[n+1]$ 基于当前测量值和过程的先前取值(即 $x[n]$ 和 $x[n-1]$)的线性最小均方误差预测为

$$\hat{x}_{n,n-1}[n+1]=\frac{1}{3}x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]+2\tag{10.81}$$

(a) 求解 μ_x；

(b) 求解 $C_{xx}[1]$ 和 $C_{xx}[2]$；

(c) 即使没有计算均方误差，也可以确保它不超过 4，这是为什么？现在实际计算上面估计量的均方误差。

(d) 假设一个线性最小均方误差预测(而不是前面使用的)形式为

$$\hat{x}_{n-K}[n+1] = \gamma x[n-K] + \zeta$$

对于某个固定值 $K \geqslant 0$ 成立，并选择 γ 和 ζ 最小化均方误差。对于 K 的哪些选择，可确保不会比式(10.81)的估计量更好？(对所有的其他 K 值，可能效果更优，这取决于剩下的自协方差函数。)

10.27 (a) 过程 $x[n]$是 WSS 的，其均值为 0，自协方差函数 $C_{xx}[m] = \alpha^{|m|}$ 对于幅度小于 1 的某个 α 成立。若计算表达式

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x[k]$$

对于过程 $x[n]$的一个特定实现，表达式的值会随着 N 变大而收敛于某个具体的值吗，如果会，那么这个值是多少？为什么？

(b) 假设

$$y[n] = W + x[n]$$

其中，$x[n]$是在(a)中定义的过程，W 是均值为 0、方差为 σ_W^2 的随机变量，并且与 $x[k]$不相关，对任意的 k 均成立。证明 $y[n]$是 WSS 的，并求解其均值 μ_y 和自协方差函数 $C_{yy}[m]$。

(c) 在(a)和(b)中定义了 $x[n]$和 $y[n]$，证明这两个过程是联合 WSS 的，并求解互协方差函数 $C_{yx}[m]$。计算：

(i) 用 $x[0]$表示 $y[1]$的线性最小均方误差估计(利用 $\hat{y}[1] = ax[0] + b$ 的形式，对于某个最佳选择 a 和 b)，以及相应的均方误差；

(ii) 用 $y[1]$表示 $x[0]$的线性最小均方误差估计，以及相应的均方误差。

(d) 对于在(b)中定义的过程，若计算表达式

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} y[k]$$

对于过程 $y[n]$的一个特定实现，表达式的值会随着 N 变大而收敛于某个具体的值吗，如果会，那么这个值是多少？为什么？

10.28 信号 $x(t)$是一个零均值 WSS 随机过程，其自相关函数为 $R_{xx}(\tau)$。考虑用 $x(t)$ 表示的随机过程 $y(t)$：

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi t + \phi)$$

说明下列情况中 $y(t)$是否是 WSS 的。简短清晰地证明你的答案。你会发现下面的三角恒等式会有帮助：

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

(a) 若 $\phi = 0$。

(b) 若 ϕ 均匀分布在区间$[0, 2\pi]$，并且由 $x(t)$决定。

10.29 假设 $x(t) = y(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$，其中 $y(t)$是均值为 μ_y、自协方差函数为 $C_{yy}(\tau)$的 WSS 过程；ω_0 是已知常量；Θ 是独立于 $y(\cdot)$并且均匀分布在区间$[0, 2\pi]$的随机变量。你会发现在这个问题的一处或多处会再次用到：

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

(a) 求过程 $x(t)$的均值 $\mu_x(t)$和自相关函数 $E[x(t+\tau)x(t)]$，并求互相关函数 $E[y(t+\tau)x(t)]$。清晰地解释你的答案的哪个特点可说明(i) $x(\cdot)$是一个 WSS 过程；(ii) $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$是联合 WSS 的。

(b) 假设 $C_{yy}(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$ 且 $\mu_y \neq 0$。求这种情况下的功率谱密度 $S_{yy}(\mathrm{j}\omega)$的表达式，并画出它完全标注的简图。求功率谱密度 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$的表达式，画出它完全标注的简图。

(c) 根据在(b)中说明的 $y(t)$的特性，$y(t)$是均值各态历经的吗？给出确定的理由。一个更加难一点儿的问题是：$x(t)$是均值各态历经的吗？

同样，描述你的推理。如果能以这里的答案为基础计算下面任意一个积分，请给出答案：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\mathrm{d}t, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t$$

其中，$y(t)$和 $x(t)$为在特定试验中取自这些量的具体实现。

10.30 假设 $x(t)$是实值、零均值 WSS 过程，其自相关函数为 $R_{xx}(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$。使 $x(t)$被一个稳定的 LTI 系统处理，该系统的实值冲激响应 $h(t)$如图 P10.30 所示。

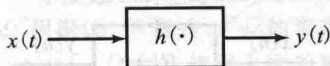


图 P10.30

(a) 我们已知 $h(t)$是因果稳定的，并且输出 $y(t)$的自相关函数

$$R_{yy}(\tau) = 3\mathrm{e}^{-3|\tau|}$$

(i) 求 $|H(\mathrm{j}\omega)|$，即 $h(t)$的傅里叶变换幅度。

(ii) 假设有稳定因果反变换。求此 LTI 系统的一个可能的 $h(t)$。除了比例因子，你的答案是不是唯一的？如果是，解释原因。如果不是，给出另一个可能的 $h(t)$的例子。

(b) 现在假设不知道 LTI 系统 $h(t)$ 的其他信息，除了它是稳定的，但是这里知道互相关函数

$$R_{yx}(\tau)=\mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)-2\mathrm{e}^{-2\tau}u(\tau)+\mathrm{e}^{-3\tau}u(\tau)$$

求一个可能的冲激响应 $h(t)$。你的结果是唯一的吗？如果是，解释原因。如果不是，给出另一个可能的 $h(t)$。

10.31 (a) 假设 $x(t)$ 是一个 WSS 的随机过程，且是一个稳定因果的 LTI 系统的输入，该系统的冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$。若 $\mu_x=3$，求解输出的均值。

(b) 考虑两个零均值、联合 WSS 的过程 $x(t)$ 和 $w(t)$，其自相关函数分别为 $R_{xx}(\tau)$ 和 $R_{ww}(\tau)$。它们的互相关函数为 $R_{wx}(\tau)$。过程 $x(t)$ 被一个冲激响应为 $h(t)$ 的稳定因果 LTI 系统滤波，如图 P10.31所示。

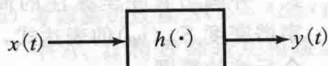


图 P10.31

输出是 WSS 随机过程 $y(t)$。用 $R_{xx}(\tau)$、$R_{ww}(\tau)$、$R_{wx}(\tau)$ 和 $h(t)$ 求解 $w(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 的互相关函数 $R_{wy}(\tau)$。从下面的列表中选择正确的形式。简洁地解释你的理由(根据你的答案)。

(i) $R_{xx}(\tau)$ 与 $h(-\tau)$ 卷积。
(ii) $R_{xx}(\tau)$ 与 $h(\tau)$ 卷积。
(iii) $R_{wx}(\tau)$ 与 $h(-\tau)$ 卷积。
(iv) $R_{wx}(\tau)$ 与 $h(\tau)$ 卷积。
(v) $R_{ww}(\tau)$ 与 $h(-\tau)$ 卷积。
(vi) $R_{ww}(\tau)$ 与 $h(\tau)$ 卷积。

10.32 现在希望通过一个如图 P10.32 所示的 LTI 系统处理一个随机过程 $x[n]$ 来得到一个 WSS 随机过程 $y[n]$。

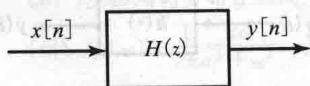


图 P10.32

输入随机过程 $x[n]$ 的自相关为

$$R_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$$

选择系统函数 $H(z)$，则过程 $x[n]$ 和 $y[n]$ 之间的互相关为

$$R_{xy}[m]=(0.5)^{-m}u[-m]$$

相应的互功率谱密度为

$$S_{xy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{1}{1-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}$$

在下面的每一部分，选择(i)(ii)和(iii)中正确的说法。若不止一个正确，指出所有正确的说法，简要说明你的理由。

(a) 为了得到想要的 $y[n]$，$H(z)$ 一定代表：
(i) 一个稳定的最小相位系统；
(ii) 一个稳定的但不是最小相位的系统；
(iii) 根据已知的信息但并不唯一的一个系统。

(b) 根据给出的信息可以知道，当 $k\neq 0$ 时，$x[n]$ 和 $x[n+k]$ 是
(i) 绝对独立的；
(ii) 绝对不独立的；
(iii) 可能独立也可能不独立的。

(c) 根据给出的信息可以知道 $y[n]$ 和 $y[n+1]$ 是
(i) 绝对独立的；
(ii) 绝对不独立的；
(iii) 可能独立也可能不独立的。

扩展习题

10.33 假设 $x[n]$ 是一个独立同分布随机过程，其概率密度函数在每一个 n 值处是均值为 0、方差为 σ^2 的高斯密度。

(a) 求解过程 $x[n]$ 的均值 $\mu_x[n]$ 和自协方差函数：

$$E\{(x[n+m]-\mu_x[n+m])\cdot(x[n]-\mu_x[n])\}$$

$y[n+m]$ 和 $y[n]$ 之间的相关系数是 $\rho_{n+m,n}$，以及输出和输入的互协方差是

$$E\{(y[n+m]-\mu_y[n+m])(x[n]-\mu_x[n])\}$$

(b) 随机过程 $y[n]$ 由 $x[n]$ 得到

$$y[n]=x[n]+\alpha x[n-1]$$

其中，α 是一个已知的常数。求解输出过程 $y[n]$ 的均值 $\mu_y[n]$，其自协方差函数

$$E\{(y[n+m]-\mu_y[n+m])\cdot(y[n]-\mu_y[n])\}$$

如果有的话，你的答案中哪些取决于 n？检查你的各个答案在下面三种极限情况下的取值是否合理(即通过一些明显的推理可以直接校验的值)：

$$\alpha\to-\infty,\quad \alpha\to 0,\quad \alpha\to\infty$$

(c) 假设想估计 $y[n+1]$，已给出 $y[n]$ 的测量值，也就是想利用以下形式的线性估计进行一阶预测：

$$\hat{y}[n+1]=ay[n]+b$$

求使均方误差(见下式)最小的 a 和 b 的值

$$E\{(\hat{y}[n+1]-y[n+1])^2\}$$

并求这个最小均方误差的值。同样，检查你的答案在(b)中提到的三种极限

情况下是否合理。

(d) 在二阶预测的情况下，重复(c)，选择

$$\hat{y}[n+2] = ay[n] + b$$

最小化

$$E[(\hat{y}[n+2] - y[n+2])^2]$$

(e) 可以证明 $y[n+m]$和 $y[n]$是二元高斯的。利用这一点写出或用其他使人信服的方式描述联合密度

$$f_{y[n+m],y[n]}(y_1, y_2)$$

(i) $m=1$ 时和(ii)$m \geqslant 2$ 时。(ii)的结果中的什么信息告诉你通过使用更理想的估计量，可以在(d)中更好地进行二阶预测？

(f) 若 $x[n]$是一个独立同分布随机过程，其概率密度函数在每一个 n 值处是均值为 μ、方差为 σ^2 的高斯密度。

10.34 假设随机过程 $y[n]$为

$$y[n] = w[n] + \beta w[n-1]$$

其中，$w[n]$是独立同分布过程，且在每个时刻处取±1 的概率相等。

(a) 证明 $y[n]$均值为 0 且是 WSS 的。在下面四种情况下，分别求解并画出 $y[n]$在 $|m| \leqslant 4$ 时的自相关函数 $R_{yy}[m]$：$\beta=3$、1、-1 和-3。

(b) 用一个合适的计算方案产生过程 $w[n]$在 $n=0 \sim 100$ 的采样实现。然后对(a)中给出的 β 的四个值的每一个，用已经产生的 $w[n]$得到过程 $y[n]$在 $n=0 \sim 100$的相关实现。画出你的 $w[n]$的实现和 $y[n]$的四个实现。$y[n]$在不同 β 值下的图形有质的区别吗？如果有，描述它们。

10.35 假设 $w[n]$是一个 WSS 随机过程，均值为 μ_w，自协方差函数为 $C_{ww}[m]=\sigma_w^2\delta[m]$。

(a) 随机信号 $w[n]$是一个因果系统在时刻 n 的输入，此时该系统的输出 $y[n]$满足 $y[n]=w[n]+\alpha w[n-1]$。系统的单位采样响应 $h_1[n]$是什么？解释你如何知道系统对所有的 α 都是 BIBO 稳定的。

(b) 对(a)中的系统，根据 μ_w、σ_w^2 和 α 求解 μ_y、$C_{yw}[m]$和 $C_{yy}[m]$。

(c) 用(b)中的结果，根据这个问题中的参数计算 $y[n+1]$和 $y[n]$之间的相关系数 ρ。然后确定当 α 分别取何值时，相关系数 ρ 取最大和最小值，并求出 ρ 的极值。

(d) 假设 $w[n]$是因果稳定系统在时刻 n 的输入，此时该系统的输出 $y[n]$满足

$$y[n] = \alpha y[n-1] + w[n-1]$$

求系统的冲激响应 $h_2[n]$，并确定 α 在什么范围可以保证这个因果系统的稳定性。

(e) 重复(b)，但是针对的是(d)中的系统，而不是(a)中的系统，并假设它在过去无穷远处开始工作(所以它在任何有限的时间内都处于稳定状态)。

(f) 重复(c)，针对(d)中的系统，并使用(e)中的结果。但是，对于这个系统，你需要为 ρ 的极值计算的是最小上界和最大下界，而不是最大值和最小值，因为尽管你可以无限接近这些极值，但是你不能得到精确的值，解释原因。

10.36 假设一个因果系统的输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的关系为

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-D]$$

其中，$x[n]$是独立同分布的且在每一个时间步上其值均匀分布在区间$[-1, 1]$，α 和 D 分别为比例因子参数和(整数)延迟参数。这个系统对所有的 α 是稳定的。

(a) 根据 α 和 D，计算均值 μ_x 和 μ_y，以及自协方差函数 $C_{xx}[m]$和 $C_{yy}[m]$。

(b) 用一个合适的计算方案，产生 $n=1, \cdots, 500$时段信号 $x[n]$的实现部分。通过在这个信号实现上的计算，在假设均值各态历经、协方差各态历经(两个假设事实上在这个独立同分布例子中都成立)的条件下，用数字在 $|m| \leqslant 10$ 时估计 μ_x 和 $C_{xx}[m]$的值。例如，延迟为 2 时自相关函数的一个貌似可信的估计量为

$$R_{xx}[2] \approx \frac{1}{498}\sum_{k=1}^{498} x[k+2]x[k]$$

你接近了期望得到的结果吗？

(c) 根据(b)得到的 $x[n]$的实现，并选择 $\alpha=1$，$D=5$。使用上面的输入输出关系计算在 $n=6, \cdots, 500$ 时段相应的 $y[n]$的实现。现在假设只知道这个 $y[n]$序列值和上面 $x[n]$到 $y[n]$关系的模型化形式，但是不知道 α、D 和 $x[n]$(除了它是一个独立同分布过程的一个实现外)，对于 $n=6, \cdots, 60$，画出 $y[n]$的这部分实现，并看通过对其进行检查能否推论出关于 α 和 D 的信息。

(d) 假设 $y[n]$是各态历经的，以计算均值和协方差，估计 $|m| \leqslant 10$ 时的 μ_y 和 $C_{yy}[m]$。画出产生的自协方差，并看能否从图像中推出 α 和 D。

10.37　考虑一个稳定的因果的DT系统，其输入为$w[n]$，输出为$y[n]$，并满足

$$y[n]=-\left(\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right)+w[n]$$

在这个例子中，输出被一个N阶自回归模型控制，因为输出取决于它过去的值以及当前输入值。假设$w[n]$是一个独立同分布过程，每一个时刻(独立于其他时间的结果)取$+M$和$-M$的概率相等。假设已知M和系数a_k，求解$y[n]$的线性最小均方误差估计量$\hat{y}[n]$，根据$y[\cdot]$所有过去时刻的值，求出相应的均方误差。(提示：通过研究上面的方程猜测$\hat{y}[n]$，然后利用控制线性最小均方误差估计的正交原则验证猜测。此外也会用到系统的因果性和稳定性。)

10.38　假设给出一对联合WSS随机过程$x(t)$和$w(t)$，已知其互相关函数$R_{xw}(\tau)$。若$y(t)$是$x(t)$通过已知冲激响应为$h(t)$的稳定的CT的LTI系统，得到的WSS随机过程，根据已知的函数写出$R_{yw}(\tau)$的原始表达式。若给出$R_{wx}(\tau)$，写出$R_{wy}(\tau)$的原始表达式。作为检验，在下列情况下，确认恢复你期望的结果：(i) $w(t)=x(t)$；(ii) $w(t)=y(t)$。

10.39　信号$s(t)$通过一个多通道信道传输，如图P10.39-1所示，其中$T=10^{-3}=1\text{ms}$。$s(t)$是一个零均值WSS随机过程，其自相关函数如图P10.39-2所示。设计一个接收机补偿多通道传输。假设接收机的结构如图P10.39-3所示，求解接收机的增益常数α，使得$\hat{s}(t)$和$s(t)$的均方误差最小化，即求α来最小化如下定义的ϵ：

$$\epsilon=E\{(s(t)-\hat{s}(t))^2\}$$

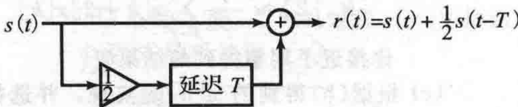


图　P10.39-1

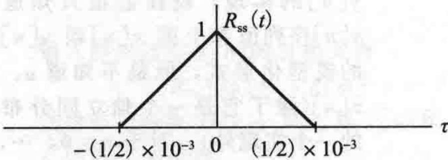


图　P10.39-2

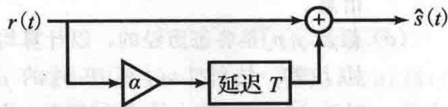


图　P10.39-3

10.40　水下声音通信系统(underwater acoustic communication system)有许多由环境波动和多通道现象带来的难题。尤其是，当信号从信号源发出，在它传输到接收机的过程中有许多通道可供声音传输。例如，两个传输的公共通道包含直接的或者视线通道或者底部反射通道。在接收机端，如果这些通道在时间上重叠，那么分离多通道是很困难的。然而，如果能准确估计到达信号的时间差，就可以准确地恢复传输信号。对一个多通道环境下传输的信号，考虑如图P10.40-1所示的模型。假设α_1是衰减，Δ_1是传输的直接通路延迟，其与$\alpha_1 e^{-s\Delta_1}$的信道系统函数一致。类似地，α_2是衰减，Δ_2是底部反射通路延迟，其与$\alpha_2 e^{-s\Delta_2}$的系统函数一致。假设直接到达信号比底部反射信号更强，即$\alpha_1>\alpha_2$。

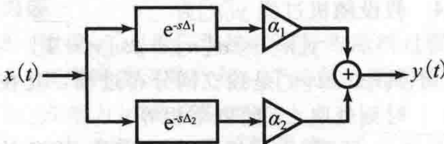


图　P10.40-1

尽管没有传输信号$x(t)$的详细测量值，但是可以将信号模型化为已知自相关函数的随机过程。基于接收机的测量数据，也可以得到接收信号$y(t)$的自相关估计值。$x(t)$和$y(t)$的自相关函数$R_{xx}(\tau)$和$R_{yy}(\tau)$如图P10.40-2所示。τ的单位是秒。

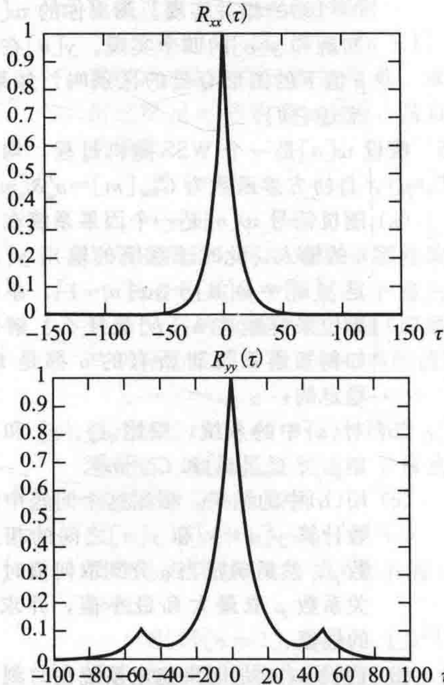


图　P10.40-2

(a) 根据 $R_{xx}(\tau)$和问题中的参数 α_1、α_2、Δ_1 和 Δ_2 求 $R_{yx}(\tau)$和 $R_{yy}(\tau)$的表达式。

(b) 若 $R_{yx}(\tau)$如图 P10.40-3 所示，估计 α_1、α_2、Δ_1 和 Δ_2 的值。

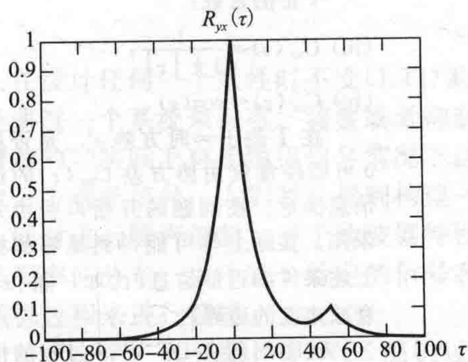


图 P10.40-3

10.41 假设一个 CT 信号 $x(t)$被发射机广播，并使

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t-\Delta)$$

表示特定接收机的天线收集到的信号。可以把接收到的信号 $y(t)$看作由没有显著延迟与衰减地到达直接通路的传输信号 $x(t)$和有延迟 Δ 与衰减因子 α 的反射信号构成。假设 $x(t)$被模型化为一个 WSS 的随机过程，其均值为 μ_x，自协方差函数为 $C_{xx}(\tau)$。

(a) 求解(i) $y(t)$的均值，(ii) $y(t)$和 $x(t)$的互协方差函数，(iii) $y(t)$的自协方差函数。用 $C_{xx}(\tau)$和常数 μ_x、α、Δ 表示以上所有结果。说明得出 $x(t)$和 $y(t)$是联合 WSS 的依据是什么。

(b) 假设知道 $\mu_x=0$，但是不知道 $C_{xx}(\tau)$、α 和 Δ 中的任何一个值。然而假设可以由 $y(t)$的大量测量值得到其自协方差 $C_{yy}(\tau)$，如图 P10.41 所示。利用(a)中的结果画出 $C_{xx}(\tau)$的一种情况的全标注图，并详细给出与图中 $C_{yy}(\tau)$完全一致的 α 和 Δ 的数值。说明你需要对得到的 $C_{xx}(\tau)$进行何种检测来确保它是有效的自协方差函数，然后验证所选择的 $C_{xx}(\tau)$的确满足这些检测。

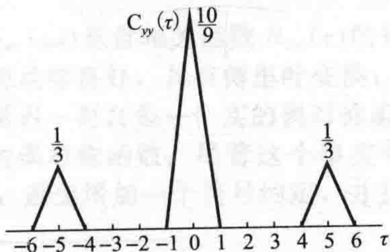


图 P10.41

10.42 在多种多样的真实环境下，两个或者更多的不相关信源通过有串扰的信道或系统被接收。在接收机或传感器中，这些信号互相干扰，处理接收到的信号并分离它们的做法是有意义的。一种方案如图 P10.42-1 所示。

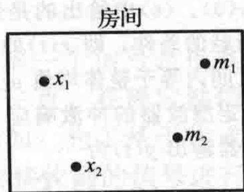


图 P10.42-1

两个信源 $x_1(t)$和 $x_2(t)$可能是语音或音乐；接收信号 $m_1(t)$和 $m_2(t)$为两个扬声器的输出。室内声学(room acoustics)可以被有效地模型化为 LTI 系统。声源 i 到扬声器 k 的冲激响应为 $h_{ik}(t)$。这两个接收信号的二输入二输出 LTI 模型如图 P10.42-2所示。

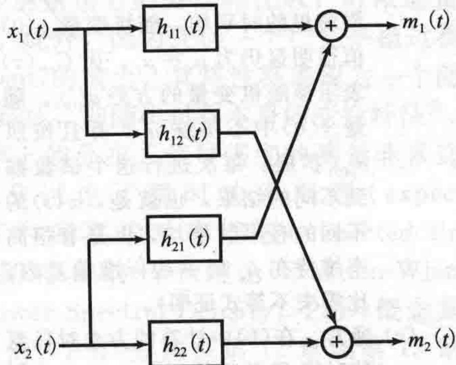


图 P10.42-2

若扬声器 1 距声源 1 较近，而扬声器 2 距声源 2 较近，(简化本题中的代数问题)并假设 $h_{11}(t)=h_{22}(t)=\delta(t)$是合理的。这里还假设两个声源 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是 WSS 的、零均值的、不相关的，并且其自相关函数已知。

对于从 $m_1(t)$和 $m_2(t)$中恢复 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的途径，通常需要能估算出冲激响应 $h_{12}(t)$和 $h_{21}(t)$的方法。通过测量扬声器输出的自相关和互相关函数可以得到一些信息。

(a) 根据 $R_{x_1x_1}(\tau)$、$R_{x_2x_2}(\tau)$、$h_{12}(t)$和 $h_{21}(t)$，求解 $R_{m_1m_1}(\tau)$、$R_{m_2m_2}(\tau)$和 $R_{m_1m_2}(\tau)$。

(b) 若已知 $h_{12}(\tau)=h_{21}(\tau)$，且你只能测量 $R_{m_1m_1}(\tau)$、$R_{m_2m_2}(\tau)$或 $R_{m_1m_2}(\tau)$中的一个，哪一个对于求解 $h_{12}(\tau)$是最有用的?

10.43　假设 CT WSS 随机过程 $x(t)$ 的均值为 μ_x，自协方差函数为 $C_{xx}(\tau)$，二者均未知。想通过取 $x(t)$ 的时平均来估计总体的均值 μ_x。为了这一目标，令 $x(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 滤波器，$h(t)$ 可以在下面(a)中确定，然后按照(b)中说明检测其采样输出 $y(0)$。(c)中给出的是过程 $x(t)$ 均值各态历经的条件，即 $x(t)$ 的时平均在无限长的区间内等于整体均值 μ_x 的条件。

(a) 确定滤波器的冲激响应 $h(t)$，使得滤波器输出 $y(t)$ 为

$$y(t)=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

其中，T 已经给出。证明 WSS 输出过程 $y(t)$ 的均值 μ_y 和输入的均值 μ_x 相同，并用 $C_{xx}(\cdot)$ 和 T 表示输出的协方差函数 $C_{yy}(\tau)$。

(b) 假设在时刻 $t=0$ 对(a)中滤波器的输出 $y(t)$ 采样，则

$$y(0)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

这是 $x(t)$ 在长度为 $2T$、中心为 0 的有限窗里的时平均，随机变量 $y(0)$ 的均值很明显仍为 $\mu_y=\mu_x$。用 $C_{xx}(\tau)$ 和 T 表示该随机变量的方差 $\sigma^2_{y(0)}$。随机变量 $y(0)$ 中心围绕 μ_x，并且按照方差 $\sigma^2_{y(0)}$ 扩展。每次进行这个试验都会得到不同的结果，也就是，$x(t)$ 的一个不同的有限时平均，但是有很高的概率维持在 μ_x 的一些标准偏差内(用切比雪夫不等式证明)。

(c) 通常，在(b)中计算的方差对任意有限的时间 T 是正的，故 $x(t)$ 的有限时平均不等于总体平均值。然而，如果 T 趋于∞时，(b)中计算的方差趋于 0，那么当 T 趋于∞时，实际上 $y(0)$ 将趋于 μ_x，即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\mu_x$$

402 ~ 420

这就是这里想要的。对于下面的哪个 $C_{xx}(\tau)$，在 T 趋于∞时，在(b)中计算的方差趋于 0？

(i) $C_{xx}(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}$；

(ii) $C_{xx}(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}+A$，其中 A 为一个正的常数；

(iii) $C_{xx}(\tau)=\dfrac{1}{1+|\tau|}$；

(iv) $C_{xx}(\tau)=\cos(\tau)$

在 T 趋于∞时方差 $\sigma^2_{y(0)}$ 是否趋于 0 可以经常仅由协方差 $C_{xx}(\tau)$ 的近似信息决定。在问题的开始声明协方差未知。实际上你可能得到足够的检查上述条件的近似信息(比如，随 $|\tau|$ 的衰减速度的边界)。

这个问题在 DT WSS 过程的情况下可能已经有所描述，那么你可能已经把它的结论看作相关过程 $x[n]$ 的情况下(弱)大数定律的概括，而前面遇到这个"定律"的情况是独立同分布过程。

10.44　对本章描述的下面每个随机过程的例子，确定该过程是否是二阶各态历经的。

(a) 随机相位的正弦函数 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$，其中 A、ω_0 是非零常数，θ 是均匀分布在区间 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的随机变量。

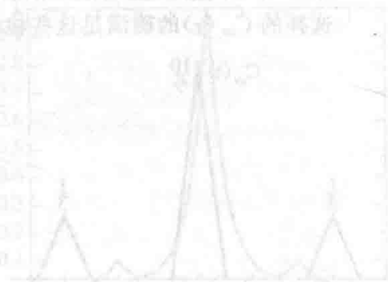
(b) 随机幅度和相位的正弦函数 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$，其中 ω_0 是非零常数，A 是均匀分布在区间 $-2\leqslant A\leqslant 2$ 的随机变量，θ 是均匀分布在区间 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的随机变量。

(c) 伯努利过程 $x[n]$，在每一个时刻 n，

$$P(x[n]=1)=p$$
$$P(x[n]=-1)=1-p$$

在每一个时刻 n 的取值独立于其他时刻的取值。

(d) 随机电报波。



第11章 功率谱密度

在设计任何一个线性时不变(LTI)系统时，从频域上理解一个信号是极其重要的。不论是通过一个系统来提取、调整或者抑制这个信号。对于这一点，在确定性信号情况下是很清楚的，实际上对于随机信号情况下这仍然是明确的。例如，为了从干扰或噪声背景中提取一个音频信号，人们就会想到构建一个LTI滤波器，对接收到的信号进行音频分量增强，同时进行噪声抑制。对于滤波器特性的设计，需要理解音频和噪声分量的频谱，或者说是频率的分布。由于这个特定的信号和噪声的波形通常是未知的，因此，常常把它们看作随机过程来进行建模。

对于一个广义平稳，即WSS随机过程，试图找到一个合适的频域描述是很有挑战性的。对于典型的广义平稳过程，其各个样本函数在整个时间轴上都存在，在任何时刻往往具有非零的瞬时功率，并在任意时间间隔内具有非零的时间平均功率(time-averaged power)，因此具有无限大的能量(infinite energy)。此时这些函数不可能得到普通的表现良好的傅里叶变换频率函数。相反地，每个样本函数的变换得到的是广义的频率函数，它只能使用频域积分来解释。与前面第1章中处理有限能量信号的方法相比较，有限能量信号具有零时间平均功率，以及表现良好的傅里叶变换。此外，因为任何一个广义平稳过程的特定样本函数可以看成概率试验(probabilistic experiment)的输出，其特性将表现为一个随机分量，因此，有必要寻找代表整个样本函数类的转换特征，即随机过程本身的变换特征[⊖]。

421

一个有用的方法是专注于信号功率的期望在频率上的分布。信号强度的测量非常适合用广义平稳过程的二阶矩特性来描述。11.1节讨论了瞬时功率期望(expected instantaneous power)的频谱分布。11.2节探讨了时间平均功率期望(expected time-averaged power)的频谱分布。11.2节还给出了爱因斯坦-维纳-辛钦理论(Einstein-Wiener-Khintchine theorem)，它说明了两个功率谱密度(Power Spectral Density，PSD)概念是相同的。11.3节讲述了怎样运用功率谱密度的一些示例。PSD分别在第12章和第13章中的信号估计和信号检测中扮演着重要角色。

11.1 瞬时功率期望的频谱分布

这一节将探讨CT系统的一些细节概念，DT系统的情况与之非常相近。考虑到把$x(t)$看作通过一个单位电阻的电压或电流激励，那么$x^2(t)$的数值就可当作信号$x(t)$的瞬时功率。假设$x(t)$是一个瞬时功率的期望为有限值的广义平稳过程，那么有$E[x^2(t)]=R_{xx}(0)<\infty$，从而可以得到

$$E[x^2(t)] = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{11.1}$$

其中，$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$是自相关函数$R_{xx}(\tau)$的连续时间傅里叶变换(CTFT)。这里假设整个自相关函数表现足够良好，具有傅里叶变换，尽管允许变换中有冲激分量。因为自相关函数对于自变量延迟τ而言是一个实的偶对称函数，即$R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$，它的变换$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$对于$\omega$也是实的偶对称函数。尽管这个事实可以用来简化公式符号，但在这里将继续使用符号$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$，避免增加一个符号约定，并且保持这个量是$R_{xx}(\tau)$的傅里叶变换这个事实。

⊖ 即傅里叶变换域描述。——译者注

11.1.1 功率谱密度

函数 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 的物理解释可以认为是信号 $x(t)$ 通过一个理想的带通滤波器得到的结果，就像图 11.1 所表明的那样。这个滤波器的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 在通带为数据 1，在阻带为数据 0。

由于 $y(t)$ 是从 $x(t)$ 得到的，输出 $y(t)$ 的瞬时功率的期望可以解释为 $x(t)$ 在所选择的通带上

422

所具有的瞬时功率的期望。利用如下公式：

$$S_{yy}(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|^2 S_{xx}(\mathrm{j}\omega) \quad (11.2)$$

这就是第 10 章中创建的式(10.72)。该瞬时功率的期望可以通过下式计算：

$$E[y^2(t)] = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{通带} S_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \quad (11.3)$$

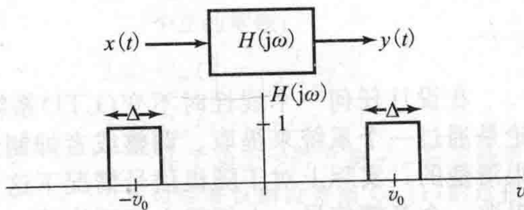


图 11.1 从广义平稳过程中提取一个频率带宽的理想带通滤波器

前面的两个等号是用信号 $y(t)$ 替换信号 $x(t)$，运用式(11.1)中得到的结果。与此同时，最后的等号是遵循式(11.2)，以及使用理想带通滤波器特性所得出的结果。因此这个积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{通带} S_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \quad (11.4)$$

是 $x(t)$ 在通带内瞬时功率的期望值，无论通带多么窄，或者它在频率轴上的位置是在哪里。因此，考虑用 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 来描述广义平稳过程 $x(t)$ 分布在某个频率处的瞬时能量的期望大小是合理的。这就是把广义平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数的变换 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 称为信号 $x(t)$ 的功率谱密度的原因。这类似于在第 1 章中关于有限能量信号的能量谱密度(ESD)的定义由来。

注意不管通带多么窄，$y(t)$ 的瞬时功率以及由此得到的瞬时功率的期望 $E[y^2(t)]$ 总是非负的。对于一个足够窄的通带，非零值的频率集中在中心频率为 $\pm\omega_0$ 处、带宽为 Δ 的部分。在通带内的这些频率点处 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 是连续的，可以得到

$$0 \leqslant E[y^2(t)] \approx \frac{1}{\pi} S_{xx}(\mathrm{j}\omega_0)\Delta \quad (11.5)$$

类似地，如果 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 在 $\omega=0$ 时是连续的，那么对于一个中心频率为 $\omega_0=0$、总带宽为 Δ 的一个窄的通频带，可以得到

$$0 \leqslant E[y^2(t)] \approx \frac{1}{2\pi} S_{xx}(\mathrm{j}0)\Delta \quad (11.6)$$

此外，$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 为了遵循对于 ω 是实的、偶对称的函数，这个功率谱密度在所有频率处应该是非负的，即

$$S_{xx}(\mathrm{j}\omega) \geqslant 0, \text{对所有 } \omega \text{ 都成立} \quad (11.7)$$

423

同样，这个说法的一个小小推论是，$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 中任意冲激也都必须有正的积分面积。

前面的学习已经建立了这个理论：如果函数 $R(\tau)$ 是一个广义平稳过程的自相关函数，且 $R(0)$ 为有限的，则它的傅里叶变换 $S(\mathrm{j}\omega)$ 是关于 ω 实的、偶对称的非负函数，且它在整个频率轴上的积分是有限的。

反之，也是正确的：如果 $S(\mathrm{j}\omega)$ 是一个关于 ω 实的、偶对称的非负函数，且它在整个频率轴上的积分是有限的，那么它的反变换 $R(\tau)$ 是一个广义平稳过程的自相关函数，且 $R(0)$ 有限。

这个理论结果的后续推论就是将在 11.3.2 节要描述的离散时间的版本。在 11.3.2 节将讨论所谓的模型滤波器，其允许通过一个指定的功率谱密度或者自相关函数，来构建一个随机过程。事实上，$R(\tau)$ 是一个广义平稳过程的自相关函数，当且仅当它的傅里叶变换 $S(\mathrm{j}\omega)$ 是实的、偶对称的，并且是非负的，这称为波切内尔定理(Bochner's theorem)，对应的在离散情况下的结论是赫尔格罗茨定理(Herglotz's theorem)。这一结果立马可以显

示，例如有一个矩形函数

$$F(\tau) = K > 0, |\tau| < \tau_0 \quad 和 \quad = 0, |\tau| \geqslant \tau_0 \tag{11.8}$$

它就不能成为一个广义平稳过程的自相关函数，因为它的变换 $G(\mathrm{j}\omega)$是一个 sinc 函数，因此对一定范围内的 ω 一定是负数的。而另一方面，比如一个三角函数：

$$F(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}, |\tau| < \tau_0 \quad 和 = 0, |\tau| \geqslant \tau_0 \tag{11.9}$$

它就是一个有效的自相关函数，因为它的变换是一个 sinc 函数的平方，因此满足是实的、偶对称的且非负的条件。

因为功率谱密度 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$是自相关函数的傅里叶变换，所以对自相关函数的拉普拉斯变换取一个名字是有用的，在这里将把 $S_{xx}(s)$称为复数功率谱密度(complex PSD)。

例 11.1 一个正弦随机过程的功率谱密度

一个正弦随机过程

$$X(t) = A\sin(\omega_0 t + \Theta) \tag{11.10}$$

有一个特征频率 ω_0，但是它的振幅 A 和相位角 Θ 是独立的随机变量，并且 Θ 均匀分布在$[-\pi, \pi]$上。在例 10.5 中已经说明了它为广义平稳信号，均值 μ_x 为 0，以及自相关函数如下所示。

$$C_{XX}(\tau) = \frac{E[A^2]}{2}\cos(\omega_0\tau) = R_{XX}(\tau) \tag{11.11}$$

在例 10.5 中定义的 $X(t)$实际上写成了一个余弦而非正弦，但是将在那里运用的推导方法代到本例中，并进行小小的修改，同样会产生相同的结论。对应的功率谱密度是式(11.11)中给出的自相关函数 $R_{XX}(\tau)$的连续时间傅里叶变换

424

$$S_{XX}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\pi E[A^2]}{2}(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)) \tag{11.12}$$

因此，正如可预期的那样，瞬时功率的期望集中在正弦信号的频率处，即在$\pm\omega_0$ 处，并且相应的冲激强度正比于振幅信号的二阶矩 $E[A^2]$。

这个例子可以在各个方向上推广。作为例子，考虑正弦函数的和

$$X(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i t + \Theta_i) \tag{11.13}$$

它的特征频率为 ω_i，但是幅度 A_j 和相位角 Θ_j 对于每个 j 是独立的随机变量，每个 Θ_j 均匀分布在$[-\pi, \pi]$上，并且要么设定每两个幅度值$\{A_i\}$是两两正交的，即对于 $i \neq j$ 有 $E[A_i A_j]=0$，要么设定$\{\Theta_i\}$是两两独立的。经过例 10.5 中相似的计算可以得到

$$R_{XX}(\tau) = \sum_i \frac{E[A_i^2]}{2}\cos(\omega_i\tau) \tag{11.14}$$

$R_{XX}(\tau)$的连续时间傅里叶变换是对应的功率谱密度：

$$S_{XX}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_i E[A_i^2](\delta(\omega-\omega_i) + \delta(\omega+\omega_i)) \tag{11.15}$$

例 11.1 推出了一个离散的频率谱线，或者叫作线谱，其反映了该随机过程是通过一个离散的正弦集构建的事实。与此相反，下面的一个例子有一个连续频率谱，即反应在频带上所有频率处的功率谱。

例 11.2 指数相关过程的功率谱密度

考虑一个连续时间广义平稳过程 $x(t)$有自相关函数

$$R_{xx}(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0 \tag{11.16}$$

例 10.7 中的随机电报波形的自相关函数就是这种形式，对应有 $\alpha = 2\lambda$，其中 λ 代表了在电平±1之间的泊松开关速率。在这种情况下，循环周期长度的期望就是 $2/\lambda$，它揭示了开关频率为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2/\lambda} = \frac{\pi\alpha}{2} \tag{11.17}$$

这粗略地说明了感兴趣的频率范围。$R_{xx}(\tau)$的连续时间傅里叶变换是这个过程的功率谱密度，写为

$$S_{xx}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \tag{11.18}$$

在图 11.2 中画出了函数 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$在 $\alpha=6$ 的情况，其中标出了对应于 $\omega_0=\pi\alpha/2=3\pi$ 和 $-\omega_0$ 的频点。

425

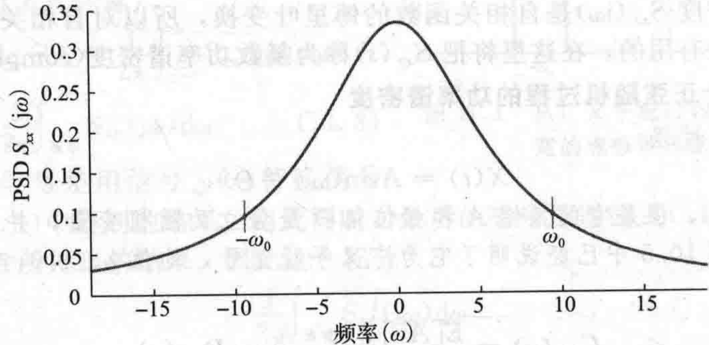


图 11.2　在 $\alpha=6$ 的情况下，一个有着指数自相关 $R_{XX}(\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$ 的广义平稳过程的功率谱密度◀

11.1.2　波动谱密度

一个广义平稳过程 $x(t)$的自相关函数 $C_{xx}(\tau)$，同样是广义平稳过程 $x(t)-\mu_x$ 的自相关函数。$x(t)-\mu_x$ 代表了过程 $x(t)$相对于均值 μ_x 上的偏差，或者是均值上的波动。下面将给出 $C_{xx}(\tau)$的连续傅里叶变换，它同样是一个功率谱密度，在第 10 章中用 $D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$来表示，但是它表示的是一个随机过程波动的瞬时功率的期望在频率上的分布情况。因此，应当将 $D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$作为过程 $x(t)$的波动谱密度，简称 FSD(Fluctuation Spectral Density)。就像在推导 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$的时候一样，可以推导出其限制条件

$$D_{xx}(\mathrm{j}\omega) \geqslant 0 \tag{11.19}$$

基于此可立即推证出一个不等式，就是在第 10 章中已经推导出来的

$$|C_{xx}(\tau)| \leqslant C_{xx}(0) \tag{11.20}$$

它是由下面的关系得到的

$$\begin{aligned}|C_{xx}(\tau)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} D_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |D_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}|\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_{xx}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega = C_{xx}(0)\end{aligned} \tag{11.21}$$

426

例 11.3　均值各态历经的条件

本例推导一个广义平稳过程 $x(t)$的均值具有各态历经的时域和频域条件。这里所谓均值各态历经，即对于一个样本函数时间平均，将收敛到总体的平均 μ_x。特别地，考虑一个稳定 LTI 系统，它的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2T},\quad |t| < T \quad 和 = 0, t 取其他值 \tag{11.22}$$

如果 $x(t)$是这个系统的输入，从而根据第 10 章的内容，它的输出 $y(t)$同样是一个广义平稳的，其均值为

$$\mu_y = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = \mu_x \tag{11.23}$$

其自相关函数为

$$C_{yy}(\tau) = \overline{R}_{hh}(\tau) * C_{xx}(\tau) \tag{11.24}$$

其中，$\overline{R}_{hh}(\tau)$是式(11.22)所给出的冲激响应的自确定性相关函数。这个确定性的自相关函数是一个三角脉冲，它在原点处的高度为$1/(2T)$，并在两端线性递减，当$|\tau|=2T$时递减为0。

输出 $y(t)$在 $t=0$ 时有

$$y(0)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(v)\mathrm{d}v \tag{11.25}$$

显然它就是过程 $x(t)$在长度为 $2T$ 时间窗上的时间平均计算。这个时间平均的期望值是$E[y(0)]=\mu_y=\mu_x$，也就是所感兴趣的总体平均μ_x。这个时间平均的相关方差是$\mathrm{Var}\{y(0)\}=C_{yy}(0)$。使用$\Lambda(\tau)$来表示一个三角脉冲，它在原点处的高度为$1/(2T)$，并在两端线性递减，在$|\tau|=2T$处递减为0。因此可以利用式(11.24)写出

$$\mathrm{Var}\{y(0)\}=C_{yy}(0)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Lambda(\tau)C_{xx}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11.26}$$

在 $T\to\infty$时，$x(t)$的时间平均将趋向于它的期望值，即μ_x，当且仅当式(11.26)中的变量在 $T\to\infty$时趋近于0(收敛到期望值将导致方差变到0，这种收敛就称为均方收敛到期望值)。通过使用式(11.26)右边中的$C_{xx}(\tau)$来替代检查在$T\to\infty$时是否有$C_{yy}(0)\to 0$。对于任何指定的$C_{xx}(\tau)$，这个条件可以被明确地测试。式(11.26)中的变量在$T\to\infty$时变为0的充分条件是，当$\tau\to\infty$时$C_{xx}(\tau)\to 0$，这意味着当采样样本越来越远时就越来越不相关。

为了推导出均值各态历经性的频谱条件，注意式(11.26)中的$C_{yy}(0)$可以被写为

$$C_{yy}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}D_{yy}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{11.27}$$

式(11.24)两边进行连续时间傅里叶变换，可得到

$$D_{yy}(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|^2D_{xx}(\mathrm{j}\omega) \tag{11.28}$$

式中，$|H(\mathrm{j}\omega)|^2$是一个频域上的 sinc 函数的平方，它在原点的高度为$|H(\mathrm{j}0)|^2=1$，且它的第一个零点在$|\omega|=\pi/T$。因此，当$T\to\infty$时，这个$|H(\mathrm{j}\omega)|^2$函数将更加狭窄地集中在原点附近，且原点处的函数值固定保持为1。由此可以推出式(11.27)和(11.28)在$T\to\infty$时$C_{yy}(0)\to 0$，当且仅当它的波动谱密度$D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$在$\omega=0$处没有冲激。因此，一个过程的均值是各态历经的，当且仅当它的波动谱密度在原点处没有冲激。◀

427

到目前为止，关注点全部集中在CT的广义平稳过程，而针对DT情况，与之完全并行的结论就是：自相关函数$R_{xx}[m]$的离散时间傅里叶变换(DTFT)$S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是关于$\Omega$的实的、偶对称的、非负的函数，也就是一个离散时间过程$x[n]$的功率谱密度。类似地，$D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是波动过程$x[n]-\mu_x$的波动谱密度。接下来的例子将展示如何应用这些离散时间过程的结论。

例 11.4　一个一阶自相关过程的功率谱密度

考虑一个广义平稳离散时间过程$x[n]$，其均值为μ_x，自协方差函数为

$$C_{xx}[m]=\sigma_x^2(\rho\delta[m-1]+\delta[m]+\rho\delta[m+1]) \tag{11.29}$$

显然这个过程对于相邻时间的采样是相关的，相关系数为ρ，但是隔了两个或多个时间的过程采样就不是相关的，其对应的功率谱密度就是这个自协方差函数的离散时间傅里叶变换，可写为

$$D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sigma_x^2(1+2\rho\cos(\Omega)) \tag{11.30}$$

它对所有Ω是非负的，当且仅当$|\rho|\leqslant 0.5$。同理可知，这也是式(11.29)成为一个自协方差函数的条件。

注意，如果ρ靠近$+0.5$，可知功率谱密度的峰值在频率$\Omega=0$处，但是如果ρ靠近-0.5,功率谱密度的峰值就在频率$\Omega=\pm\pi$处。这反映了一个事实：在相邻采样点之间有正的协方差，意味着这些信号的关联性为正，从而总体上是缓慢变化的；然而在相邻采样

点之间有负的协方差，那就意味着信号的关联方向在这个时间步到下一个时间步的过程中倾向于发生变化。◀

在上述例子中，$\rho=0$ 这个特殊情况是值得单独来处理的，下面的例子对此进行分析。

例 11.5 一个独立同分布过程的功率谱密度

考虑一个独立同分布过程 $x[n]$，它在每个时刻的数据都是与其他时刻的数据相独立的，其分布用一个均值为 μ_x 和方差为 σ_x^2 的分布函数 $f_X(x)$ 表征。例 10.6 所给出的伯努利过程就是这样一个特殊例子。例如，在每个时刻，在 $x[n]=1$ 处有概率 p，在 $x[n]=-1$ 处有概率 $1-p$，并与其他时刻相互独立，可以推得有 $\mu_x=2p-1$ 且

428

$$\sigma_x^2 = E[X^2]-\mu_x^2 = 1-(2p-1)^2 = 4p(1-p) \tag{11.31}$$

这样一个独立同分布序列的自协方差函数是

$$C_{xx}[m] = E[(x[n+m]-\mu_x)(x[n]-\mu_x)] = \sigma_x^2\delta[m] \tag{11.32}$$

因为对于 $m\neq 0$，上面式子描述的两个减去均值的偏差过程($x[n+m]-\mu_x$、$x[n]-\mu_x$)是独立的，然而当 $m=0$，上述表达式描述的可以简化为 σ_x^2 的定义表达式，从而这个过程的波动谱密度是

$$D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sigma_x^2 \tag{11.33}$$

它在频率 Ω 的整个范围内，即$[-\pi, \pi]$内是常数，或者说是平坦的。这个独立同分布过程的自相关函数是

$$R_{xx}[m] = C_{xx}[m]+\mu_x^2 \tag{11.34}$$

可推出这个过程的功率谱密度是

$$S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sigma_x^2+2\pi\mu_x^2\delta(\Omega) \tag{11.35}$$

这个功率谱密度在所有频率上是常数，除了在 $\Omega=0$ 处有一个冲激，它反映了这个过程的均值所提供的功率。如果均值 $\mu_x=0$，那么这个功率谱密度在整个频率范围$[-\pi, \pi]$是常数。

注意，因为在这个例子中的结论是由一阶矩和二阶矩推导出来的，事实上，并不真正要求这个过程是一个独立同分布的。它需要满足的是这个过程在不同的时刻的数据是不相关的，但并不需要一定要求独立。◀

离散时间白过程(DT white process) 前面的例子给出了一个零均值的、离散时间广义平稳过程 $x[n]$，其数据满足跨时间不相关，有 $C_{xx}[m]=K\delta[m]$，其中 $K>0$，即$x[n]$的功率谱密度在所有频率处均为常数值 K。一个具有这个特性的广义平稳过程称为是强度为 K 的白过程(这里借用了白光是所有相同强度颜色光的混合物这个概念)。一个非白色的广义平稳过程称为是有色的。

反过来描述仍然正确：一个广义平稳过程 $x[n]$有一个平坦的谱，那么它就是零均值的和跨时间不相关的。在这里假设

$$S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = K > 0 \tag{11.36}$$

对所有频率 Ω 都成立。其中，K 是一个正常数。它对应的自相关函数是通过求解其功率谱密度的离散时间傅里叶反变换得到的，可以推出：

$$R_{xx}[m] = K\delta[m] \tag{11.37}$$

假设这个过程的均值是 μ_x，从而

$$C_{xx}[m] = R_{xx}[m]-\mu_x^2 = K\delta[m]-\mu_x^2 \tag{11.38}$$

其对应的离散时间傅里叶变换为

$$D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = K-2\pi\mu_x^2\delta(\Omega) \tag{11.39}$$

因为波动谱密度在所有 Ω 处是非负的，包括在 $\Omega=0$ 时。显然必须只有在 $\mu_x=0$ 这种情况下，才能避免在 $\Omega=0$ 时出现负的冲激。因此，这个白过程有着零均值，以及它的自相关函数是 $C_{xx}[m]=K\delta[m]$，即这个过程是跨时间不相关的。

429

上面得出的用来建立一个白过程需要有零均值的论证，同样可以用来说明任何一个广

义平稳过程的功率谱密度在 $\Omega=0$ 处要求没有冲激，那它必须对应为一个零均值的过程。但反过来描述不成立，因为一个零均值过程的功率谱密度在 $\Omega=0$ 处可能会有冲激，就像下面的例子所展示的那样。功率谱密度在 $\Omega=0$ 处有一个冲激，就表明随机过程有一个非零的均值，当且仅当在 $\Omega=0$ 时波动谱密度中不存在相同强度的冲激。

例 11.6 一个功率谱密度在 $\Omega=0$ 时有冲激的零均值过程

假设 $x[n]$ 是一个白过程，因此它的均值为 0，以及它的自相关函数 $R_{xx}[m]=K\delta[m]$ $(K>0)$。令

$$y[n]=A+x[n] \tag{11.40}$$

其中，A 是一个零均值随机变量，其方差为 $\sigma_A^2>0$，且与 $x[\cdot]$ 不相关的。因此过程 $y[n]$ 的均值仍然是 0，且它的自相关函数是

$$R_{yy}[m]=\sigma_A^2+R_{xx}[m]=\sigma_A^2+K\delta[m]=C_{yy}[m] \tag{11.41}$$

对应的功率谱密度可通过计算上述公式的离散时间傅里叶变换来确定：

$$S_{yy}(e^{j\Omega})=2\pi\sigma_A^2\delta(\Omega)+K=D_{yy}(e^{j\Omega}) \tag{11.42}$$

因此，尽管 $y[n]$ 是零均值的，但它的功率谱密度在 $\Omega=0$ 时有一个冲激。◀

上例中的结果与 $y[n]$ 不满足均值各态历经的事实相关，尽管 $x[n]$ 是满足均值各态历经的。$y[\cdot]$ 的任何一个样本(一个概率实验输出)的时间平均取决于这次样本对应的随机变量 A 的特定值，并且对于所有的样本(所有的概率实验输出)都可能是非零的。因此这个瞬时功率的期望值有一个非零的“DC”，或者说零频分量。由于缺乏均值的各态历经，所以对应的功率谱密度 $D_{yy}(e^{j\Omega})$ 在 $\Omega=0$ 时就存在冲激项。利用例 11.3 中的推导思路，不难推出离散时间情况下的相应结果。

连续时间白过程(CT white process) 如同离散时间情况一样，对于一个连续时间的广义平稳过程 $x(t)$，如果它的功率谱密度在所有频率处都是相同的，即 $S_{xx}(j\omega)=K>0$ 对所有的 ω 都成立，就称它为强度为 K 的白过程。相应地，其自相关函数 $R_{xx}(\tau)=K\delta(\tau)$。然而，式(11.1)在整个频率轴 ω 上的积分展示了这种过程的瞬时功率的期望必定是无限的。因此，一个白的连续时间过程是不可实现的，并且不满足前面已经假设的条件 $E[x^2(t)]<\infty$，但它仍然是一个有用的假设，其原因就像一个冲激信号尽管是不可实现的，但它作为一个假设在许多分析领域中都有用。

一个重要的广义平稳连续时间物理过程就是由常温下电阻中电子的热扰动所产生的，其输出覆盖到太赫兹范围内的功率谱密度，并在室温下的确是基本恒定的。这个过程直接表现为一个开路电阻的端口上的一个波动电压，并且由 J. B. Johnson 在实验中观察发现。而在经典物理上的理论推导则是由 Johnson 在贝尔实验室的同事 H. Nyquist 给出的。对于一个电阻值为 R，温度为 T 开尔文度，并且用 k 来表示玻耳兹曼常数，那么这个 Johnson-Nyquist(约翰逊-奈奎斯特)噪声的功率谱密度持续到非常高的频率下都是平坦的，数据大小为 430

$$S_{xx}(j\omega)=2kTR \tag{11.43}$$

在频率达到 kT/h 量级时，会出现量子效应，这个功率谱密度在幅度上开始衰变。这里的 h 是普朗克常量。

对于一个相关的连续时间随机过程，如果它的功率谱在频率轴上的一个有限区域是非零的、平坦的，并且在这个频率范围之外都是 0，即对于 $|\omega|<\omega_m$ 有 $S_{xx}(j\omega)=K>0$，且对于 $|\omega|\geq\omega_m>0$ 有 $S_{xx}(j\omega)=0$，则称它为一个带限的白过程，其对应的自相关函数是

$$R_{xx}(\tau)=K\frac{\sin(\omega_m\tau)}{\pi\tau} \tag{11.44}$$

11.1.3 互谱密度

当处理关联的两个广义平稳过程 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 时，第 10 章介绍了互谱密度 $S_{yx}(j\omega)$ 和

$D_{yx}(\mathrm{j}\omega)$，分别作为互相关函数 $R_{yx}(\tau)=R_{xy}(-\tau)$ 和 $C_{yx}(\tau)=C_{xy}(-\tau)$ 的傅里叶变换。就像第 10 章结尾处所展示的那样，例如在确定一个输入为 $x(t)$、输出为 $y(t)$ 的线性时不变系统的频率响应时，这些互谱密度就会出现。它们在通过一个过程 $x(\cdot)$ 的量测值来估计另一个过程 $y(\cdot)$ 的线性最小均方误差估计中，同样是很关键的，就像下一章将展示给大家的维纳滤波器的设置那样。下面的例子用来说明处理关联的两个广义平稳随机信号之和，当需要计算求和后的谱密度时，互谱密度是怎样产生的。

例 11.7 两个广义平稳随机信号之和的波动谱密度

假设一个传感器产生了一个输出信号 $z(t)$，这个输出信号与两个关联的广义平稳信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的关系如下式所示：

$$z(t)=x(t)+\alpha y(t-\Delta) \tag{11.45}$$

信号 $x(t)$ 来自于一个源，其信息无衰减、无延迟地被传感器所接收。而信号 $y(t)$ 来自于另一个源，其信息被传感器有衰减 α、有延迟 Δ 地接收。

利用式(11.45)可得到其期望值的产生关系

$$\mu_z=\mu_x+\alpha\mu_y \tag{11.46}$$

将这个关系与式(11.45)相减，可得到各自信号在均值上的偏差关系

431

$$\widetilde{z}(t)=\widetilde{x}(t)+\alpha\,\widetilde{y}(t-\Delta) \tag{11.47}$$

利用这个表达式来计算 $z(t)$ 的自协方差函数，如下所示：

$$E[\widetilde{z}(t+\tau)\,\widetilde{z}(t)]=C_{xx}(\tau)+\alpha[C_{xy}(\tau+\Delta)+C_{yx}(\tau-\Delta)]+\alpha^2C_{yy}(\tau)=C_{zz}(\tau) \tag{11.48}$$

观察一下 $z(t)$ 的自协方差函数，考虑到其本身与 t 无关，所以式(11.48)最后的等式就简化了符号，写成 $C_{zz}(\tau)$。

利用式(11.48)的连续时间傅里叶变换，可立马证明：

$$D_{zz}(\mathrm{j}\omega)=D_{xx}(\mathrm{j}\omega)+\alpha\underbrace{[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta}D_{xy}(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta}D_{yx}(\mathrm{j}\omega)]}_{2\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta}D_{yx}(\mathrm{j}\omega)\}}+\alpha^2D_{yy}(\mathrm{j}\omega)\geqslant 0 \tag{11.49}$$

其中，最后一个不等号调用了式(11.19)中所说明的任何波动谱密度都是非负的特性。◀

一个基本不等式 前面的例子能让大家推导出一个重要的不等式是用于约束两个处理关联的广义平稳过程的互波动谱密度(cross-FSD)的。式(11.49)中的不等式对所有 α 和 Δ 的值都满足。这个 α 的二次表达式要保障是非负的，那么下面的条件必须被满足

$$(\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta}D_{yx}(\mathrm{j}\omega)\})^2\leqslant D_{xx}(\mathrm{j}\omega)D_{yy}(\mathrm{j}\omega) \tag{11.50}$$

这个不等式左侧可以取到的最大值 $|D_{yx}(\mathrm{j}\omega)|^2$，因此可得以下基本不等式

$$|D_{yx}(\mathrm{j}\omega)|^2\leqslant D_{xx}(\mathrm{j}\omega)D_{yy}(\mathrm{j}\omega) \tag{11.51}$$

这个不等式是对下列不等式的扩展，这是有关两个随机变量 X 和 Y 的一个非常熟悉和相似的不等式

$$\sigma_{YX}^2\leqslant\sigma_{XX}\sigma_{YY} \tag{11.52}$$

其中，$\sigma_{XX}=\sigma_X^2$ 和 $\sigma_{YY}=\sigma_Y^2$。这里的相似性并不让人意外，因为进入频域中对处理关联的随机过程进行分析，就是在每个频点处进行简单的处理，就像处理两个随机变量的分析一样。这个命题在下一章中还会出现，那将与维纳滤波器相联系。

前面的推导给出式(11.51)中的限制，就是函数 $D_{yx}(\mathrm{j}\omega)$ 成为了两个处理关联的广义平稳过程 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 的互波动谱密度的必要条件。这个限制也是充分的，有着指定波动谱密度 $D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 和 $D_{yy}(\mathrm{j}\omega)$ 的过程 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$，如果满足式(11.51)中的限制，在这个意义上就可以构建其互波动谱密度为 $D_{yx}(\mathrm{j}\omega)$ 的、处理关联的两个平稳过程。这个结论的证明列举在本章的习题 11.20 中。在第 12 章的相关内容中会再一次出现类似的结论，特别是会在习题 12.26 中出现。

11.2　时间平均的功率谱期望和爱因斯坦-维纳-辛钦理论

11.1 节展示了一个广义平稳过程的功率谱密度，定义为它的自相关函数的傅里叶变换，描述了这个过程的瞬时功率的期望在频率上的分布。在一个连续时间过程 $x(t)$的情况下，功率谱密度是 $E[x^2(t)]$在频谱上的分布。如果 $x(t)$的相关是各态历经的，也就是说在评估相关性时，其时间均值和总体均值几乎是相等的，此时 $E[x^2(t)]$在总体成员(即所有概率实验输出)中的平均就等同于时间平均功率。这暗示了一个替代路线，对于一个广义平稳过程的功率谱，可以基于分析时间平均功率的频谱分布来得到。在这里推导的是基于连续时间情况的实现方法，因为这个符号书写起来简单一些。但是对于离散时间的广义平稳过程情况，其实现方法的推导是非常相近的。

432

像在本章开始提到的那样，一个广义平稳过程的各个样本函数不可能有表现良好的傅里叶变换。不过用一个有限时间窗去截短一个样本函数，通常都会得到一个有限能量信号，它就有一个良好定义的傅里叶变换。令 $x_T(t)$是 $x(t)$通过$(-T, T)$的矩形窗得到的，即在范围$(-T, T)$有 $x_T(t)=x(t)$，在这个范围之外 $x_T(t)$为 0，即

$$x_T(t) = w_T(t)x(t) \tag{11.53}$$

其中，窗函数 $w_T(t)$定义为在$|t|<T$ 范围时为 1，其他范围为 0。用 $X_T(\mathrm{j}\omega)$表示 $x_T(t)$的傅里叶变换，1.3.2 节中的结果说明了 $x_T(t)$的能量谱密度由下式给出：

$$\overline{S}_{xx}(\mathrm{j}\omega) = |X_T(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{11.54}$$

回忆一下，一个信号的能量谱密度描述了这个信号的能量是怎样在频率上分布的。第 1 章的结果针对的是确定信号情况，因此上面的表达式应该看作是针对广义平稳过程的各自样本函数的运用。

式(11.54)中的能量谱密度是 $x_T(t)$的确定性自相关的傅里叶变换，正如在第 1 章中针对离散时间情况所建立的那样，而对于连续时间情况，可用相同的方式来推导。下面给出这个关系的连续时间傅里叶变换对

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_T(\alpha)w_T(\alpha-\tau)x(\alpha)x(\alpha-\tau)\mathrm{d}\alpha \Leftrightarrow |X_T(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{11.55}$$

其中，双箭头表示傅里叶变换对。将两端都除以 $2T$(这是有效的，因为通过一个常数缩放一个信号，对应着它的傅里叶变换会用相同的因子进行缩放)产生了下面的变换对：

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} w_T(\alpha)w_T(\alpha-\tau)x(\alpha)x(\alpha-\tau)\mathrm{d}\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2T}|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{11.56}$$

在表达式右侧的数值是通过一个窗长度标准化的能量谱密度，称为有限持续时间信号 $x_T(t)$的周期图(periodogram)。与能量谱密度相关的单位是“energy/Hz”，因此这个周期图的单位是“power/Hz”，从而周期图描述了对于某个特定的样本函数，其时间平均功率(即总能量除以总时间)是怎样在频率上分布的。

433

要将应用在一个样本函数的关系推广到一个随机过程整体，必须在样本函数整体上取平均，即统计其期望。利用傅里叶变换的线性性质，一个傅里叶变换的期望值是这个期望值的傅里叶变换，因此可以对式(11.56)两端取期望，来获得一个新的傅里叶变换对。将左侧的求期望计算移到积分运算里面而产生的变换对如下：

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} w_T(\alpha)w_T(\alpha-\tau)E[x(\alpha)x(\alpha-\tau)]\mathrm{d}\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2T}E[|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2] \tag{11.57}$$

现在调用 $E[x(\alpha)x(\alpha-\tau)]=R_{xx}(\tau)$这个事实，它不依靠 α，所以可以将自相关 $R_{xx}(\tau)$移出到这个积分外。因此式(11.57)的左侧变为

$$\frac{1}{2T}R_{xx}(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} w_T(\alpha)w_T(\alpha-\tau)d\alpha = R_{xx}(\tau)\Lambda(\tau) \tag{11.58}$$

其中，$\Lambda(\tau)$是一个三角冲激，它在原点处的高度为 1，且线性递减，在$|\tau|=2T$ 时递减为 0，就像例 11.3 所描述的那样，并且它是 $w_T(\tau)$确定性自相关函数除以 $2T$ 所得到的结果。

前面的推导步骤允许将式(11.57)中的变换对写成：

$$R_{xx}(\tau)\Lambda(\tau)\Leftrightarrow\frac{1}{2T}E[|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2] \tag{11.59}$$

现在令 T 趋近于∞，就得到期望的结果。

$$R_{xx}(\tau)\Leftrightarrow S_{xx}(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2] \tag{11.60}$$

当 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 是一个 ω 的连续函数时，这个极限的解释是最直接的，就像 $R_{xx}(\tau)$ 是明显可积分的情况那样。式(11.60)揭示的结果就是爱因斯坦-维纳-辛钦理论，其在 19 世纪 30 年代由维纳证明，并由辛钦独立推导，不过早在 1914 年爱因斯坦就提出来过。它说明了功率谱密度的确可以用来解释过程中的平均时间功率期望的频谱分布。

对上述推导过程做一点小小改进，可推出对处理关联的两个广义平稳过程 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 之间的互谱密度的相同结果。使用下列相关的表达式替代式(11.56)，有

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}w_T(\alpha)w_T(\alpha-\tau)x(\alpha)y(\alpha-\tau)\mathrm{d}\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{2T}X_T(\mathrm{j}\omega)Y_T(-\mathrm{j}\omega) \tag{11.61}$$

其中，$Y_T(\mathrm{j}\omega)$ 是窗信号 $y_T(t)=w_T(t)y(t)$ 的连续时间傅里叶变换。对两端取期望并使 $T\to\infty$，可以得到

434

$$R_{xy}(\tau)\Leftrightarrow S_{xy}(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[X_T(\mathrm{j}\omega)Y_T(-\mathrm{j}\omega)] \tag{11.62}$$

频谱估计 从实验或仿真数据中估计 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 或 $S_{xy}(\mathrm{j}\omega)$ 的任务称为频谱估计(spectrum estimation)。这个话题很宽泛，但是在这儿有必要强调一下使用 EWK 定理的结论来实现频谱估计的一个重要实现方法。就 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 估计的情况，其基本思路是：对于精心挑选和固定 T 长度的系列数据，计算在每个不重叠窗上的周期图，然后平均这 M 个结果，以产生这个功率谱密度的平均周期图估计。这个估计值将近似等于这个周期图的期望值，即

$$\frac{1}{2T}E[|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2] \tag{11.63}$$

如果各个窗是充分不相关的，那么平均估计可以将单个估计误差的方差减少到 $1/M$。接下来就是来分析，使用周期图的期望来近似感兴趣的功率谱密度，这能够近似到多好的程度。

为了回答这个问题，先回到式(11.59)。这个表达式左侧的变换是 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 与三角脉冲的傅里叶变换 sinc 平方的频域卷积，因此

$$\frac{1}{2T}E[|X_T(\mathrm{j}\omega)|^2]=\frac{1}{2\pi}S_{xx}(\mathrm{j}\omega)*\frac{2\sin^2(\omega T)}{\omega^2 T} \tag{11.64}$$

由此可见，周期图的期望值是这个功率谱密度的一个平滑，或者卷积后的版本。其中，平滑是将真的功率谱密度与 sinc 平方函数卷积得到的结果。因此，周期图的期望值不完全等于这个功率谱密度。

在式(11.64)中 sinc 平方函数的主瓣是最大值两端扩展到 $\pm\pi/T$（主瓣两边零点），由此可以分析出一个基于周期图的谱估计的频率分辨率能力。对于 $S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$ 中的两个频谱尖峰，如果峰值之间的距离少于 π/T，那么它们在谱估计中将可能不会被认为是两个分开的峰值。这个在分辨率上的限制也可以通过这样的观察来确认：通过一个长度为 $2T$ 的窗所能检出来的最低频率谱分量，必须要求这个窗内提供一个周期的有效数据。显然这个周期对应于一个频率 $\omega_{\min}=\pi/T$。

对于一个已固定的 T，此时可以通过仔细选择除矩形窗 $w_T(t)$ 以外的其他类型的窗，来提高性能。在时域中窗的边缘下降得越不陡峭，频域上频谱的滚降截止就越陡峭。当使用那种圆锥形的窗时，可以通过将 M 个窗进行少许重叠来使用，此时能更有效地使用所

获得的数据，并由此减小噪声方差。一个广泛使用的且利用圆锥形重叠窗的算法就是韦尔奇方法(Welch'method，是为离散情况开发的方法)。除这些方法之外，要获得更高的分辨率需要选择一个更长的窗，即更大的 T。

435

注意到在极限 $T\to\infty$ 时，式(11.64)中的 sinc 平方函数表现为一个冲激，这是很有趣的。精确的公式表达为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{2\sin^2(\omega T)}{\omega^2 T}\to\delta(\omega) \tag{11.65}$$

因为当 $T\to\infty$ 时，$S_{xx}(\mathrm{j}\omega)*\delta(\omega)=S_{xx}(\mathrm{j}\omega)$，所以 EWK 理论可以基于式(11.64)推导出来。这可能与前面所讲的由式(11.59)描述的 EWK 理论推导稍有不同。

基于一个类似的处理过程，可以得到互谱密度 $S_{xy}(\mathrm{j}\omega)$ 的估计值。但是现在，这里可以通过对 $\frac{1}{2T}X_T(\mathrm{j}\omega)Y_T(-\mathrm{j}\omega)$ 取平均值，来近似式(11.62)中的期望值。

经过类似的处理，可以得到上述所有结果的离散时间版本，因此在这里就不详细叙述了。不过，接下来的例子展示了离散情况是怎样运用(这些结果)的。

例 11.8 对于一个±1的伯努利过程的周期图平均

例 11.5 建立了一个伯努利过程，其在每个时刻以相等概率取值为±1，某个时刻的值与其他时刻的值是相互独立的，并且在每个时刻有均值 $\mu_x=0$ 和方差 $\sigma_x^2=1$。此外，它有一个平坦的功率谱密度。对于此情况，有

$$S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sigma_x^2=1 \tag{11.66}$$

尽管在这种简单情况下可以直接进行分析，但对于一些复杂情况，比如像例 11.5 那样的情况，直接分析可能不行。对于复杂过程，实际情况是可能仅有一些量测值，或者是需要使用一个仿真器来产生这个过程的样本函数，在这些情况下，这个过程的功率谱密度的估计值就可能只能通过周期图取平均的方式来得到。对于前面伯努利独立同分布过程的例子，这个过程的仿真是非常简单的。

在图 11.3 中，第 1 行的每个曲线图展示的是窗长度为 50 的周期图，没有取平均(因此 $M=1$)，是通过运行一个仿真独立计算出 4 个独立且不同的数据段。这些曲线图展示了从一段数据到另一段数据的分析结果如何不同，因为它们是随机变化的。尝试把这些曲线中的任何特殊峰值解释为关于这个过程的根本性东西的指示，那都可能是错误的。对于每一种情况，其纵轴方向扩展的数值反映了在周期图估计中的标准偏差(即方差的平方根)。作为频率 Ω 的函数，周期图波形的变量(variation)是与选择的平滑期望值的窗相当的。对于一个长为 50 的窗，周期图波形的变量以 $\pi/50$ 为刻度变化。

图 11.3 中的第 2 行曲线图展示了对于窗长为 50 和 200 的周期图，但是用了 $M=4$ 重叠窗的平均。在这两种情况下方差会减少到 1/4，也就是说会让标准差减少到 1/2。对于两种长度的窗，纵轴上值的扩展程度是类似的，因为它们有相同的值 M。并且正如预计的那样，可以看到这个值的扩展只是第一行图形中的一半。这两个窗长度的差异是针对 Ω 上周期图波形的变量：对于较短的窗(窗长为 50 的)是以 $\pi/50$ 为刻度变化的；对于较长的窗(窗长为 200 的)是 $\pi/200$ 为刻度变化的。这反映了较长的窗可以获得在 Ω 上更好的理解(也就是频率分辨率)。

436

最底行重复了第 2 行的实验，但是在实现上进行了 $M=16$ 个窗的平均，这与原始的独立周期图情况相比，减少到了 1/4 标准差。

在这些不同的曲线图中发现的行为与前面基于 EWK 理论结果的谱估计讨论是一致的。

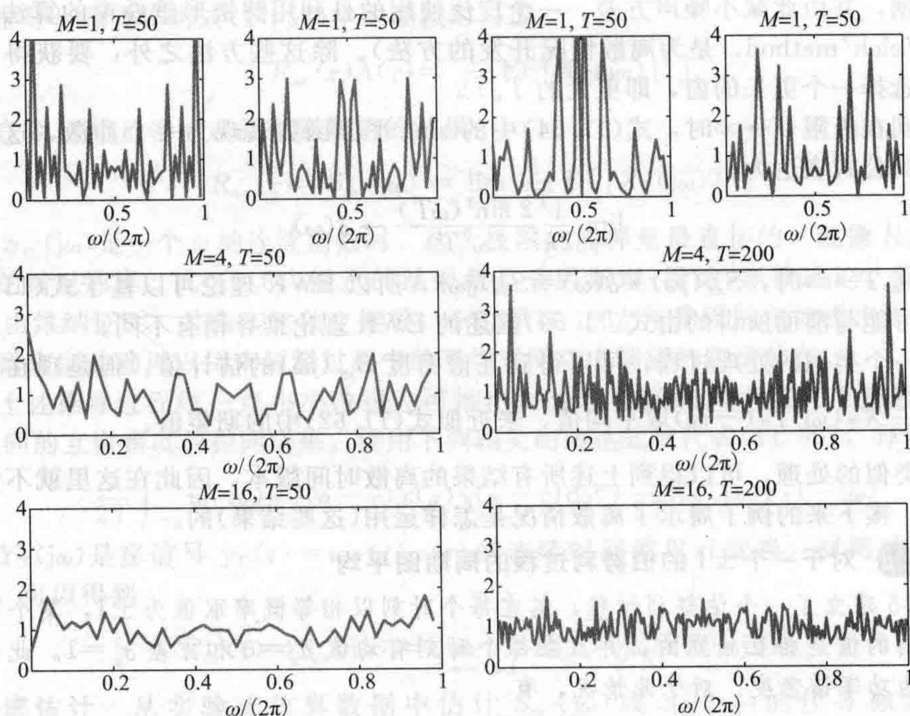


图 11.3 利用周期图平均法对一个±1的伯努利过程的功率谱密度进行谱估计。第1行中的几个曲线图展示了窗长为50的每个独立的周期图，这是用一个仿真程序运行的不同数据段的处理。第2行的曲线图展示了对于窗长分别为50和200的周期图，但是进行了$M=4$个窗的平均。最下面一行重复了第2行的实验，但是进行了$M=16$个窗的平均。所有的曲线都在频率范围$[0, 2\pi]$上的

◀

11.3 应用

本节将给出一些设定的额外例子，在这些例子中，PSD提供了有用的分析或者是计算工具，以及洞察能力。

437

11.3.1 揭示循环分量

PSD计算的一个重要的应用就是揭示循环行为的存在，它与PSD出现的峰值相关联。接下来给出来源于生物医药信号过程的例子，也是这类观察的代表。

例 11.9 心脏心率变化

图11.4a展示了一个心电图记录（electrocardiogram，ECG），这是一位正在休息的正常人的心电信号。定义一个人的心跳（heartbeat）为连续R波之间的间隔。R波是心电图记录中那些高高的尖峰，它是由心脏心室每一次按节拍收缩致使电极产生的电波。计算心跳持续时间的倒数，可得到以每秒多少次心跳为单位的瞬时心率（HR），这让人联想到心跳是与所有时间点有关的。倒数计算产生了分段常数的HR信号$x(t)$，如图11.4b所示。

对于PSD度估计，可以通过对信号$x(t)$进行采样来得到一个离散时间信号，采样率至少与数据中的最快的心率相等，因此定义这个离散信号$x[n]=x(nT)$，要求在一次心跳至少有一个数据。这里的T在数据记录中是最小的心跳持续时间，或类似地，$1/T$是数据记录中最快的心率。对于这个数据的合理选择是以2Hz对$x(t)$进行采样。为了避免混叠效应，在采样之前，$x(t)$事实上应该通过一个初步滤波操作来带限信号的频率，使得信号频率低于$1/2T$。或者也可以考虑，一开始使用一个可接受的高的采样率来采样信号$x(t)$，

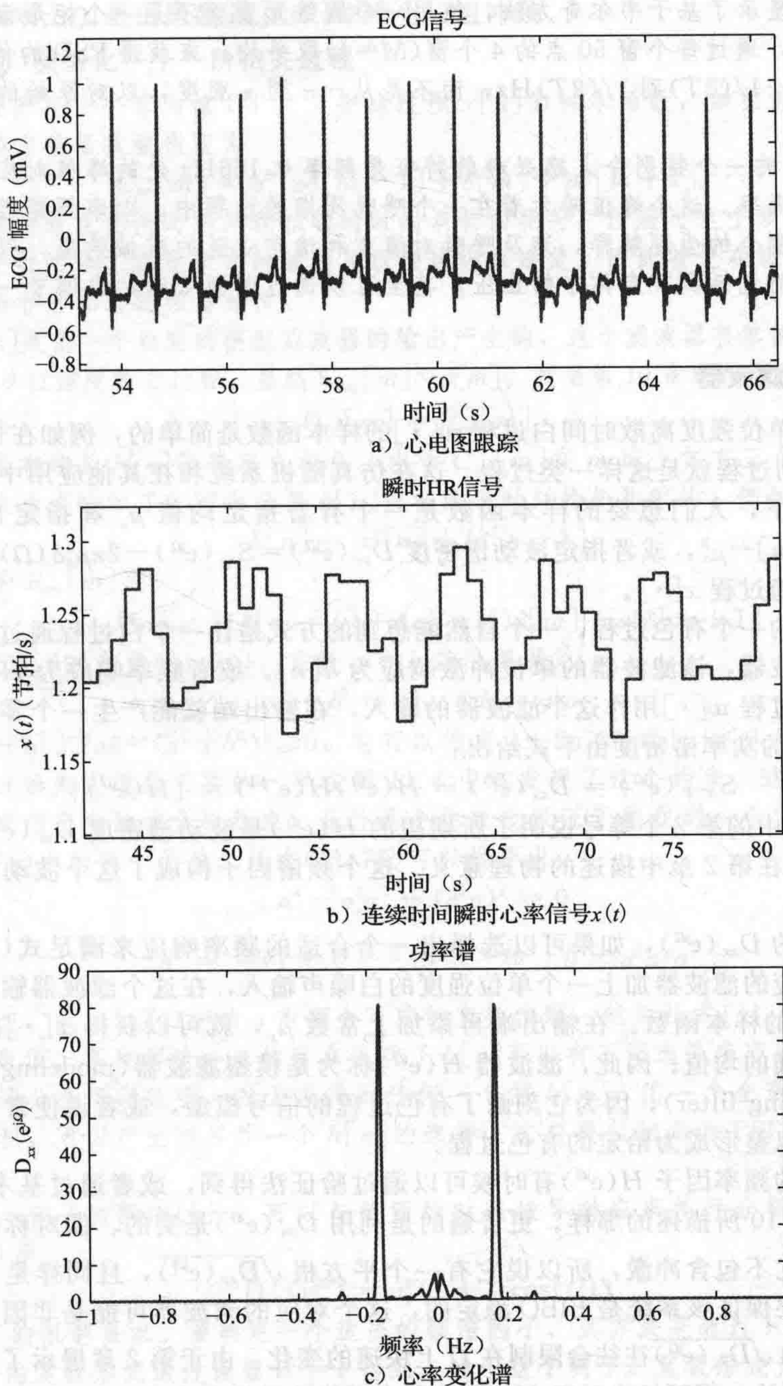


图 11.4　在呼吸频率处的强的峰值，以及在呼吸循环过程中，心率的系统变化

这时候的混叠就可以忽略不计的，例如选择一个整数 $K \gg 1$ 的采样频率 K/T，接着通过合适的离散时间滤波，使这个离散时间信号带宽限制在 $1/(2TK)$，在处理完最后输出之前，通过因子 K 的降采样率来恢复最初需要的采样率 $1/T$。

为了避免有“DC”或零频分量主导了这个 PSD，在计算好每个窗中的周期图后，可以首先在那个窗中减去 $x[n]$的平均值，来获得零均值信号 $\tilde{x}[n]$。实际上，这里在最后估计波动谱密度 $D_{xx}(e^{j\Omega})$。这个 $\tilde{x}[n]$信号的 PSD 现在可以通过周期图取平均得到。

图 11.4c 显示了基于韦尔奇方法，使用一个圆锥形窗而不是一个矩形窗，并将这些窗进行一些交叠，通过每个窗 50 点的 4 个窗($M=4$)取平均，来获得 PSD 的估计值。频率轴上标记的是从$-1/(2T)$到$1/(2T)$Hz，而不是从$-\pi$到π弧度，以对原始的连续时间心率信号做解释。

这个 PSD 的一个特别令人感兴趣的特征是频率 0.166Hz 处的峰值对应着这个实验项目中的平均呼吸率。这个峰值暗示着在一个呼吸周期的过程中，心率周期性地变换。对于从呼吸到心率耦合的生理解释，涉及呼吸对填充和清空心脏的机械效应，以及控制反射的行为。这些反射包括调节身体中的血压，甚至可以通过调制心率，来调节一个单一呼吸周期的时间长短。◀

11.3.2 模型滤波器

产生一个单位强度离散时间白过程 $w[\cdot]$的样本函数是简单的，例如在例 11.5 中所描述的± 1伯努利过程就是这样一类过程。这在仿真随机系统和在其他应用中是有用的。然而在多种情况下，人们想要的样本函数是一个有着指定均值 μ_x 和指定自协方差函数 $C_{xx}[m]=R_{xx}[m]-\mu_x^2$，或者指定波动谱密度 $D_{xx}(e^{j\Omega})=S_{xx}(e^{j\Omega})-2\pi\mu_x^2\delta(\Omega)$的一个有色离散时间广义平稳过程 $x[\cdot]$。

构建这样的一个有色过程，一个自然能想到的方式是让一个白过程通过一个经过合适选择的稳定滤波器，该滤波器的单位冲激响应为 $h[n]$，或者频率响应为 $H(e^{j\Omega})$。将上述单位强度的白过程 $w[\cdot]$用作这个滤波器的输入，在输出端就能产生一个零均值广义平稳过程$\widetilde{x}[\cdot]$，它的功率谱密度由下式给出：

$$S_{\widetilde{x}\widetilde{x}}(e^{j\Omega}) = D_{xx}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 \tag{11.67}$$

438 ~ 439

式(11.67)中的第 2 个等号说明了所期望的 $H(e^{j\Omega})$是波动谱密度 $D_{xx}(e^{j\Omega})$的频谱因子(factor)，正如在第 2 章中描述的物理意义。这个频谱因子构成了这个波动谱密度的广义平方根。

对于指定的 $D_{xx}(e^{j\Omega})$，如果可以选择出一个合适的频率响应来满足式(11.67)，然后给这个频率响应的滤波器加上一个单位强度的白噪声输入，在这个滤波器输出端就会输出一个过程$\widetilde{x}[\cdot]$的样本函数。在输出端再添加上常数 μ_x，就可以获得 $x[\cdot]$的一个样本函数，并具有正确的均值。因此，滤波器 $H(e^{j\Omega})$称为是模型滤波器(modeling filter)或者成型滤波器(shaping filter)，因为它刻画了有色过程的信号模型，或者说使常数强度的白过程进行成型，以整形成为给定的有色过程。

一个特定的频率因子 $H(e^{j\Omega})$有时候可以通过验证法得到，或者通过基本的计算得到，就像下面例 11.10 所描述的那样。更普遍的是利用 $D_{xx}(e^{j\Omega})$是实的、偶对称的且非负的性质，并且假设它不包含冲激，所以说它有一个平方根 $\sqrt{D_{xx}(e^{j\Omega})}$，且同样是实的、偶对称的且非负的。要保证该系统是 BIBO 稳定的，这个对应的滤波器可能是非因果，因为一个合理的、连续的$\sqrt{D_{xx}(e^{j\Omega})}$往往会限制在 Ω 上快速的变化。由于第 2 章展示了对频谱分解和全通滤波器的讨论，下面给出对于 $H(e^{j\Omega})$的所有可能选择的表达式：

$$H(e^{j\Omega}) = A(e^{j\Omega})\sqrt{D_{xx}(e^{j\Omega})} \tag{11.68}$$

其中，$A(e^{j\Omega})$是一个全通滤波器的频率响应，即一个满足$|A(e^{j\Omega})|=1$ 的稳定的滤波器。通过选择这个全通的参数，来获得一个描述应用和实现所需要的性能特性的频率响应 $H(e^{j\Omega})$。

如果原始的 $D_{xx}(e^{j\Omega})$在 $\Omega=0$ 或者在非零频率组 $\Omega=\pm\Omega_i$ 处有冲激，那么首先用前面的模型滤波器来产生对应于 $D_{xx}(e^{j\Omega})$的非冲激部分的过程。再利用例 11.6 中的方法，对这个过程添加一个零均值随机常数，来在 $D_{xx}(e^{j\Omega})$中 $\Omega=0$ 处产生一个合适的冲激。类似地，可以利用例 11.1 所给出的关于离散时间情况的方法，在频率 $\Omega=\Omega_i$ 处添加一个随机相位

余弦，来在频率$\pm\Omega_i$处的原始$D_{xx}(e^{j\Omega})$中产生一组冲激。

例 11.10 模型化一个一阶相关过程

假设需要产生一个零均值DT广义平稳过程$x[n]$的样本函数，如在例11.4中所描述的，它的自协方差函数被指定为

$$C_{xx}[m]=\sigma_x^2(\rho\delta[m-1]+\delta[m]+\rho\delta[m+1]) \tag{11.69}$$

也就是说，该过程在任何时刻只在相邻的时间步长内相关，但超过这个步长就不相关。这个自协方差足够简单，以至于在时域内可以描述得很清楚。因此首先在时域进行分析，然后并行地给出非常相近的频谱分析。

过程$x[n]$是由一个稳定的模型滤波器的输出产生的，这个滤波器有单位冲激响应$h[\cdot]$，输入$w[n]$为单位强度的白过程。显然$C_{ww}[m]=\delta[m]$。利用第10章所推导的关系： 440

$$C_{xx}[m]=\overline{R}_{hh}[m] \tag{11.70}$$

其中，表达式右端是$h[n]$的确定自相关。由于$C_{xx}[m]$在m域上仅有三个值处是非零的，所以上面的表达式暗示了，可以选择$h[n]$仅在两个时刻处是非零的，例如

$$h[n]=a\delta[n]+b\delta[n-1] \tag{11.71}$$

从而其对应的$\overline{R}_{hh}[m]$是

$$\overline{R}_{hh}[m]=ab\delta[m-1]+(a^2+b^2)\delta[m]+ab\delta[m+1] \tag{11.72}$$

考虑式(11.69)和式(11.70)，系数a和b就必须满足

$$a^2+b^2=\sigma_x^2,\quad ab=\sigma_x^2\rho \tag{11.73}$$

因为$a^2+b^2\pm 2ab=(a^2\pm b^2)^2\geqslant 0$，它可以推出$1\pm 2\rho\geqslant 0$或$|\rho|\leqslant 0.5$。这个约束对于一个模型滤波器的实现是必要的，早在例11.4中就发现了这个约束。这不是巧合，这是对于相关频率谱密度的非负性约束。此外这个约束也保证了能找到一个实的a和b，同时满足式(11.73)中的两个关系。从式(11.73)可以推导出

$$a^4-\sigma_x^2a^2+(\sigma_x^2\rho)^2=0 \tag{11.74}$$

$$a^2=\frac{\sigma_x^2}{2}(1\pm\sqrt{1-4\rho^2})\quad 和\quad b=\sigma_x^2\rho/a \tag{11.75}$$

总体来说，式(11.74)中的a有四个可能的实数值解，然后从式(11.75)可以得到与之对应b的实数值。多种解决办法的存在说明了$h[n]$可以有不同选择来产生相同的$\overline{R}_{hh}[m]$。接下来的频域分析可以证明，对于求得的任何一个解$h[n]$，用一个全通滤波器的单位冲激响应来卷积，可以产生出另外一个$h[n]$的选择，它将提供相同的PSD模型，或者整形效果。

对于这个例子的频谱讨论，可以与前面的时域推导对应来并行分析得到。注意过程$x[n]$的FSD是

$$D_{xx}(e^{j\Omega})=\sigma_x^2(1+2\rho\cos(\Omega)) \tag{11.76}$$

有$|\rho|\leqslant 0.5$的限制要求。要确定一个适当的频谱因子，其方法是通过FSD的复数形式来计算。FSD的复数形式通过设置$e^{j\Omega}=z$得到。对于这个例子，复数形式为

$$\begin{aligned}D_{xx}(z)&=\sigma_x^2(1+\rho(z+z^{-1}))=(a+bz)(a+bz^{-1})\\&=(a^2+b^2)+ab(z+z^{-1})\end{aligned} \tag{11.77}$$

441

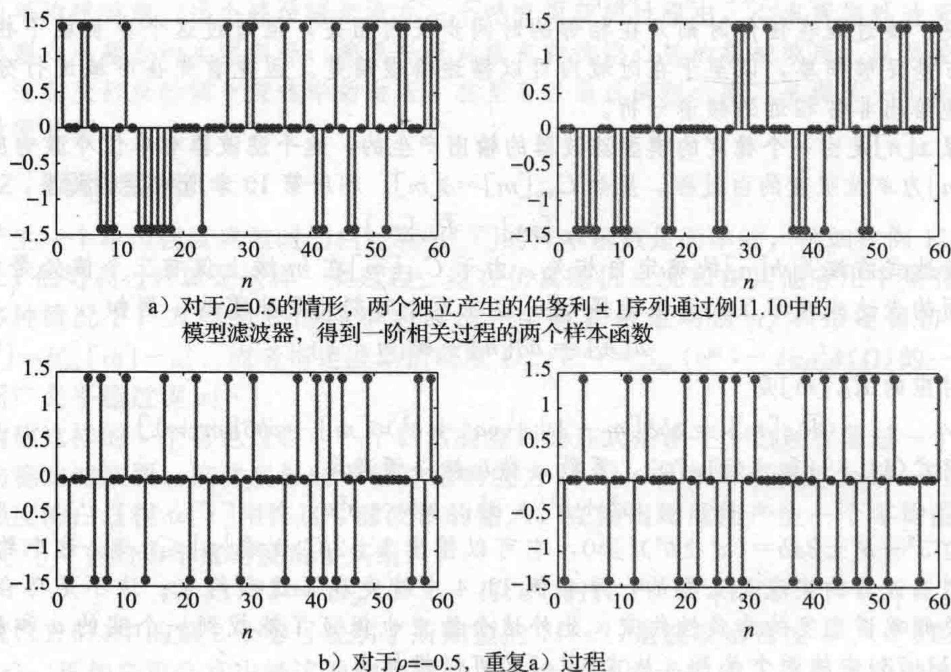
这里，a和b同样需要满足表达式(11.73)。因此，模型滤波器的传递函数可以写为

$$H(z)=A(z)(a+bz^{-1}) \tag{11.78}$$

其中，$A(z)$是一个(稳定的)全通系统的传递函数，满足$A(z)A(z^{-1})=1$。当$A(z)=1$时，这个滤波器的单位冲激响应完全由式(11.71)确定。对于满足式(11.73)的一个特定的a和b，选择其他的全通滤波器$A(z)$，由式(11.78)将会产生出式(11.73)的其他滤波器的解。选择形式为$A(z)=z^{-N}$的全通系统，将会对式(11.71)中的单位冲激响应版本，产生延迟

(对于 $N>0$)或产生超前(对于 $N<0$)。这里可能有无穷多种选择设置，尽管其他的情况将可能不再是有限持续时间的单位冲激响应。

图 11.5a 展示了在 $\rho=0.5$ 这个极端情形下，两个独立产生的伯努利±1序列通过前面的模型滤波器，得到随机过程的样本函数的情况。图 11.5b 展示了 $\rho=-0.5$ 时随机过程产生的情况。这两种情况下的样本函数显示了例 11.4 最后所提到的期望值。



a）对于$\rho=0.5$的情形，两个独立产生的伯努利±1序列通过例11.10中的模型滤波器，得到一阶相关过程的两个样本函数

b）对于$\rho=-0.5$，重复a）过程

图 11.5

一个 DT 广义平稳过程的 PSD，即它的自相关函数的离散时间傅里叶变换，必须是实的、偶对称的且非负的。上述模型滤波器的推导暗示了为什么会有以下推论：如果 $S(e^{j\Omega})$ 关于 Ω 是实的、偶对称的和非负的且周期为 2π 的函数，并且它在$[-\pi, \pi]$上的积分是有限的，那么它的反变换 $R[m]$ 是一个广义平稳过程的自相关函数，且有 $R[0]<\infty$。这个推论简称为赫尔格罗茨定理。之前提到过这个结果的连续时间版本，称为波切内尔定理。对于这些结果更仔细的陈述和证明超出了本书的范围。◀

442

11.3.3 白化滤波器

后面的章节将要讨论估计和检测问题。如果这些问题涉及的随机过程(比如一组量测信号)可以用白过程描述，即用一个平坦的功率谱密度来描述，那么就可以相对轻松地用公式来表达、分析和求解。当涉及的随机过程不是白过程而是有色的，如果有色过程能符合下列情形之一，那么通常也可以使用从在白色情形下获得的结果来进行适当的处理。

- 这个有色过程能被模拟成一个白过程通过某个线性时不变模型滤波器(或者成型滤波器)所得到的结果，就像前面小节所提到的那样。这个模型滤波器对输入白过程成型，得到一个具有给定的有色过程谱特性的输出。
- 通过一个合适选择的线性时不变滤波器，能将这个有色过程转换为一个白过程。这个滤波器将平滑输入的有色过程的谱特性，从而在输出端得到一个白过程的、平滑的谱特性。那样的滤波器称为白化滤波器(whitening filter)。

为了获得进行白化滤波器设计的表达式，假设这个滤波器的输入 $x[n]$ 是一个广义平稳过程，其功率谱密度 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 是没有冲激的，希望得到的输出 $w[n]$ 能变成一个方差为 σ_w^2 的白过程。因为滤波器输出满足

$$S_{ww}(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 S_{xx}(e^{j\Omega}) \tag{11.79}$$

因此，滤波器需遵循

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{\sigma_w^2}{S_{xx}(e^{j\Omega})} \tag{11.80}$$

这个表达式说明了，乘以该线性时不变白化滤波器的频率响应的幅度平方，必然会得到一个方差为 σ_w^2 的白输出。如果功率谱密度的复数表达式 $S_{xx}(z)$ 是一个合理 z 域表达式，就可以通过合适的因子分解 $H(z)H(z^{-1})$ 来得到 $H(z)$，就像第2章所讨论的那样。

例 11.11 白化滤波器

为了描述如何确定一个白化滤波器，假设

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \frac{5}{4} - \cos(\Omega) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right) \tag{11.81}$$

为了对 $x[n]$ 进行白化滤波，需要一个稳定的线性时不变滤波器

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} \tag{11.82}$$

或等价地表示为

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \tag{11.83}$$

为了产生一个广义平稳输出，这个滤波器要限制为是稳定的。在这里，$H(z)$ 的一个选择结果由下列表达式给出，收敛域为 $|z| > 1/2$，它是一个因果滤波器。

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{11.84}$$

实际的白化滤波器系统函数可以通过 $H(z)$ 乘以任何全通系统的系统函数 $A(z)$ 复合得到，全通系统的系统函数满足 $A(z)A(z^{-1}) = 1$。因为 $|A(e^{j\Omega})|^2 = 1$，这样会产生相同的白色效果。◀

11.3.4 带限随机过程的采样

如果一个广义平稳随机过程的功率谱密度是带限的，即在一些有限频带外，它的功率谱密度值为0，就称为是带限的过程。对于带限的确定性信号，可以通过以不低于奈奎斯特率的采样率来采样，以及准确地恢复这个信号。经过适当的理解，就像下面所描述的那样，也可以得到一个针对带限过程的类似的结论。

假设这个连续时间广义平稳随机过程 $x_c(t)$ 有自相关函数 $R_{x_c x_c}(\tau)$，其对应的功率谱密度 $S_{x_c x_c}(j\omega)$ 为限制在 $|\omega| < \pi/T$ 范围内有值，即

$$S_{x_c x_c}(j\omega) = 0 \quad , |\omega| \geqslant \frac{\pi}{T} \tag{11.85}$$

对该过程进行采样得到离散时间情况下的过程 $x[n] = x_c(nT)$，并且应该很容易理解，$x[n]$ 也是广义平稳的，并有自相关函数 $R_{xx}[m] = R_{x_c x_c}(mT)$。

就像在确定性信号分析的那样，从离散时间采样样本进行重构，得到的连续时间信号定义为

$$y_c(t) = \sum_n x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \tag{11.86}$$

接着利用在随机情况下的采样理论，可以证实 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 之间的均方误差值是0，即

$$E\{[x_c(t) - y_c(t)]^2\} = 0 \tag{11.87}$$

换句话说，对于原始信号与从它的采样信号重构的信号的差值，其功率的期望为零。这个结果的一个证明列在了习题11.21中。

11.4 延伸阅读

第7章和第10章的最后有几篇关于广义平稳过程细节内容的参考文献，建议读者进行延伸阅读，其中，包括通过功率谱密度来获得的频域特性。可以在[Dav]和[Lee]的文献中看到在工程上进行频谱处理的入门知识。而在[Jen][Kay4][Koo][Ma2][Mar][Per][Por]和[Sto]等人的文章中主要致力于对广义平稳过程谱分析的学习和应用。本章所列出的、经典的、基于周期图法的功率谱密度估计算法是一个非参数解决问题的基本方法。而与之相对应的参数方法，其典型的模型滤波器方法，旨在直接确定对于感兴趣的广义平稳过程的模型滤波器的参数，通过利用模型滤波器产生随机过程的样本函数。可以假设模型滤波来源于一些特殊的参数模型家族的设计，例如自回归模型(Autoregression Model，AM)，并且选取它的参数以满足最小化某个成本函数，这个成本函数评估了性能好坏。通过观测输出的过程样本函数数据，可以不断修正模型滤波器的参数。不论是参数方法，还是非参数方法，上述的参考文献都有论述。

444
445

习题

基础习题

11.1 (a) 图P11.1显示了一个连续时间广义平稳随机过程 $x(t)$ 的自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的候选函数。对于每一个候选函数 $R_{xx}(\tau)$，说明它们是否可能是一个广义平稳随机过程 $x(t)$ 的自相关函数。对你的答案给出简要的理由。

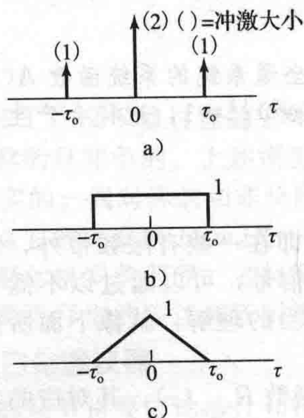


图 P11.1

(b) 对于下列的每一个函数 $R[m]$，说明它是否可以成为一个离散时间广义平稳随机过程的自相关函数，其中 m 表示延迟。如果不可以，解释为什么。如果可以，详细解释你是怎样通过合适地滤波一个在每个时间等概率取值为常数+1或−1的伯努利过程，来得到那个过程的。

(i) 对 $m=0$，$R[m]=1$；对 $|m|=1$，$R[m]=0.7$，在其他 m 值处，$R[m]=0$。

(ii) 对 $m=0$，$R[m]=2$；对 $|m|=1$，$R[m]=-1$，在其他 m 值处，$R[m]=0$。

11.2 假设 $q_1(t)$ 是由 $x_1(\cdot)$ 通过一个频率响应为 $\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ 的稳定滤波器系统得到的。$q_2(t)$ 是由 $x_2(\cdot)$ 通过一个相同频率响应 $\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ 的另一个稳定滤波器系统得到的。假设 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 都是广义平稳的。请用 $S_{x_1x_2}(j\omega)$ 表示互谱密度 $S_{q_1q_2}(j\omega)$。

11.3 假设 $w[n]$ 是一个零均值广义平稳随机信号，有 $C_{ww}[m]=\sigma^2\delta[m]$。如果 $w[n]$ 是一个因果系统的输入，这个系统的输出满足：

$$y[n]=w[n]+w[n-1]+w[n-2]$$

求解这个系统的单位冲激响应 $h[\cdot]$，并用 σ^2 表示出协方差函数 $C_{yw}[m]$ 和 $C_{yy}[m]$。然后，令 $\sigma^2=1$，对于 $|\Omega|\leqslant\pi$ 时，求解并画出输出的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。

11.4 图P11.4描述了一个稳定的线性时不变系统，其输入为 $x[n]$、输出为 $y[n]$，输入和输出为关联的实数广义平稳随机过程，对应的功率谱密度为 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 和 $S_{yy}(e^{j\Omega})$，互谱密度为 $S_{xy}(e^{j\Omega})$。

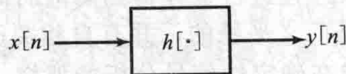


图 P11.4

对于下面的每一种陈述，判定它们是否正确，并给出你的理由。

(a) 对于 Ω 取任何值，$S_{yy}(e^{j\Omega})$ 是非零的，则 $S_{xy}(e^{j\Omega})$ 必定是非零的。

(b) 对于 Ω 取任何值，$S_{xy}(e^{j\Omega})$ 是非零的，则 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 必定是非零的。

(c) 对于 Ω 取任何值，$S_{yy}(e^{j\Omega})$ 为零，则 $S_{xy}(e^{j\Omega})$ 必定为零。

(d) 互功率谱密度 $S_{xy}(e^{j\Omega})$ 的实数部分必定是非负的。

11.5 假设 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 是两个关联的实数广义平稳随机过程。其中，$x(t)$ 的自相关函数是 $R_{xx}(\tau)=e^{-|\tau|}$。说明是否可以找到一个 $y(t)$ 满足互功率谱密度 $S_{xy}(j\omega)$，如图 P11.5 所示。注意幅度在 $\omega=1$ 时 $j=\sqrt{-1}$。如果你的答案是不可以，解释为什么。如果你的答案是可以，说明你怎样确定或构建 $y(t)$。

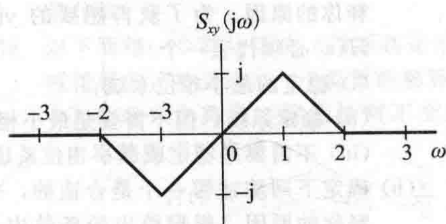


图 P11.5

11.6 设 $x(t)$ 是一个实数零均值的广义平稳过程，其自相关函数为 $R_{xx}(\tau)$，它的自相关的傅里叶变换是功率谱密度，为 $S_{xx}(j\omega)$。假设 $x(t)$ 经过如图 P11.6 所示的一对稳定的 LTI 系统进行处理，假设它们的冲激响应是已知的。

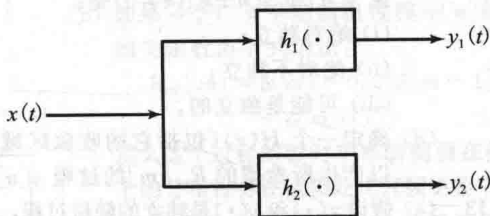


图 P11.6

(a) 依据 $R_{xx}(\tau)$、$h_1(t)$、$h_2(t)$、$S_{xx}(j\omega)$，$H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 的值得到 $R_{y_1y_2}(\tau)$ 和 $S_{y_1y_2}(\tau)$ 的值。

(b) 证明如果 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 占据着不同的频率带宽，那么 $y_1(\cdot)$ 和 $y_2(\cdot)$ 是不相关的。判定 $y_1(\cdot)$ 和 $y_2(\cdot)$ 是否同样保证是统计独立的？

11.7 假设广义平稳随机过程 $g[\cdot]$ 和 $v[\cdot]$ 是零均值和不相关的。令 $x[n]=g[n]+v[n]$。这里已经知道这个和的复数功率谱密度由如下表达式给出：

$$S_{xx}(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{3}z\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

以及 $v[n]$ 的自相关函数是 $R_{vv}[m]=\frac{2}{3}\delta[m]$。求出 $S_{gg}(z)$ 和 $S_{gx}(z)$ 的值。

11.8 考虑一个复数广义平稳随机过程 $x[n]$，它的复数域功率谱密度为

$$S_{xx}(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{3}z\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

找到一个白化滤波器 $H_w(z)$ 将过程 $x[n]$ 白化，让它变得稳定和因果，并且有着稳定和因果的逆。你的答案是否是唯一的稳定因子？如果是，解释为什么。如果不是，构建出第二个白化滤波器。

11.9 图 P11.9-1 展示了一个数字化系统，它的输入 $x_c(t)$ 是一个零均值广义平稳随机过程，有着如图 P11.9-2 所示的功率谱密度。假设图 P11.9-1 中的连续到离散(C/D)转换系统是一个理想的采样器，它的输出是 $x_d[n]=x_c(nT)$。

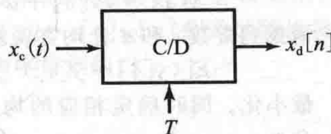


图 P11.9-1

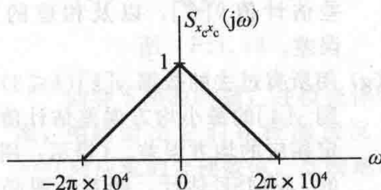


图 P11.9-2

(a) 求解输入过程 $x_c(t)$ 的均方值 $E[x_c^2(t)]$。

(b) 证明 $R_{x_dx_d}[m]=R_{x_cx_c}(\tau)\big|_{\tau=mT}$。要让上式正确，陈述是否存在对 T 的取值有任何限制，如果存在，这个限制是什么？

(c) (i) 对于 $\frac{1}{T}=40\text{kHz}$，求解并画出 $S_{x_dx_d}(e^{j\Omega})$；

(ii) 对于 $\frac{1}{T}=15\text{kHz}$，求解并画出 $S_{x_dx_d}(e^{j\Omega})$。

11.10 假设一个因果线性时不变离散系统的输入输出关系如下所示：

$$y[n]=\beta y[n-1]+w[n]$$

对所有的时间 n 都成立。

(a) 这个系统的单位冲激响应 $h[n]$ 是什么，β 满足什么条件将会保证这个系统是稳定的，即满足有界输入和有界输出？

假设剩下的问题满足你在(a)中所

确定的稳定性条件。同样，假设输入 $w[n]$ 事实上是一个广义平稳过程，它的功率谱密度 $S_{ww}(e^{j\Omega})$ 对于所有的频率 Ω，在 $M>0$ 的某个值处为常数。

(b) 输入 $w[n]$ 的平均值 μ_w 是多少？$w[n]$ 的自相关函数 $C_{ww}[n]$ 是什么？

余下的问题用 β 和 M 来表征答案。

(c) 求出输出的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。假设 $\beta>0$，当在频率范围 $|\Omega|\leqslant\pi$ 时，什么频率使输出功率谱密度取得最大值和最小值，同时找出这些最大值和最小值。

(d) 使用任何方法来确定 $C_{yy}[0]$ 和 $C_{yy}[1]$，其中 $C_{yy}[m]$ 表示输出的自协方差函数。

(e) 用 $y[3]$ 来得到 $y[4]$ 的线性最小均方误差估计

$$\hat{y}[4]=cy[3]+d$$

请找到常数 c 和 d 让均方误差

$$E[(y[4]-\hat{y}[4])^2]$$

最小化。同时确定相应的均方误差是多少。

(f) 用 $y[4]$ 来得到 $y[3]$ 的线性最小均方误差估计值 $\hat{y}[3]$，以及相应的方均值误差。

(g) 用所有过去的数据 $y[k]$ $(k\leqslant 3)$ 来求得到 $y[4]$ 的最小均方误差估计值，并确定相应的均方误差。(提示：用所得到的 LMMSE 估计，接着证明必要的正交条件是满足的。)

11.11 一个特定的传递函数为 $H(z)$ 的一阶系统，其输入是一个单位冲激白噪声过程 $w[n]$，即一个功率谱密度 $S_{ww}(e^{j\Omega})=1$ 的过程。其对应的输出 $y[n]$ 是一个广义平稳过程，其功率谱密度为

$$S_{yy}(e^{j\Omega})=16\frac{(1-3z^{-1})(1-3z)}{(1-4z^{-1})(1-4z)}\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

(a) 当 $|\Omega|\leqslant\pi$ 时，画出作为 Ω 函数的功率谱密度。

(b) 假设知道这个系统有一个稳定的和因果的逆，同样是一阶的，请找到与这个信息一致的选择 $H(z)$。

11.12 运用如图 P11.12 所示的一个 LTI 滤波器，要产生一个指定自相关函数为 $R_{yy}[m]$ 的广义平稳随机过程 $y[n]$。

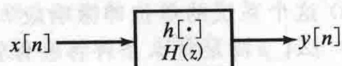


图 P11.12

方法是对 LTI 滤波器输入一个白的随机过程 $x[n]$，这个过程是零均值的且有自相关函数

$$R_{xx}[m]=\delta[m]=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & m\neq 0\end{cases}$$

选择滤波器传递函数 $H(z)$，使得 $R_{yy}[m]=0.5^{|m|}$，对应的功率谱密度为

$$S_{yy}(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$$

$$=\frac{3}{5-4\cos\Omega}$$

(a) 确定下列陈述哪一个是正确的，并解释你的原因。为了获得想要的 $y[n]$，$H(z)$ 必须代表一个

(i) 稳定的最小相位系统；

(ii) 稳定系统，但不需要是最小相位；

(iii) 不需要是稳定或最小相位系统。

(b) 确定下列陈述哪一个是合适的，并解释你的原因。根据给出的条件中，可以说 $x[n]$ 和 $x[n+k]$ $(k\neq 0)$ 是：

(i) 绝对独立；

(ii) 绝对不独立；

(iii) 可能是独立的。

(c) 确定下列陈述哪一个是合适，并解释你的原因。根据给出的条件中，可以说 $y[n]$ 和 $y[n+k]$ $(k\neq 0)$ 是：

(i) 绝对独立；

(ii) 绝对不独立；

(iii) 可能是独立的。

(d) 确定一个 $H(z)$ (包括它的收敛区域)，以产生所希望的 $R_{yy}[m]$ 的过程 $y[n]$。

11.13 (a) 假设 $x(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 是独立的随机过程，并且每个都是广义平稳的。证明 $z(t)=x(t)y(t)$ 同样是广义平稳的，并且用功率谱密度 $S_{xx}(e^{j\omega})$ 和 $S_{yy}(e^{j\omega})$ 来写下它的功率谱密度。

(b) 假设 $x(t)$ 是一个广义平稳过程，并且有 $y(t)=x(t-\tau_1)$。是否对于所有的 τ 都有 $C_{yx}(\tau_1)\geqslant C_{yx}(\tau)$？用 $S_{xx}(j\omega)$ 来表示 $S_{yx}(j\omega)$。

11.14 一个连续时间的随机过程的测量功率谱密度被描述为

$$S(j\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^2+100}$$

如果想把这个系统表示为一个传递函数为 $H(s)$ 的线性滤波器的输出，该滤波器的激励为一个白噪声过程 $w(t)$，其中

$$S_{ww}(j\omega)=1$$

(a) 假设 $H(s)$ 是最小相位的，确定 $H(s)$ 的一个选择。

(b) 假设 $H(s)$仅仅限制为是因果和稳定的，而不是最小相位。假设同样已知 $h(t)$像 e^{-t}在 $t\to\infty$时那样渐进衰减，即当 $t\to\infty$，$h(t)$大约与 e^{-t}成比例。确定 $H(s)$的一个选择。

11.15 现在有一个离散时间线性时不变系统，在区间$[-\pi,\pi]$内，它的频率响应为$H(e^{j\Omega})$。当$(\pi/4)<|\Omega|\leqslant\pi$ 时 $H(e^{j\Omega})$ 为 1，当$|\Omega|\leqslant(\pi/4)$时为 0。换句话说，这个系统函数是一个理想的高通滤波器，输入是一个白噪声过程 $w[n]$，有 $E\{w^2[n]\}=10$。如果 $v[n]$表示系统的输出，那么 $E\{v^2[n]\}$是什么？

11.16 对下面每一个部分说法，判断其是正确的或错误的，并且给出一个简要的解释。

(a) 考虑一个离散时间线性时不变系统，它的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=2,\quad |\Omega|<\frac{\pi}{2}$$

且在区间$[-\pi,\pi]$的其他地方值为零，即$\frac{\pi}{2}<|\Omega|\leqslant\pi$ 时 $H(e^{j\Omega})$为 0。假设这个系统被一个独立同分布且等概率取值为±1 的输入信号驱动，因此这个系统的输出 $y[n]$有单位方差，即 $\sigma^2_{y[n]}=1$。

(b) 如果一个广义平稳随机过程 $x[n]$的自相关函数由下式给出：

$$R_{xx}[m]=\delta[m]-0.3(\delta[m-1]+\delta[m+1])$$

那么这个过程的瞬时功率的期望在频率上的分布将会在低频处比高频更集中。

11.17 考虑如图 P11.17-1 所示的一个线性时不变系统，这里的 $x[n]$是一个均值为 $\mu_x=1$、方差为 $\sigma_x^2=\frac{1}{4}$的独立同分布过程。这个系统的冲激响应 $h[n]$由图 P11.17-2 给出。输出 $y[n]$有零均值和方差 $\sigma_y^2=\frac{3}{2}$。这个系统输入和输出之间的互谱 $S_{yx}(e^{j\Omega})$是关于Ω 的实数函数。

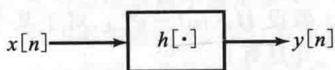


图　P11.17-1

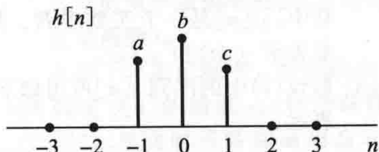


图　P11.17-2

(a) 结合所给定的信息求解系数 a、b 和 c 的值。

(b) 对于$\Omega\in[-\pi,\pi]$，求解并画出这个过程 $y[n]$的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。$h[n]$是什么类型的滤波器(低通、高通、带通、带阻、全通)？

(c) 如果可能的话，找到一个因果稳定的线性时不变系统，给出它的冲激响应 $g[n]$，要求当它的输入是过程 $y[\cdot]$时，输出 $w[\cdot]$是一个白过程。如果不可能，解释为什么。

高级习题

11.18 假设图 P11.18 中的 $x[n]$是零均值广义平稳的，它的相关函数为 $R_{xx}[m]$，功率谱密度为 $S_{xx}(e^{j\Omega})$。假设过程 $w[\cdot]$与过程 $x[\cdot]$独立，并且在任何时刻以概率 p 取值 1 或者以概率 $1-p$ 取值 0；同样假设$x[\cdot]$在不同时刻的数值是独立的。因此信号 $y[n]=x[n]w[n]$是通过随机设置 $x[\cdot]$值为零得到的。

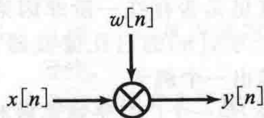


图　P11.18

回答下面的问题，并检查你的所有答案，明确给出它们在极端情况 $p=1$ 和 $p=0$时应取的合理数值。准确地解释为什么你认为这些极端的数据是合理的。

(a) 求出这个广义平稳过程 $w[n]$的均值 μ_w。证明它的自相关函数有形式 $R_{ww}[m]=\alpha\delta[m]+\beta$，其中 α 和 β 是你应当确定的常数，且 $\delta[m]$是单位冲激函数。同样，求出过程 $w[n]$的功率谱密度 $S_{ww}(e^{j\Omega})$的表达式。

(b) 证明 $y[\cdot]$和 $x[\cdot]$都是广义平稳的，同时计算 $R_{yx}[m]$、$R_{yy}[m]$和功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。

11.19 假设 $x[n]$是一个零均值的广义平稳过程，有 $R_{xx}[m]=N_0\delta[m]$，因此它的自相关的傅里叶变换(也就是功率谱密度)在所有频率处都是相同的，即 $S_{xx}(e^{j\Omega})=N_0$。换句话说，$x[n]$是一个白的过程。假设这个过程运用到一个稳定系统的输入，这个系统的传递函数为

$$H(z)=\frac{z+5}{z-\frac{1}{2}}$$

(a) 确定输出 $y[n]$的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$是什么？

这个滤波器 $H(z)$ 称为过程 $y[n]$ 的成型滤波器，因为它将输入的平坦频谱成型后输出，并在输出信号中表现出自己的频率特性。对于输出 $y[n]$，也同样称为一个成型滤波器，因为它通过与简单的白色过程相关以成型为 $y[n]$。

(b) 确定一个稳定的、因果的、一阶滤波器的传递函数 $G(z)$，当它的输入是在(a)中定义的过程 $y[n]$ 时，它将在自己的输出端产生一个广义平稳白噪声过程。那样一个滤波器称为对 $y[n]$ 的一个因果白化滤波器。

(c) 这里是否存在另外的、稳定的、因果的一阶滤波器，来用作在(a)中定义 $y[n]$ 的白化滤波器？如果存在，它们是怎样与(b)中的 $G(z)$ 相关联的？

(d) 这里是否存在高阶因果滤波器，以作为在(a)中定义的 $y[n]$ 的白化滤波器？如果存在，再一次指出它们是怎样与 $G(z)$ 相关联的？

(e) 这里是否存在一阶非因果滤波器，以作为 $y[n]$ 的白化滤波器？如果存在，给出一个例子。

11.20　令 $x[n]$ 是一个广义平稳离散时间过程，给出它的功率谱密度是 $S_{xx}(e^{j\Omega})$，同时，假设这个功率谱密度不包含冲激。

(a) 如果想将 $x[n]$ 通过如图 P11.20-1 所示的线性时不变系统进行滤波，这个系统的频率响应为 $H(e^{j\Omega})$，得到一个输出 $z[n]$，它们的互谱密度 $S_{zx}(e^{j\Omega})$ 是某个确定函数 $T(e^{j\Omega})$。确定这个滤波的 $H(e^{j\Omega})$ 表达式，用 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 和 $T(e^{j\Omega})$ 来表示你的答案。

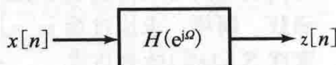


图　P11.20-1

(b) 令 $e[n]$ 是一个与上述定义的 $x[n]$ 无关的零均值广义平稳过程，即有 $R_{ex}[m]=0$，且它的功率谱密度定义为 $S_{ee}(e^{j\Omega})$。$z[n]$ 在(a)中定义，并定义 $y[n]=z[n]+e[n]$。这些信号的关系在如图 P11.20-2 中表示出来。证明 $S_{yx}(e^{j\Omega})$ 可以仅通过 $S_{zx}(e^{j\Omega})$ 来表示。同时用 $S_{xx}(e^{j\Omega})$、$H(e^{j\Omega})$ 和 $S_{ee}(e^{j\Omega})$ 来表示出 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。

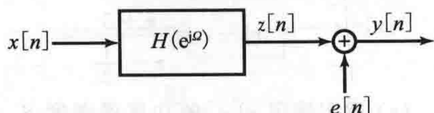


图　P11.20-2

(c) 假设已挑选了一个辅助 $T(e^{j\Omega})$，因此，可以得到 $S_{zx}(e^{j\Omega})$ 和 $S_{yx}(e^{j\Omega})$ 的表达式。这里同样想让 $S_{yy}(e^{j\Omega})$ 等于某个指定的实的、非负的、关于频率的偶对称函数 $U(e^{j\Omega})$。那么利用你在(b)中得到的结果来说明，该怎样选择 $S_{ee}(e^{j\Omega})$ 才能满足 $S_{yy}(e^{j\Omega})$ 的这个条件，并用 $S_{xx}(e^{j\Omega})$、$T(e^{j\Omega})$ 和 $U(e^{j\Omega})$ 来表示出 $S_{ee}(e^{j\Omega})$。$S_{ee}(e^{j\Omega})$ 是一个功率谱密度这个事实将会告诉你，事实上不可能让 $U(e^{j\Omega})$ 是一个随意的、实的、非负的和关于频率的偶对称函数。请写出一个 $S_{xx}(e^{j\Omega})$、$T(e^{j\Omega})$ 和 $U(e^{j\Omega})$ 必须满足的约束条件。

如果你在(c)的末尾定义的约束被满足了，从而上面的系统提供了如何生成一个与 $x[n]$ 指定了互相关的并具有指定的自相关的一个过程 $y[n]$。

11.21　这个问题引导你完成对一个带限随机信号的采样定理的推导。图 P11.21 中的两个子系统的公共输入是一个功率谱密度为 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 的广义平稳随机过程 $x(t)$。

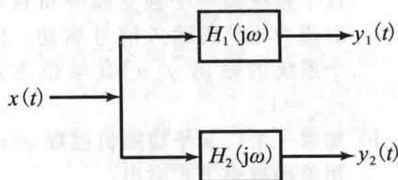


图　P11.21

(a) 用 $H_1(j\omega)$、$H_2(j\omega)$ 和 $S_{xx}(j\omega)$ 来表示 $E\{[y_1(t)-y_2(t)]^2\}$。

假设在接下来的问题中，$S_{xx}(j\omega)$ 仅仅在频率范围 $|\omega|<\omega_m$（对于某个 ω_m 值）时是非零的，从而过程 $x(t)$ 可表示为一个带限的随机过程。

(b) 假设对于 $|\omega|<\omega_m$ 有 $H_1(j\omega)=H_2(j\omega)$，但是在频带之外，这两个频率响应可能不同。利用你在(a)中得到的结果，求解这种情况下 $E\{[y_1(t)-y_2(t)]^2\}$ 的值。

(c) 假设 $H_1(j\omega)=e^{j\omega\tau}$，对于某个 τ 成立，并且有

$$H_2(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s[n]e^{j\omega nT},\quad T=\pi/\omega_m$$

其中，$s[n]$ 是一个实数序列。用 $x(\cdot)$ 来表示 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

(d) 假设(c)中的序列 $s[n]$ 可用如下表达式表示：

$$s[n]=\frac{\sin(\omega_m(\tau-nT))}{\omega_m(\tau-nT)}$$

仔细说明为什么在这种情况下，对于 $|\omega|<\omega_m$ 有 $H_1(j\omega)=H_2(j\omega)$。（提示：在(c)中的 $H_2(j\omega)$ 关于 ω 是周期的。）

(e) 把前面的计算放在一起，来推断出对于带限广义平稳过程的采样定理，并用 $x(\tau)$ 的采样来表示 $x(\tau)$。

11.22 用 $S_{xx}(e^{j\Omega})$ 来表示一个离散时间广义平稳随机过程 $x[n]$ 的功率谱密度，并假设这个过程的均值是 μ_x。

(a) 令 $q[n]=x[n]-\mu_x$，用 $S_{xx}(e^{j\Omega})$、μ_x 来表示 $S_{qq}(e^{j\Omega})$。

(b) 假设 $S_{xx}(e^{j\Omega})=10+Ke^{j\Omega}+Ke^{-j\Omega}$，$K$ 为某个常数，计算下列问题：

(i) 自相关函数 $R_{xx}[m]$；

(ii) $E\{x^2[n]\}$；

(iii) 均值 μ_x ((a)中的答案可能会帮助你，调用 $S_{qq}(e^{j\Omega})\geqslant 0$)；

(iv) K 可以取得的最大值和最小值；

(v) 时间平均 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}x[n]$。

其中，$x[n]$ 表示该随机过程的一个特定样本函数。

(c) 假设(b)中的 $K=-2$。用 $x[n]$ 表示 $x[n+1]$ 的线性最小均方误差估计值，写出一个表达式和它的均方误差。同样用 $x[n]$ 表示 $x[n+2]$ 的线性最小均方误差估计值，写出一个表达式和它的均方误差。

(d) 假设将上述过程 $x[n]$，对于某个 $K>0$，作为输入加到一个滤波器中，这个滤波器有单位冲激响应

$$h[n]=\delta[n-100]+\delta[n-101]$$

得到的输出过程为 $y[n]$。确定自相关函数 $R_{yy}[m]$，并给出它的一个完全标记草图。

11.23 一个离散时间的、广义平稳的静态随机过程 $v[n]$ 的功率谱密度由下式给出：

$$S_{vv}(e^{j\Omega})=K+e^{j2\Omega}+e^{-j2\Omega}$$

其中，K 是常数。

(a) K 可以取的最小值是多少？画出 K 取最小可能值时 $S_{vv}(e^{j\Omega})$ 在范围 $|\Omega|\leqslant\pi$ 内的图形，并且指出在这个 K 取值情况下，$v[n]$ 瞬时功率的期望集中在什么样的频率或频率范围(是低频、中频还是高频)。

在接下来的问题中，指定数据 $K=4$。

(b) 确定 $v[n]$ 的均值 μ_v (仔细解释你的原因)，并同时求解和画出自相关函数 $R_{vv}[m]$。

(c) 求解下列四个 $v[n+1]$ 的线性最小均方误差估计值和相关的均方误差：

(i) 利用 $v[n]$ 的测量值得到 $v[n+1]$ 的估计值；

(ii) 利用 $v[n-1]$ 的测量值得到 $v[n+1]$ 的估计值；

(iii) 利用 $v[n]$ 和 $v[n-1]$ 的测量值得到 $v[n+1]$ 的估计值；

(iv) 利用 $v[n-1]$ 和 $v[n-3]$ 的测量值得到 $v[n+1]$ 的估计值。

(d) 随机过程 $x[n]$ 的定义为 $x[n]=v[n]+A$，其中，$v[n]$ 在上述中指定了，A 是一个对所有 n 与 $v[n]$ 无关且方差为 $\sigma_A^2>0$ 的零均值随机变量。(因此，A 的一个随机选择是由每个随机过程的实现得到的，并且这个 A 不随 n 变化)，求：

(i) 均值 μ_x 和自相关函数 $R_{xx}[m]$；

(ii) 利用 $x[n]$ 的测量值来得到 $x[n+1]$ 的线性最小均方误差估计值；

(iii) 确定在 $|\Omega|\leqslant\pi$ 上的功率谱密度 $S_{xx}(e^{j\Omega})$；

(iv) 过程 $x[n]$ 是否具有均值各态历经性。

11.24 考虑一个离散时间广义平稳过程 $x[n]$，它的功率谱密度由下式给出：

$$S_{xx}(e^{j\Omega})=\frac{9}{\left(\frac{1}{2}+e^{j\Omega}\right)\left(\frac{1}{2}+e^{-j\Omega}\right)}$$

请找出一个可能的白化滤波器的单位冲激响应 $h[n]$，满足对 $n\leqslant 1$ 有 $h[n]=0$。此时保证对所有频率 Ω，$y[n]=x[n]*h[n]$ 的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$ 都是一个非零的常数。

扩展习题

11.25 现要求你为某个汽车设计一个基于微处理器的导航控制系统。令 $v[n]$ 表示在第 n 个采样时刻汽车速度与想要的速度之间的偏差。同时，令 $x[n]$ 表示此时汽车节流阀位置与所需要速度应保持的节流阀位置之间的偏差。设定节流阀位置仅仅在采样时刻发生变化。现在假设这些变量可以用一阶状态空间描述

$$v[n+1]=(1-\alpha)v[n]+\beta x[n]+d[n]$$

其中，$d[n]$ 表示作用在汽车上的其他干扰因素，这里假设 $d[n]$ 是零均值白噪声，即它的功率谱密度在所有频率处是常数，$S_{dd}(e^{j\Omega})=\sigma^2$，相应的，它的自相关函数是 $R_{dd}[m]=\sigma^2\delta[m]$。令 α (代表摩擦阻尼影响)是小于1的正数，β 为正数，并约定这两个参数都是已知的。现在假设以状态反馈形式进行控制，即 $x[n]=gv[n]$，其中

g是一个常数增量。因此，这个闭合环路系统可以表示为

$$v[n+1]=(1-\alpha+\beta g)v[n]+d[n]$$

(a) g满足什么条件，可以确保这个从$d[n]$映射到$v[n]$的闭合回路系统是一个稳定的线性时不变系统，满足有界输入有界输出。

(b) 假设通过一个方式选择的g满足(a)中的条件，求解

(i) 速度的功率谱密度$S_{vv}(e^{j\Omega})$，即自相关函数$R_{vv}[m]$的傅里叶变换；

(ii) $E\{v^2[n]\}$的表达式。

现在，同样假设(a)中的条件满足，假设控制设计任务是选择g来最小化$E\{v^2[n]+rx^2[n]\}$。这个标准反映了保持速度偏差和节流阀位置偏差接近于0的愿望。正参数r用于反映相对于速度偏差，不可取的节流阀偏差是怎么样的。如果不想要过度的节流阀偏差(比如考虑燃油经济或发动控制等原因)，可以使用一个较大的r值。

(c) 利用你在(b)中(i)所求解的表达式，来找到一个可能用于确定最佳g的表达式。

11.26 一个特定的离散时间广义平稳随机过程$\kappa[n]$有自相关函数

$$R_{\kappa\kappa}[m]=10\delta[m]+3\gamma(\delta[m-1]+\delta[m+1])$$

(a) 在这种情况下，γ可以取得的最大或最小的值分别是多少？确定$\kappa[n]$的均值和方差，同时确定$\kappa[n]$和$\kappa[n-1]$之间的相关系数。

对于接下来的问题，假设$\gamma=1$。

(b) 证明$\kappa[n]$可以作为一个合适的、稳定的一阶状态空间系统的输出，该系统被一个单位强度的(零均值)白过程$w[n]$，从时间$-\infty$开始激励。其中$w[n]$的方差为1。(提示：首先考虑你在这个系统想要什么样的单位冲激响应，或者说是传递函数)。明确地用以下的这个形式写下这个状态空间系统：

$$q[n+1]=\alpha q[n]+\beta w[n]$$

$$\kappa[n]=\xi q[n]+dw[n]$$

给出你所选择的、合适的系数α、β、ξ值，并解释你的理由。

你可能会找到超过一阶状态的模型来完成这个目标。确定它们中的任何一个，以作为完成设计目的的一个答案。

(c) 假设有另外一个一阶状态空间系统，它通过(b)中系统产生的有色过程$\kappa[n]$驱动。令$p[n]$表示这个系统的状态变量，并且假设这个系统的输出$y[n]$可以被测量。因此这个系统采取以下的形式描述：

$$p[n+1]=ap[n]+b\kappa[n],$$

$$y[n]=p[n]+v[n]$$

这里的a和b为固定非零标量参数，它们是对结果没有多少影响的一些精度数据，且$v[n]$是一个与$w[\cdot]$不相关的(零均值)方差为σ^2的白噪声过程。结合这个系统的描述以及你在(b)中得到的结果，写出一个包含状态变量$q[n]$和$p[n]$、白输入$w[n]$和测量输出$y[n]$的二阶状态模型。同时确定与这个系统相关的特征值和特征向量，即这个系统的一阶状态传输矩阵的特征向量。作为结果的检查，你的模型中的一个特征值应该为0。

(d) 如果可能的话，通过结合(c)中的系统，确定这个问题中的各个系数必须满足下列什么条件？

(i) 从输入信号$w[n]$的可达性；

(ii) 从输出信号$y[n]$的可观测性。

无论是上述情形中的哪一个，同样指出当条件不满足时，什么模式变得不可达或不可观测。

(e) 尽管$w[n]$、$\kappa[n]$和$v[n]$在上述指定的性质是已知的，但是假设它们是不可测量。不过$y[n]$是可测量的，就像之前提到的那样。请详细写出这个二阶观测方程，对$n\geqslant 0$时，分别指定估计值$\hat{q}[n]$和$\hat{p}[n]$来替代$q[n]$和$p[n]$。同时写出一个二阶状态模型，来描述演变误差$\tilde{q}[n]=q[n]-\hat{q}[n]$和$\tilde{p}[n]=p[n]-\hat{p}[n]$。选择观测增量来让两个误差模型特征值为0。

(f) 针对你在(e)中的观测量，写出持续状态变量$\tilde{p}[n]$的表达式，用a、b和σ来表示。

11.27 在光盘上以采样频率44.1kHz来存储音频信号(在光盘上，按照允许有效的误差检测和校正的码流形式存放)。作为数字到模拟(D/A)转换的一部分，数据被上采样到更高的采样频率。正如下面要探讨的这个问题，这里允许使用更简单的从而可能更便宜的D/A转换器。

基本策略在图P11.27-1中给出。这里的$x[n]$表示光盘上的音频，它是一个适度的带限信号$x_c(t)$，以44.1kHz采样，

并且量化处理得非常好，以至于对于解决本问题时可以忽略 $x[n]$ 的量化误差。过采样器将 $x[n]$ 转换成以 $L\times 44.1$kHz 速率对 $x_c(t)$ 进行采样的采样样本。也就是说，如果 $x[n]=x_c(nT)$，就有 $g[n]=x_c(nT/L)$。



图 P11.27-1

假设应用一个 b 比特(加号位)线性量化器到 $g[n]$，如图 P11.27-2 所示。用 Q 表示量化器的峰值输出，这里可以将这个量化器的误差 $e[n]$ 模型化为一个独立同分布过程，并与 $g[\cdot]$ 无关，在 $Q2^{-b}$ 范围上均匀分布，且在每个时刻都为零均值和方差 $\sigma_e^2=\frac{1}{12}Q^2 2^{-2b}$。

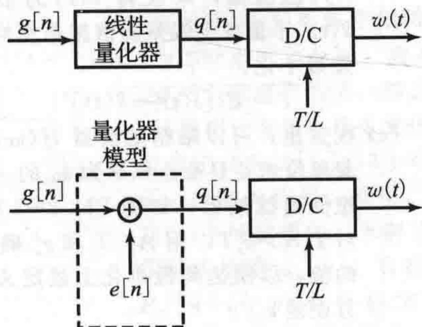


图 P11.27-2

如图 P11.27-3 所示，假设 $x[n]$ 是使用 44.1kHz 采样一个连续时间信号 $x_c(t)$ 得到的一个随机过程，且 $x_c(t)$ 的功率谱密度显示在图 P11.27-4 中。

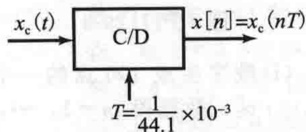


图 P11.27-3

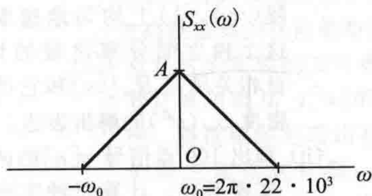


图 P11.27-4

(a) 画出 $x[n]$、$g[n]$、$e[n]$ 和 $w(t)$ 的功率谱密度。

(b) 在听音频之前，提出如何进一步提高 $w(t)$ 的信噪比(SNR)的处理方法。

(c) 作为对图 P11.27-2 中量化器的替代，考虑图 P11.27-5 中的过程，其称为是一阶噪声整形。对于这个量化器，画出 $q[n]$ 和 $w(t)$ 的功率谱密度。

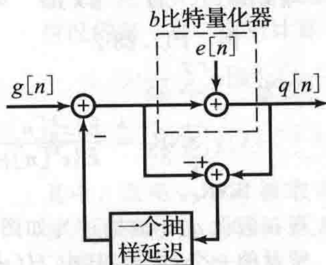


图 P11.27-5

(d) 在一个高品质 C/D 播放器中，$L=256$ 和 $b=1$ 比特。你认为这两个量化器哪个性能更好？

11.28 一个模拟到数字(A/D)转换器可以描述为，由一个 C/D 转换器(连续到离散的转换器)再跟着一个量化器构成。在一个线性量化器中，对于量化误差的一个有用的模型是将误差表示为一个方差为 σ_e^2 的、零均值的独立同分布过程，并且与离散时间量化器的输入 $x_d[\cdot]$ 无关。这导致该模型为一个如图 P11.28-1 所示的一个 A/D 转换器，其中，$q[n]$ 表示量化信号，而 $e[n]$ 表示通过量化器引入的误差。

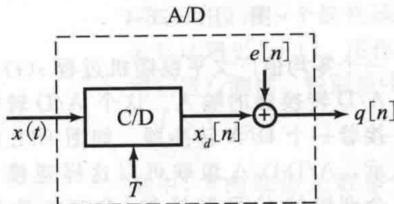


图 P11.28-1

假设

(i) $x(t)$ 是一个零均值广义平稳随机信号；

(ii) $e[n]$ 是一个方差为 $\sigma_e^2=\frac{1}{5}\times 10^{-3}$ 的零均值独立同分布过程；

(iii) $x_d[\cdot]$ 和 $e[\cdot]$ 是不相关的随机过程；

(iv) $x(t)$ 的功率谱密度 $S_{xx}(j\omega)$ 显示在图 P11.28-2 中；

(v) 采样周期是 $T=\frac{1}{4}\times 10^{-5}$，即采样频率是 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}=8\pi\times 10^5$。

(a) 在范围 $|\Omega|\leqslant 4\pi$ 内确定和画出 $q[n]$ 的功率谱密度 $S_{qq}(e^{j\Omega})$ 的示意草图。

(b) 量化信号 $q[n]$ 的信噪比 SNR_q 被定

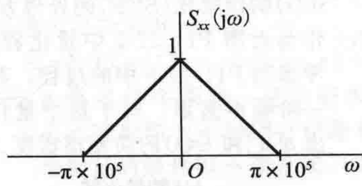


图 P11.28-2

义为

$$\mathrm{SNR_q} \triangleq \frac{E\{x_d^2[n]\}}{E\{e^2[n]\}}$$

求解 $\mathrm{SNR_q}$。

(c) 现在假设 $q[n]$被描述为如图 P11.28-3 所示的一个过程，其中 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是一个如图 P11.28-4 所示的低通滤波器，$x_r[n]$仅由 $x_d[n]$得到，且 $e_r[n]$仅由 $e[n]$得到。为了使得 $R_{x_r x_r}[n]=R_{x_d x_d}[n]$，且 $E\{x_r^2[n]\}=E\{e_r^2[n]\}$（即滤波后的信噪比）最大化，你需要选择 Ω_{CO}为什么值？

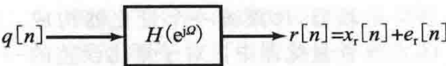


图 P11.28-3

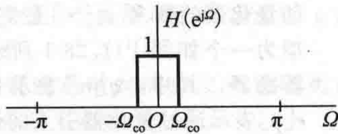


图 P11.28-4

11.29 一个零均值广义平稳随机过程 $s(t)$是一个 A/D 转换器的输入。这个 A/D 转换器紧接着一个 D/A 转换器。如图 P11.29-1 所示，A/D-D/A 级联可以这样建模：由一个理想的 C/D 转换器（含有加性量化噪声），然后紧跟着一个理想的 D/C 转换器构成。

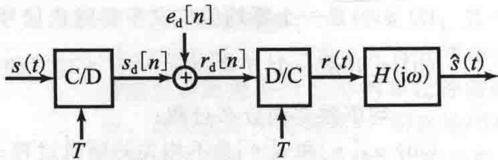


图 P11.29-1

特别地，

(i) 输入过程 $s(t)$有带限的功率谱密度，如图 P11.29-2 所示；

(ii) 这个 C/D 的输出是 $s_d[n]=s(nT)$；

(iii) 这个量化噪声 $e_d[n]$是一个功率谱密度为 $S_{e_d e_d}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sigma_e^2$ 的零均值广义平稳白噪声过程；

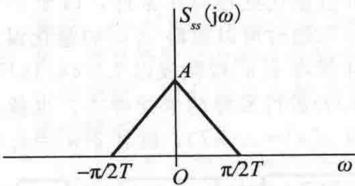


图 P11.29-2

(iv) 过程 $e_d[n]$与过程 $s_d[\cdot]$不相关；

(v) 这个 A/D 的输入是 $r_d[n]=s_d[n]+e_d[n]$；

(vi) D/A 的输出是

$$r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_d[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

(a) 确定和画出 $r(t)$的功率谱密度 $S_{rr}(\mathrm{j}\omega)$。

(b) 确定和画出 $s(t)$和 $r(t)$的互谱密度 $S_{sr}(\mathrm{j}\omega)$。

为了降低量化噪声的影响，希望让 $r(t)$通过一个频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)$的 LTI 滤波器，来获得 $s(t)$的估计值 $\hat{s}(t)$。尽量减少误差的措施是使均方误差最小化。

$$\varepsilon = E\{[s(t)-\hat{s}(t)]^2\}$$

(c) 在这里，可以限制滤波器 $H(\mathrm{j}\omega)$是有着单位增益且截止频率为 ω_c 的一个理想低通滤波器，如图 P11.29-3 所示。对于 $A>\sigma_e^2 T$，用 A、T 和 σ_e^2 确定 ω_c 的值，以便达到最小化上述定义的均方误差 ε。

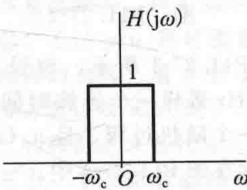


图 P11.29-3

11.30 (a) (i) 数字生成 100 点的一个随机信号 $v[n]$数据段（$n=1,\cdots,100$），作为一个独立同分布序列的实现。这个序列任何时间的取值是在间隔$(-1,1)$上均匀地选取，给出这个独立同分布过程的均值 μ_v、自相关函数 $R_{vv}[m]$和它的功率谱密度 $S_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$的解析表达。

(ii) 画出 100 点信号 $v[n]$的两种不同实现形式。计算每种实现的时间均值，同时与理论（全体）均值 μ_v 比较。对于 $m=0,1,2,3,4$（如果你喜欢的话，m 还可选择其他值），计算出每种实现的自相关函数值。

$$\hat{R}_{vv}[m]=\frac{1}{N_m}\sum_n v[n+m]v[n]$$

其中，求和的范围 N_m 是由 $v[n+m]$和 $v[n]$取值范围所定义的(这个是必要的，因为你仅仅定义 $v[n]$有 100 个数据)。将你的结果与之前计算的理论的(全体)自相关函数 $R_{vv}[m]$做比较。就考虑均值和自相关而言，这里是否有证据显示过程 $v[n]$是各态历经的？

(iii) 对于(ii)中的每一种实现方式，计算和画出出周期图。周期图定义为这 100 点信号的离散时间傅里叶变换的幅度平方除以 100。在两种实现之间，指出周期图的任何明显的相似和差异之处。同时计算和绘制超过 200 种实现的平均经验周期图(即实验得到的周期图)。如果你使用持续时间为 400 点的信号段，而不是 100 点的，如果有的话，那么与前面结果相比会发生什么变化？

(b) (i) 考虑定义为 $x[n]=3+(-1)^n+v[n]$的随机信号，其中，$v[n]$是在(a)中所构建的。求解这个随机信号的均值 $\mu_x[n]$、自相关函数 $R_{xx}[n+m,\ n]$和自协方差函数 $C_{xx}[n+m,\ n]$的解析表达。确定哪些数值(如果存在的话)是不依靠 n 的。

(ii) 产生和画出 $x[n]$的一个 150 点实现，接着将它作为一个因果滤波器的输入，这个滤波器的传递函数 $H(z)$在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处有零点，在 $z=0.8\pm \mathrm{j}0.2$ 处有极点。对于 $n=1,\ \cdots,\ 150$，画出输出 $y[n]$。评论 $y[n]$所反映出来的似乎是由滤波器特性所施加的任何功能。计算和画出 $y[n]$的周期图，忽略滤波器的任何初始瞬态。

(iii) 重复这个实验的 200 种实现，接着计算和画出 $y[n]$的平均周期图。将这幅图与输出功率谱密度的理论表达式比较，也就是与 $S_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sigma_v^2\ |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2$ 比较，其中，$\sigma_v^2=R_{vv}[0]$是 $v[n]$在任何时刻的方差。

11.31 考虑一个零均值广义平稳过程 $y[n]$，其 $E\{y^2[n]\}=\sigma^2$。假设在相邻的瞬间，信号值有一个相关系数 ρ，但是这个信号值超过一个瞬间间隔就是不相关的。

(a) 对于 $\rho=\pm 0.1$，$\rho=\pm 0.4$ 和 $\sigma^2=9$ 的情况，分别利用一个由白过程驱动的模型滤波来生成数字化的 $y[n]$，并画出 100 点 $y[n]$的连续数据。对于四种情况的每一种，分别计算

$$\frac{1}{99}\sum_k y[k]y[k+1]$$

和

$$\frac{1}{98}\sum_k y[k]y[k+2]$$

其中，在第一个对 k 求和的公式中，涉及的是对于 $y[k]$和 $y[k+1]$都定义了数据的中间 99 个数字，而在第二个对 k 求和的公式中，涉及的是对于 $y[k]$和 $y[k+2]$都定义了数据的中间 98 个数据。这些数据是否接近你期望找到的值？

(b) (i) 基于 $y[k]$的量测值，为 $y[k+1]$设计一个线性最小均方误差估计器 $\hat{y}[k+1]$，并且在 $\rho=0.4$ 的情况下，用你的数据集对它进行测试。特别是要计算

$$\frac{1}{99}\sum_k(\hat{y}[k+1]-y[k+1])^2$$

其中，k 的取值是数据中间的 99 个数据。这个数据是否接近你期望找到的值？

(ii) 基于 $y[k]$和 $y[k-1]$的测量值，为 $y[k+1]$设计一个线性最小均方误差估计器 $\hat{y}[k+1]$，用你的数据集对它进行测试。特别是计算

$$\frac{1}{98}\sum_k(\hat{y}[k+1]-y[k+1])^2$$

其中，k 的取值是数据中间的 98 个数据。这样做的结果是否比(b)(i)中的结果更好，或这些数据几乎是一样的？在一个无限长实验而不是只有 100 个点的限制下，你是否会期望这个数据比(b)(i)中计算得到的相应数值更小，或是否认为这两组数应该是一样的？

11.32 图 P11.32 描述了一个离散时间 Σ-Δ 量化器，其中，随机过程 $e[n]$表示通过一个线性量化器引入的误差。

假设信号 $x[n]$是一个广义平稳过程，它有一个在 $\Omega=0$ 时值为 M 的三角形功率谱密度，并且在 $\Omega=\pm\pi$ 时线性衰减到 0。这个量化噪声 $e[n]$被描述为一个(零均值)白噪声随机过程模型，它与 $x[\cdot]$无关，并且有自相关函数 $R_{ee}[m]=\sigma_e^2\delta[m]$。

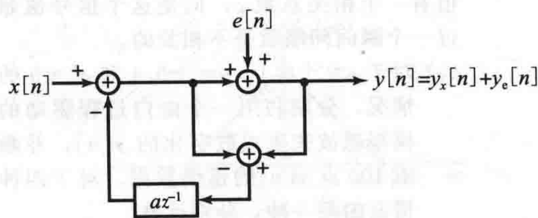


图　P11.32

输出过程 $y[n]$ 可表示为一个和的形式，即 $y[n]=y_x[n]+y_e[n]$。其中，$y_x[n]$ 表示对 $x[n]$ 的输出部分，$y_e[n]$ 表示对 $e[n]$ 的输出部分。

446
~
463

在图 P11.32 中的方框图中，a 是一个可调整参数。

(a) 确定从 $x[n]$ 到 $y_x[n]$ 的传递函数 $H_x(z)$，以及从 $e[n]$ 到 $y_e[n]$ 的传递函数 $H_e(z)$。

(b) 依据 M、σ_e^2 和 a 来确定 $y_x[n]$ 和 $y_e[n]$ 的功率谱密度。由这些功率谱密度的和能得到 $y[\cdot]$ 的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$ 吗？

(c) 确定 $E\{y_x^2[n]\}$ 和 $E\{y_e^2[n]\}$，在频域中用合适的积分来表示它们。

(d) 确定数据 a 来使得 SNR 最大化，SNR 的定义如下所示：

$$\mathrm{SNR}=\frac{E\{y_x^2\}}{E\{y_e^2\}}$$

第12章 信号估计

通过前两章的学习，读者已经掌握了在时域上和频域上处理随机过程的概念和方法。现在则可研讨随机过程所涉及的推理中的一些典型问题。这一章将讨论基于线性最小均方误差(Linear Minimum Mean Square Error，LMMSE)的一个广义平稳过程估计，即从另一个与之关联的广义平稳的随机过程来估计出该随机过程。早在20世纪40年代，罗伯特·维纳(Robert Wiener)就这个具有挑战性的问题给出了因果性的解决版本，即维纳滤波。在这之后，涉及随机过程估计，一般都会提到维纳滤波。在因果维纳滤波中，使用经过最佳选择的线性时不变滤波器，对当前时刻和过去时刻的测量值滤波，以实现令人感兴趣的随机过程的LMMSE估计。因果维纳滤波器是由最小相位的线性时不变模型滤波器派生的，其输入是白过程，输出是待测量的一个广义平稳过程。

在20世纪60年代，鲁道夫·卡尔曼(Rudolph Kalman)把LMMSE估计拓展到非平稳过程中，这时待测量随机过程的建模是通过一个时变的、线性的状态空间模型滤波器，用一些白噪声干扰作为激励，来产生带噪声的输出。卡尔曼滤波的目的就是通过LMMSE算法，使用量测值估计出状态空间的变量。至于LTI系统，第6章已经学过了利用状态空间量测值来合成所需滤波器的方法，只不过使用了一个可能是时变的增益向量。如果干扰和噪声过程是平稳的，以及干扰和噪声过程是可达系统的，同时输出的待测量值是可观测的，则观测增益与卡尔曼增益将收敛于某个不变的向量，从而精确得到状态空间的观测器，具体内容详见第6章。

本章主要关注维纳滤波器，尽管在最后提出了一个关于卡尔曼滤波器的简单实例，旨在给出一个最优状态空间观测器。

12.1 随机变量的LMMSE估计

联合的广义平稳过程的LMMSE估计与随机变量的LMMSE估计是紧密相连的，第8章对这个关键结果的简略总结是有用的。第8章展示了如何依据L个量测随机变量$\{X_i\}_{i=1}^{L}$的某种聚合，来建立一个随机变量Y的LMMSE估计。估计量$\hat{Y}$是对量测随机变量的一个线性组合，如下(实际上是一个线性组合再加上一个常数，也可以看成是一个仿射组合(affine combination))：

$$\hat{Y} = \mu Y + \sum_{i=1}^{L} a_i(X_i - \mu_{X_i}) = \mu Y + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X) \tag{12.1}$$

正如式(8.79)所表示的那样。以前是用$\hat{Y}_l$来表示LMMSE估计量，但是从这章开始只处理线性估计量，所以可以丢弃l下标来简单地标记。式(12.1)中的数据项m_Y和m_{X_i}表示其下标指示的各个随机变量的期望，或者说是均值。在这里常常用如下的向量标记：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_L \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_L} \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

式(12.1)给出的估计结果是无偏的，也就是说 $E[\hat{Y}]=\mu_Y=E[Y]$。

最优向量 $\boldsymbol{a}$ 是通过求解式(8.87)的正规方程获得的。它是通过让估计误差 $Y-\hat{Y}$ 与每个所量测随机变量 X_i 正交，来推导出结果，采用矩阵方程，式(8.87)可以写为

$$(\boldsymbol{C_{XX}})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c_{XY}} \tag{12.3}$$

这里，$\boldsymbol{C_{XX}}$ 是一个关于随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的 $L\times L$ 的对称协方差矩阵。第(i,j)个元素表示量测随机变量 X_i 与 X_i 的协方差 $\sigma_{X_iX_j}$，也等于第(j,i)个元素 $\sigma_{X_jX_i}$。类似地，$\boldsymbol{c_{XY}}$ 是一个 $L\times 1$ 的向量，其第 i 个分量是量测随机变量 X_i 与待估计的随机变量 Y 之间的协方差 σ_{X_iY}。等效地，可以分别给出协方差矩阵与向量的定义表达式，即

[465]

$$\boldsymbol{C_{XX}}=E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X})^{\mathrm{T}}],\quad \boldsymbol{c_{XY}}=E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X})(Y-\mu_Y)]=\boldsymbol{c}_{YX}^{\mathrm{T}} \tag{12.4}$$

这里的矩阵或向量的期望都是通过输入向量逐项对应计算出来的，因此 LMMSE 估计量可以由所涉及的随机变量的一阶矩和二阶矩来完全确定。

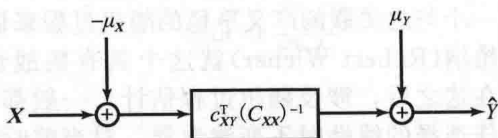


图 12.1　式(12.5)的框图表示。显示了基于 LMMSE 算法实现的从量测随机向量 $\boldsymbol{X}$ 对随机变量 Y 的估计

前面式(12.1)可以表示为

$$\hat{Y}=\mu_Y+\boldsymbol{c}_{XY}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C_{XX}})^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X}) \tag{12.5}$$

这个关系的框图如图 12.1 所示，它给出了一个有用的参考，以便与后面推导的结果进行对比。

可以直接计算与之关联的 MMSE，表示如下

$$\begin{aligned}\mathrm{MMSE}&=E[(Y-\hat{Y})^2]=E[(Y-\hat{Y})Y]=E[Y^2]-E[\hat{Y}Y]\\&=\sigma_Y^2-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c_{XY}}=\sigma_Y^2-\boldsymbol{c}_{XY}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C_{XX}})^{-1}\boldsymbol{c_{XY}}\\&=\sigma_Y^2\left(1-\frac{1}{\sigma_Y^2}\boldsymbol{c}_{XY}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C_{XX}})^{-1}\boldsymbol{c_{XY}}\right)\end{aligned} \tag{12.6}$$

表达式中的第二个等式表示零均值的 $Y-\hat{Y}$ 与每个量测随机变量是正交的，因此也就与 $\hat{Y}$ 正交，所以，$E[(Y-\hat{Y})\hat{Y}]=0$。第四个等式表达的是前一个等式减去和加上 μ_Y^2 的结果，然后合并方差和协方差。出现在式(12.6)最后一行的非负量

$$\rho_{XY}^2=\frac{1}{\sigma_Y^2}\boldsymbol{c}_{XY}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C_{XX}})^{-1}\boldsymbol{c_{XY}} \tag{12.7}$$

必须不大于 1，因为 MMSE 必须是非负的。它扮演着与 ρ_{XY}^2 类似的角色。在从单个随机变量 X 得到 Y 的 LMMSE 估计时，ρ_{XY}^2 代表随机变量 X 和 Y 之间的相关系数的平方。第 8 章介绍的使用向量空间来表征 LMMSE 中，ρ_{XY}^2 的值是向量 Y 与其在向量 $\{X_i\}$ 子空间的投影之间夹角的余弦值平方，或者等效于 Y 和 $\hat{Y}$ 之间夹角的余弦值平方。

这一章的目标是拓展 LMMSE 估计算法，在量测信号为广义平稳过程中的运用。也就是说通过广义平稳过程的量测值，估计出另一些联合的广义平稳过程在某些时刻的值。LMMSE 估计问题正如预期的那样，解决方案仅仅需要相关随机变量的一阶矩和二阶矩，特别是它们的均值、自协方差函数与互协方差函数。本章将详细讨论离散时间情况下的 LMMSE 估计问题，因为它更加透明易懂。不过，很多离散时间情况下的结果与连续时间情况的结果是紧密并行的，这在本章的最后会简短地介绍。

[466]

12.2 FIR 维纳滤波器

假设 $x[\cdot]$ 和 $y[\cdot]$ 是关联的广义平稳随机过程，均值为 μ_x、μ_y，自协方差函数为 $C_{xx}[m]$ 和 $C_{yy}[m]$，互协方差函数为 $C_{xy}[m]$。如果想要通过 $x[\cdot]$ 中的 L 个样本 $x[n]$，$x[n-1],\cdots,x[n-L+1]$ 来得到 $y[n]$ 在某些特定时刻 n 的 LMMSE 估计。这个估计可从下面的方程得到：

$$\hat{y}[n]=\mu_y+\sum_{j=1}^{L-1}h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.8}$$

这里使用一些最佳选择的系数 $h[0]$，$h[1]$，…，$h[L-1]$。这个公式本来就是式(12.1)，除了一些符号标记的变化。进一步，所选择的最佳 $h[j]$ 只与联合的广义平稳随机过程在时间轴上的相对位置关联，对于任何 n 值都是同样的，因为 n 不会改变本问题所涉及的采样数据之间的相对关系。

$h[j]$ 的最佳值是式(12.3)所表示的正规方程式通过适当的变换求解得到的。特别地，式(12.3)中协方差矩阵 $\mathbf{C_{XX}}$ 的元素(i, j)和元素(j, i)会变成 $C_{xx}[i-j]$，也就是说 $x[\cdot]$ 在间隔 $i-j$ 的自协方差。同样地，式(12.3)中 $\mathbf{c_{XY}}$ 的第 i 个元素会变成 $C_{xy}[i-1]$，也就是 $x[\cdot]$ 和 $y[\cdot]$ 互协方差在间隔 $i-1$ 的值。下面的例子说明了这个问题，它与10.5.2节中的那个例子很相似。

例 12.1 有加性噪声污染的信号 FIR 估计

想象有一个噪声污染的量测随机过程 $x[n]$，它是一个广义平稳随机过程 $y[n]$ 缩放得到的。

$$x[n]=2y[n]+v[n] \tag{12.9}$$

这里，$v[n]$ 是白噪声过程(因此必然是0均值的)，自相关函数 $C_{vv}[m]=\sigma^2\delta[m]$，并跟 $y[\cdot]$ 不相关。假设 $y[n]$ 的均值 $\mu_y=1$，自相关函数 $C_{yy}[m]=(0.3)^{|m|}$。那么，$x[n]$ 是一个广义平稳过程，均值 $\mu_x=2$，并且

$$C_{xx}[m]=4C_{yy}[m]+C_{vv}[m]=4\times(0.3)^{|m|}+\sigma^2\delta[m] \tag{12.10}$$

467

同时，$x[\cdot]$ 和 $y[\cdot]$ 是联合的广义平稳过程，其协方差为

$$C_{xy}[m]=2C_{yy}[m]=2\times(0.3)^{|m|} \tag{12.11}$$

基于量测 $x[n]$、$x[n-1]$ 和 $x[n-2]$，$y[n]$ 的 LMMSE 估计为

$$\hat{y}[n]=1+h[0](x[n]-2)+h[1](x[n-1]-2)+h[2](x[n-2]-2) \tag{12.12}$$

这里，$h[j]$ 的值可通过求解下面正规方程式来确定：

$$4\begin{bmatrix}1+(\sigma^2/4) & 0.3 & (0.3)^2\\ 0.3 & 1+(\sigma^2/4) & 0.3\\ (0.3)^2 & 0.3 & 1+(\sigma^2/4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h[0]\\ h[1]\\ h[2]\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ 0.3\\ (0.3)^2\end{bmatrix} \tag{12.13}$$

为了检验这些方程解的正确性，可以假设没有噪声，也就是说 $\sigma^2=0$，那么该系统的方程式有唯一解，即 $h[0]=1/2$，$h[1]=0$，$h[2]=0$，所以

$$\hat{y}[n]=1+(1/2)(x[n]-2)=x[n]/2$$

即在无噪声的情况下，准确等于 $y[n]$。这种情况必然是一个最佳估计。其他极端情况下，噪声强度非常高，即 $\sigma^2\gg1$，那么所有的 $h[j]$ 会非常小，所以有 $\hat{y}[n]\approx1=\mu_y$。换句话说，高噪声情况下，$y[n]$ 的最佳估计接近它的均值。◀

式(12.8)中的求和可以很容易识别出是一个卷积求和，可以假设由一个线性时不变滤波器来实现，其结构如图12.2所示，这就是维纳滤波器，可用于解决所有 n 时刻上的 LMMSE 估计问题，因为涉及的所有随机过程是联合的广义平稳过程。这个估计器一开始是去掉所量测的广义平稳过程中的均值，得到0均值的广义平稳过程波动 $\tilde{x}[n]=x[n]-\mu_x$。然后，将它提供给单位冲击响应为 $h[\cdot]$ 的这个 LTI 系统(维纳滤波器)。其中，$j=0$，1，…，$L-1$ 的 $h[j]$ 值，是通过最优选择计算得到的，对于其他 j 的 $h[j]$ 值设定为0。因此，这个滤波器的单位冲击响应只有有限长时间，是一个因果的有限单位冲击响应，或者说 FIR 滤波器。LTI 系统的输出

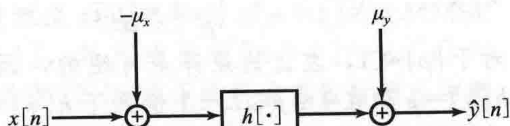


图 12.2 维纳滤波器结构。从关联的随机过程 $X[\cdot]$ 的量测来估计广义平稳过程 Y 时，利用最优选择的单位冲激响应 $h[\cdot]$ 实现 LMMSE 的估计

是零均值的 WSS 波动过程$\hat{y}[n]-\mu_y$，因此再加上 μ_y 就得到 LMMSE 估计$\hat{y}[n]$。

与式(12.8)关联的 LTI 系统通过对量测的波动信号进行滤波，可以产生 LMMSE 估计的波动，这是维纳滤波器的一个简单例子，称为因果 FIR 维纳滤波器(causal FIR Wiener filter)。就这同一类解决方案，因果 FIR 维纳滤波器也有许多经过验证是可行的变化形式，比如需要定义一个如下形式的估计量：

468

$$\hat{y}[n]=\mu_y+\sum_{j=-L}^{L}h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.14}$$

此表达式用时间窗口范围为$[n-L,n+L]$的 $x[\cdot]$的量测值，去估计随机过程 $y[\cdot]$在窗口中心时间的 $y[n]$。同样地，列出时间窗口对应的 $2L+1$ 个标准方差，就可求解得到 $h[j]$最优值。除了这个滤波器不是因果的之外，这个结果和图 12.2 所示的维纳滤波器是一样的。接下来的例子阐明了另一种变化，称为 FIR 维纳预测(FIR Wiener prediction)，它是通过量测的当前值以及特定范围内的过去值，去预测随机过程将来的值。

例 12.2 FIR 预测

对于一个广义平稳过程 $x[\cdot]$，考虑用量测的 $x[n]$，$x[n-1]$，…，$x[n-L+1]$来获得 LMMSE 估计量 $x[n+1]$。用最新量测的 L 个值来进行广义平稳过程的单步 LMMSE 预测是合理的。当然可以定义一个广义平稳过程 $y[n]$，对于所有的 n 都有 $y[n]=x[n+1]$，来进行分析，但这会降低精确描述本节开始时提出的问题。使用$\hat{y}[n]=\hat{x}[n+1]$来改写式(12.8)给出的估计量，可以得到

$$\hat{x}[n+1]=\mu_y+\sum_{j=0}^{L-1}h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.15}$$

然后用正规方程求解 $h[j]$的最优解。因为 $C_{xy}[m]=C_{xx}[m-1]$，可以得到

$$\begin{pmatrix} C_{xx}[0] & C_{xx}[1] & C_{xx}[2] & \cdots & C_{xx}[L-1] \\ C_{xx}[-1] & C_{xx}[0] & C_{xx}[1] & \cdots & C_{xx}[L-2] \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ C_{xx}[1-L] & C_{xx}[2-L] & \cdots & \cdots & C_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{xx}[-1] \\ C_{xx}[-2] \\ \vdots \\ C_{xx}[-L] \end{pmatrix} \tag{12.16}$$

因为 $C_{xx}[-m]=C_{xx}[m]$，所以左边的方阵是对称的。式(12.16)又称为 Yule-Walker 方程。

这里只对两种特殊情况感兴趣：一种是几何级数(也就是以指数方式)相关过程，另一种是有限相关过程。

几何级数相关过程(geometrically correlated process) 作为第一种特例，假设 $C_{xx}[m]=C_0(\rho)^{|m|}$ 的情况，其中，$C_0>0$ 和 ρ 幅度小于 1，这称为几何级数相关过程，在离散时间内等效为指数相关。正规方程或者 Yule-Walker 方程就变成了

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{L-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{L-2} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \rho^{L-1} & \rho^{L-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^2 \\ \vdots \\ \rho^L \end{pmatrix} \tag{12.17}$$

对于$|\rho|<1$，左边的矩阵是可逆的，因此上述方程有唯一解。通过检验可以知道，假设 $h[0]=\rho$ 和在 $1\leqslant j\leqslant L-1$ 情况下 $h[j]=0$，满足式(12.17)。因此，对于一个几何级数相关的过程，其 LMMSE 单步预测(one-step predictor)可写为

469

$$\hat{x}[n+1]=\mu_x+\rho(x[n]-\mu_x)=\rho x[n]+(1-\rho)\mu_x \tag{12.18}$$

此外注意到，它仅仅需要最近的量测值 $x[n]$。尽管 $x[n+1]$和之前每个量测值都相关，但是所有在 $x[n]$之前的量测值都可忽视。因为 $x[n]$携带了所有关于估计 $x[n+1]$的知识。

相应的 MMSE 由式(12.6)的第四个等式直接决定，其结果是

$$\text{MMSE} = C_{xx}[0] - h[0]C_{xx}[-1] = C_0(1-\rho^2) \tag{12.19}$$

对于形如 $h[j]C_{xx}[-j-1]$的其他求和项(即 $j>0$ 的求和项)在上述方程中没有出现，是因为在 $j>0$ 时 $h[j]=0$。式(12.19)与第 7 章和第 8 章从一个随机变量估计另一个随机变量的表达式是一致的。

临近相关过程(proximally correlated process)　第二种特殊情况是假定

$$C_{xx}[m] = C_0(\rho\delta[m+1] + \delta[m] + \rho\delta[m-1]) \tag{12.20}$$

从上式可以看出随机过程中任意时刻的值，只与其前后相差一步的值相关，相差超过一步就不相关(推广到更一般的情况，是讨论随机过程的值只与其前后相差有限步的数据值相关)。正如例 11.4 所讨论的那样，一个有效的自协方差函数所必需的约束是$|\rho|<0.5$，这与要求其离散时间傅里叶变换(DTFT)为非负的约束一样，这是频谱密度所必需的。在本例中可以限制 $L=3$，为了使得计算简单，此时正规方程，即 Yule-Walker 方程变成：

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.21}$$

左边的矩阵揭示了临近相关过程可使用另一个名字，即带状过程(a banded process)。求解包含了系统三个未知数的三个方程，得到的解为

$$h[0] = \frac{\rho(1-\rho^2)}{1-2\rho^2};\quad h[1] = \frac{\rho^2}{1-2\rho^2};\quad h[0] = \frac{\rho^3}{1-2\rho^2} \tag{12.22}$$

注意 $h[1]$和 $h[2]$是非零的，所以 $x[n-1]$和 $x[n-2]$要与 $x[n]$一起来估计 $x[n+1]$，即使在 $x[n+1]$与 $x[n-1]$和 $x[n-2]$不相关的时候。

相应的 MMSE 可以很容易地由式(12.6)中第四个方程得到，方程如下：

$$\text{MMSE} = C_{xx}[0] - h[0]C_{xx}[-1] = C_0\left(1 - \frac{\rho(1-\rho^2)}{1-2\rho^2}\right) \tag{12.23}$$

对于形如 $h[j]C_{xx}[-j-1]$的其他求和项，在上述方程中没有出现，是因为在 $j>0$ 时 $C_{xx}[-j-1]=0$。

式(12.23)的 MMSE，会比用 $x[n]$单独预测 $x[n+1]$所得的 MMSE $C_0(1-\rho^2)$的要小。例如，对于$|\rho|=0.5$，式(12.23)的 MMSE 大概为 $0.625C_0$，然而后一种的 MMSE 为 $0.75C_0$。从使用单独量测值 $x[n]$到使用量测值 $x[n]$，$x[n-1]$，$x[n-2]$，可以降低 16.7%的误差(标准偏差减少 8.7%)。这种幅度降低在一些特殊应用中是意义重大的。$|\rho|$的值越小，MMSE 的降低就越小。

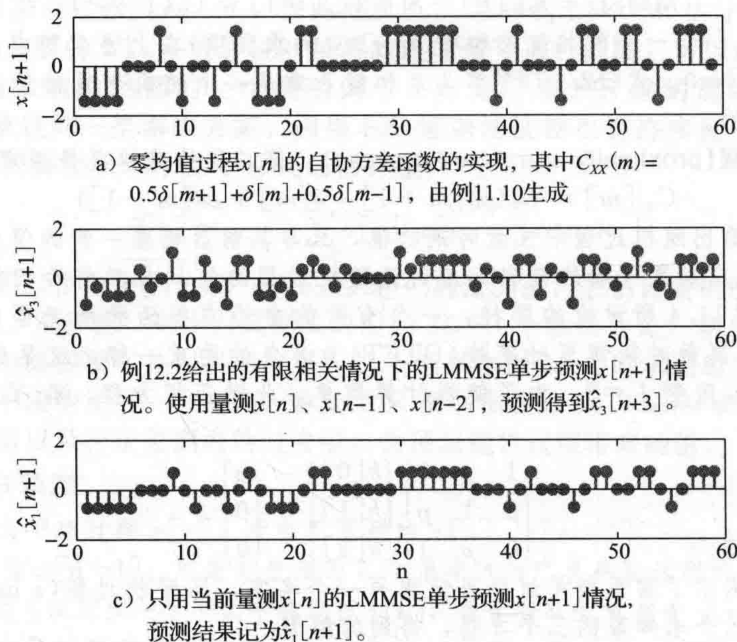
470

式(12.20)中零均值过程 $x[n]$的自协方差函数的具体实现如图 12.3a 所示，其中 $\rho=0.5$，$C_0=1$。在前面例 11.10 中描述过这个信号怎么生成的。图 12.3b 所表示的是由式(12.15)和式(12.22)所表示的 LMMSE 估计量得到的单步预测随机过程，其中 $h[0]=0.75$，$h[1]=-0.5$，$h[2]=0.25$。图中相关的估计量是以$\hat{x}_3[n+1]$为标记。与此估计量关联的 MMSE 为 0.625，而通过图 12.3b 显示的所有离散时间点的数据，求出其平均时间均方误差(time-averaged square error)为 0.614。

作为对比，图 12.3c 所示的单步预测是只使用量测值 $x[n]$来预测 $x[n+1]$的 LMMSE 估计量而产生的。其中相关估计的标示为 $\hat{x}_1[n+1]$，并且给出 $\hat{x}_1[n+1]=\rho x[n]=0.5x[n]$。与此估计值关联的 MMSE 为 0.75，而通过图 12.3c 显示的所有离散时间点的数据，求出其平均时间均方误差为 0.746。

从图 12.3 可以很明显地看出 b 和 c 的振幅比信号 $x[n+1]$要小。产生这种情况的原因在式(12.15)中，LMMSE 估计值是取决于所获取的量测值和均值 μ_x，但在 MMSE 计算中 μ_x 与量测值无关。本例假设了 $\mu_x=0$，所以就有把估计值向 0 值拉动的趋势。随着更多的量测值用于估计中，也就是说随着 L 值增大，均值 μ_x 的重要性就降低了，此时的估计值

471



a）零均值过程$x[n]$的自协方差函数的实现，其中$C_{XX}(m)=0.5\delta[m+1]+\delta[m]+0.5\delta[m-1]$，由例11.10生成

b）例12.2给出的有限相关情况下的LMMSE单步预测$x[n+1]$情况。使用量测$x[n]$、$x[n-1]$、$x[n-2]$，预测得到$\hat{x}_3[n+3]$。

c）只用当前量测$x[n]$的LMMSE单步预测$x[n+1]$情况，预测结果记为$\hat{x}_1[n+1]$。

图　12.3

将更多地由量测值来决定。◀

12.3　无约束的离散时间维纳滤波

针对前一节定义的联合广义平稳过程 $x[\cdot]$和 $y[\cdot]$，现在假设想要再次构造一个 LMMSE 估计，对一些特定 n 的 $y[n]$进行估计，但使用的量测值为所有 n 的 $x[n]$，即有

$$\hat{y}[n]=\mu_y+\sum_{j=-\infty}^{\infty}h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.24}$$

其中，相关系数 $h[j]$是计算出来的最优选择值。该式与式(12.8)不同的是，求和的范围变成了$-\infty\sim\infty$。在以前的讨论中，对所有 n 使用相同的一组系数 $h[j]$，这是有用的，因为涉及的随机过程都是广义平稳过程。之前方程涉及卷积处理，正如图 12.2 所示的框图那样。然而，现在这里的滤波器，其单位冲击响应潜在的是无限区间长。因此，正规方程不再是有限阶的矩阵形式，所以不得不进行改进。

回想一下，由 $\boldsymbol{X}$ 进行 LMMSE 估计以得到 y 的正规方程所揭示的内容：

- LMMSE 估计的推导必须是无偏的，也就是 $E[\hat{Y}]=E[Y]$，从而得到了式(12.1)的估计公式；
- 以及可以导出正交性条件：当$\hat{Y}$是 LMMSE 估计值，则误差 $Y-\hat{Y}$或者等价的$(Y-\mu_Y)-(\hat{Y}-\mu_Y)$，与在估计中用到的所有量测值正交，也就是说，与向量 X 的组成部分或者 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}$ 的组成部分正交(因为无偏性确保随机过程可以和任意常量正交)。

无偏性和正交性可以分别通过简单的计算来得到。比方说，将均方误差关于估计值的权系数进行一阶求导，然后设导数等于 0 就可以计算出来。

相同的原因适用于这里所讨论的情况，所以就不一一赘述细节了。基于无偏估计的条件可推导出估计值公式，即式(12.24)，估计误差为

$$e[n]=y[n]-\hat{y}[n]=(y[n]-\mu_y)-(\hat{y}[n]-\mu_y) \tag{12.25}$$

它具有 0 均值。而基于正交性的条件，有下列公式对于所有 m 都成立。

$$E[e[n]x[n-m]] = 0 = E[e[n](x[n-m]-\mu_x)] \tag{12.26}$$

当 $m\geqslant 0$ 时，确保了误差 $e[n]$ 与随机过程 $x[\cdot]$ 的当前值和过去值正交；当 $m<0$ 时，确保了 $e[n]$ 和 $x[\cdot]$ 所有将来时刻的值正交。

472

假设图 12.2 所示滤波器的单位冲击响应 $h[\cdot]$ 是稳定的，或者至少频率响应是定义明确的，这将使得它的输出 $y[n]-\mu_y$ 与所量测的输入过程值是联合广义平稳的。因此，正交条件可以简化为

$$C_{ex}[m] = C_{yx}[m] - C_{\hat{y}x}[m] = 0 \tag{12.27}$$

或者

$$C_{\hat{y}x}[m] = C_{yx}[m] \tag{12.28}$$

对于所有 m 都成立。后面一个公式为满足正交条件的最优系统提供了另一种说法，那就是，估计值和量测值的互协方差(上述公式等号左边的)等于待估计的随机过程与量测值的互协方差(上述公式等号右边的)。

为了计算单位冲击响应 $h[\cdot]$，观察一下 $\hat{y}[n]$，它是 $x[n]$ 通过线性时不变系统滤波所得的，这里线性时不变系统的单位冲击响应为 $h[\cdot]$。接下来关系的应用与前面建立式(10.65)的过程相似，即

$$C_{\hat{y}x}[m] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j]C_{xx}[m-j] = h[m] * C_{xx}[m] \tag{12.29}$$

这个结果可由式(12.24)直接推导出来的。先改写式(12.24)为

$$\hat{y}[n] - \mu_y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.30}$$

然后两边同乘 $(x[n-m]-\mu_x)$，再将右边相乘运算移到求和的里面，最后两边计算期望值(就可以得到式(12.29))。

将式(12.29)与式(12.28)合并可得

$$h[m] * C_{xx}[m] = C_{yx}[m] \tag{12.31}$$

它对所有 m 都成立，其中 $C_{xx}[m]$ 和 $C_{yx}[m]$ 是已知的，$h[m]$ 是待求的。将时域上的卷积关系转换到频域上，就变成了简单的乘法关系：

$$H(e^{j\Omega})D_{xx}(e^{j\Omega}) = D_{yx}(e^{j\Omega}) \tag{12.32}$$

重新整理方程可以得到，在对于所有频率 Ω，$D_{xx}(e^{j\Omega})\neq 0$ 时，无约束的 LMMSE 估计，或者维纳滤波所希望的频率响应的表达式：

473

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{D_{yx}(e^{j\Omega})}{D_{xx}(e^{j\Omega})} \tag{12.33}$$

对于那些使得 $D_{xx}(e^{j\Omega})=0$ 的频率 Ω，从式(11.51)可以确保此时的 $D_{yx}(e^{j\Omega})=0$，因此，在这些频率处 $H(e^{j\Omega})$ 可以选择任意值。这个选择不会影响均方误差，因为量测随机过程 $x[n]$ 的频谱内容不在这些频率之内。这个结果表明，$H(e^{j\Omega})$ 在适度满足连续条件(a mild continuity condition)下是一个平稳的滤波器。

其整体构造如图 12.4 所示，它与图 12.1所示的 LMMSE 估计结构和细节表达很相似。$D_{xx}(e^{j\Omega})$ 和 $D_{yx}(e^{j\Omega})$ 分别对应着 $\mathbf{C_{XX}}$ 和 $\mathbf{c}_{XY}^{T}=\mathbf{c}_{YX}$ 的角色。不过借助频域的表征结果，人们就可以像解决两个随机变量之间的 LMMSE 估计问题一样，很简单地处理两个联合的广义平稳过程间的 LMMSE 估计问题。特别要说明的，在频域中滤波器在每个频率之间的特性互不关联。在后面的章节中，这种类似的模型还会出现。

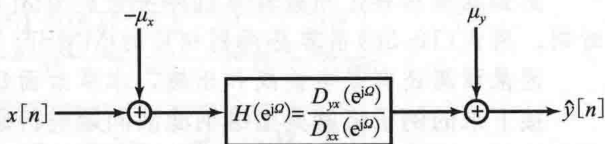


图 12.4 无约束的维纳滤波器的频率表征

最佳滤波对应的均值均方误差，也就是说 MMSE 为

$$\text{MMSE} = E[e^2[n]] = C_{ee}[0] \tag{12.34}$$

为此，这里需要得到 $C_{ee}[m]$ 的表达式，与式(12.6)中的第四个方程类似：

$$C_{ee}[m] = C_{yy}[m] - C_{\hat{y}\hat{y}}[m] = C_{yy}[m] - (h[m] * C_{xy}[m]) \tag{12.35}$$

其中，$h[m]$ 是最优滤波器的单位采样响应。等式右边是全部已知的，所以，$C_{ee}[m]$ 和 $C_{ee}[0]$ 都是可计算的。

MMSE 的频域表达式也是有用的。将式(12.35)进行离散时间傅里叶变换，就可以得到波动谱密度的误差：

$$D_{ee}(e^{j\Omega}) = D_{yy}(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})D_{xy}(e^{j\Omega}) = D_{yy}(e^{j\Omega})(1 - \rho_{yx}(e^{j\Omega})\rho_{yx}^{*}(e^{j\Omega})) \tag{12.36}$$

其中，

$$\rho_{yx}(e^{j\Omega}) = \frac{D_{yx}(e^{j\Omega})}{\sqrt{D_{yy}(e^{j\Omega})D_{xx}(e^{j\Omega})}} \tag{12.37}$$

474 这里，函数 $\rho_{yx}(e^{j\Omega})$ 扮演的角色是频域上的一个复数相关系数，可以认为是两个过程的相关函数。事实上，式(12.36)中的 $D_{ee}(e^{j\Omega})$ 对于所有频率都是非负的，只要确保对于所有频率 Ω 都有 $|\rho_{yx}(e^{j\Omega})| \leqslant 1$。这一结论的发现，提供了一条计算式(11.51)的边界条件的新思路。现在改写 MMSE 为

$$\text{MMSE} = C_{ee}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{ee}(e^{j\Omega})d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{yy}(e^{j\Omega})(1 - |\rho_{yx}(e^{j\Omega})|^2)d\Omega \tag{12.38}$$

在一些频率范围内，相关函数的幅度接近 1。在这些频率范围内，LMMSE 估计的 $\hat{y}[\cdot]$ 能更好地接近于 $y[\cdot]$，也就是说，对这个频率范围内的 $x[\cdot]$ 组成分量，进行适当的 LTI 滤波可得到更好的估计。

此外，还应该注意到，式(12.38)最后一个等式的被积函数 $D_{yy}(e^{j\Omega})(1-|\rho_{yx}(e^{j\Omega})|^2)$，与在 LMMSE 估计中用随机向量 $\boldsymbol{X}$ 去估计随机变量 Y 时所给出的 MMSE 表达式中的 $\sigma_Y^2(1-\rho_{Y\boldsymbol{X}}^2)$ 是相似的。所不同的是在广义平稳过程的环境中，表达式针对所有频率积分计算得到 MMSE。

接下来的一些例子进一步展示了在各种设置下估计方法的变化。第一个例子主要是对维纳滤波器解决方案的一个简单检验。

例 12.3 非因果预测

假设量测过程 $x[n]$ 是广义平稳的，现在想预测其 $n_0>0$ 之前的值，所以

$$y[n] = x[n+n_0] \tag{12.39}$$

对于无约束维纳滤波器来说，这是很简单明了的，直接选取滤波器的单位冲击响应 $h[n]=\delta[n+n_0]$ 就可以了。这也可以用式(12.33)推出：

$$C_{yx}[m] = C_{xx}[m+n_0] \tag{12.40}$$

所以有

$$D_{yx}(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega n_0}D_{xx}(e^{j\Omega}) \tag{12.41}$$

推得最优滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega}) = D_{yx}(e^{j\Omega})/D_{xx}(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega n_0} \tag{12.42}$$

正如期望那样，相应的单位冲击响应为 $\delta[n+n_0]$。这个滤波器将输入时间左移 n_0 个时刻。用式(12.38)很容易得到相应的 MMSE 为 0。

因果预测还有很多挑战和乐趣，本章后面还将进行一一印证。◀

接下来的例子将就典型维纳滤波问题进行研究。解决问题的目的是要从叠加了加性噪声干扰的一组信号量测值中估计出信号本身。 475

例 12.4 叠加了加性噪声的信号无约束估计

就像在例 12.1 中所假设的那样，一个量测信号 $x[n]$ 是以一个潜在的广义平稳随机信号 $y[n]$ 为基础进行扩展的且叠加了噪声干扰的信号，表示为

$$x[n] = 2y[n] + v[n] \tag{12.43}$$

其中，$v[n]$是广义平稳的噪声过程。假定$v[\cdot]$与$y[\cdot]$是不相关的，所以它们之间的协方差为0，也就是说对于所有的m都有$C_{yv}[m]=0$。同时也假定，已知它们的均值μ_y、μ_v和自协方差为$C_{yy}[m]$、$C_{vv}[m]$。现在想要用全体记录的量测值$x[\cdot]$来构造一个LMMSE估计值$y[n]$。如图12.4实现结构所示，这里使用一个维纳滤波器，它以量测值$x[\cdot]$为输入，其中$\mu_x=2\mu_y+\mu_v$，来产生输出$\hat{y}[n]$。

这个需要维纳滤波器滤波处理的值可以非常直接地计算出来。为了简化表达式，引用$C_{yv}[m]=0$，有

$$\begin{aligned}C_{xx}[m] &= 4C_{yy}[m]+C_{vv}[m]+2C_{yv}[m]+2C_{yv}[-m]\\ &=4C_{yy}[m]+C_{vv}[m]\end{aligned}\tag{12.44}$$

和

$$C_{yx}[m]=2C_{yy}[m]+C_{yv}[m]=2C_{yy}[m]\tag{12.45}$$

经过对式(12.35)的转换和替代，维纳滤波器的频率响应可以表示为

$$H(e^{j\Omega})=\frac{2D_{yy}(e^{j\Omega})}{4D_{yy}(e^{j\Omega})+D_{vv}(e^{j\Omega})}\tag{12.46}$$

注意，这种情况下的维纳滤波器的单位冲击响应必须是关于时间的偶函数，因为滤波器的频率响应是关于频率的实的、因此也是对称的频率函数。由此可知此滤波器是非因果的。

对于那些信号的波动功率远大于噪声的波动功率的Ω频率范围内，$H(e^{j\Omega})\approx 1/2$；而对于那些噪声的波动功率远大于信号的波动功率的$\Omega$频率范围内，$H(e^{j\Omega})=2D_{yy}(e^{j\Omega})/D_{vv}(e^{j\Omega})\approx 0$。例如，对于一个方差为$\sigma^2=4$的白噪声，以及一个符合式(12.20)的临近相关的$C_{yy}[m]$，其中$C_0=2$，$\rho=0.5$，可得到

$$D_{yy}(e^{j\Omega})=2(1+\cos\Omega)\tag{12.47}$$

那么可推得最优滤波器具有一个低通频率响应，如图12.5所示。

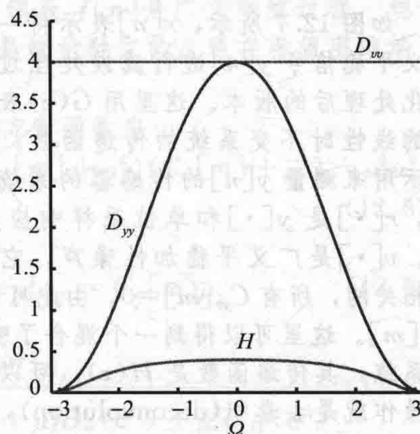


图12.5　信号波动谱密度$D_{yy}(e^{j\Omega})$、白噪声波动谱密度$D_{vv}(e^{j\Omega})$，以及维纳滤波器的频域响应$H(e^{j\Omega})$的曲线

该滤波器的仿真曲线如图12.6所示。这个图从上到下分别给出了潜在信号$y[n]$、实际量测信号$x[n]$，以及基于LMMSE对$y[n]$的估计(记为$\hat{y}[n]$)的具体实现。

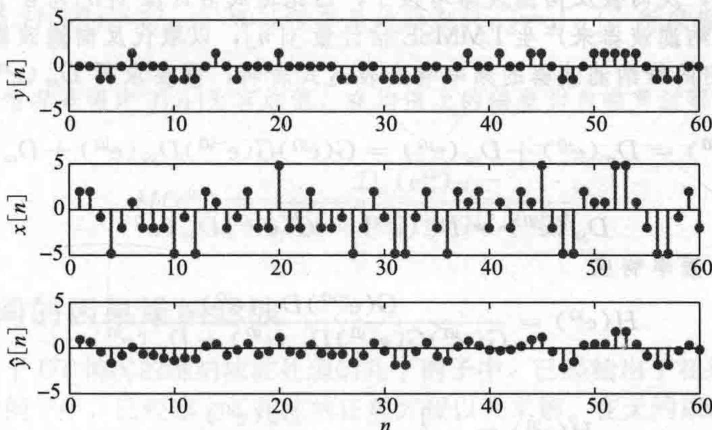


图12.6　有加性噪声干扰的信号估计。从上到下分别表示：潜在的信号$y[n]$、实际的量测信号$x[n]$以及LMMSE估计对$y[n]$的估计，记为$\hat{y}[n]$

经过式(12.38)的适当变形，可以推出该滤波器的 MMSE，其结果是

476 ~ 477

$$\mathrm{MMSE}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{4D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}\mathrm{d}\Omega \tag{12.48}$$

如果噪声强度相对信号的 FSD 是比较低的，表达式可以简化为

$$\mathrm{MMSE}\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4}C_{vv}[0] \tag{12.49}$$

这与下列事实相一致：在低噪声情况下，$\hat{y}[n]\approx\frac{1}{2}x[n]$，其误差范围基本上为$\frac{1}{2}v[n]$。另一种极端情况，当噪声强度相对信号的 FSD 是非常高的时，有

$$\mathrm{MMSE}\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega=C_{yy}[0] \tag{12.50}$$

这就是信号的方差。类似地，这与下列事实相一致：在高噪声情况下，$\hat{y}[n]\approx\mu_y$，所以误差自然就是 $y[n]$与其均值的差值。◀

接下来的这个例子比之前的更进了一步，所说明的场景会在很多应用中出现。

例 12.5 模糊信号的去卷积

如图 12.7 所示，$r[n]$表示将一个有趣的广义平稳信号 $y[n]$进行滤波处理过或者说模糊化处理后的版本。这里用 $G(z)$表示这个稳定的线性时不变系统的传递函数，或者说是表示用来测量 $y[n]$的传感器的系统函数。因此，$r[\cdot]$是 $y[\cdot]$和单位采样响应$g[\cdot]$的卷积。$v[\cdot]$是广义平稳加性噪声，它和$y[\cdot]$是不相关的，所有 $C_{yv}[m]=0$。由此可知，噪声与 $r[\cdot]$也是不相关的，因为 $C_{rv}[m]=g[m]*C_{yv}[m]$。这里可以得到一个混合了噪声信号的随机过程 $x[\cdot]$，现在想设计一个线性时不变系统，其传递函数是 $H(z)$，可以通过量测信号来得出输入信号 $y[n]$的估计值。这种滤波操作就是去卷积(deconvolution)，或者说是去模糊(deblurring)。

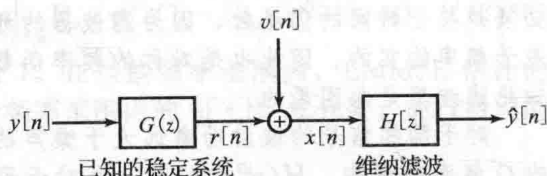


图 12.7 一个模糊信号叠加噪声的维纳滤波器

在没有加性噪声的情况下，有 $x[n]=r[n]$。此时当传输信号 $H(z)=1/G(z)$就能精确地还原 $y[\cdot]$。如果$G(z)$是满足最小相位的系统，则对应的这个反向滤波器可以是稳定和因果的，正如 2.32 节所阐述的那样，但是其他情况下它都是非因果的。然而，当存在噪声时，反向滤波不是一个好的解决方案，因为对于$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$幅度值较小时的频谱分量，该反向滤波的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$的幅度会很大。造成的结果是，在量测信号中 $r[n]$的功率相对噪声功率较小的那部分频率分量，反而被反向滤波器增强了，因此造成估计值 $y[n]$包含了更多的噪声。为此需要设计一个维纳滤波器来产生 LMMSE 估计量 $y[n]$，以取代反向滤波器设计。

478

式(12.33)给出的维纳滤波器的频率响应表达式表明，需要求得 $D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$和 $D_{yx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$。直接计算可得

$$D_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=D_{rr}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \tag{12.51}$$

和

$$D_{yx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=D_{yr}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \tag{12.52}$$

维纳滤波器的频率响应

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})D_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})} \tag{12.53}$$

整理重写为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{1}{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}\frac{D_{rr}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{D_{rr}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+D_{vv}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})} \tag{12.54}$$

上式表明，如果能先找到 $x[n]$的 LMMSE 估计$\hat{r}[n]$(具体见例 12.4)，然后再将$\hat{r}[n]$通过反转滤波器 $1/G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$得到的结果，就和从维纳滤波器所获得的结果一样。

当噪声极低时，也就是$D_{ww}(e^{j\Omega})\to 0$，这就变成了反转滤波器，频率响应为$1/G(e^{j\Omega})$。如果噪声是白噪声，$D_{ww}(e^{j\Omega})=\sigma_v^2$在分母中占主导地位，此时有

$$H(e^{j\Omega})\approx\frac{1}{G(e^{j\Omega})}\frac{D_{rr}(e^{j\Omega})}{\sigma_v^2} \tag{12.55}$$

该表达式符合对所量测的随机过程$x[n]$先进行一次滤波处理，即优先通过那些在$r[n]$中很强的频率分量，随后再使用反向滤波器进行处理。◀

接下来的例子是对信号乘以而不是叠加一个不确定性信号或者噪声信号，以进行维纳滤波的情况。

例 12.6 去乘性因子处理

一个均值为μ_s、自协方差函数为$C_{ss}[m]$的广义平稳信号$s[n]$在一个乘性信道中传播，所以接收到的信号$r[n]$在时刻n处的值为

$$r[n]=f[n]s[n] \tag{12.56}$$

其中，$f[n]$是信道在时间n时的乘性因子。信道具有时变的传输特性，在这里也被当作衰落信道(a fading channel)来提及。例如$s[n]$可以看作一个光源第n次传输的强度，$f[n]$是经过有扰动的传输媒介的衰减，$r[n]$为接收到的强度。假设$f[n]$是广义平稳过程，均值为μ_f、自协方差函数为$C_{ff}[m]$，并且和输入信号$s[\cdot]$是统计独立的。现在希望用维纳滤波器从$r[\cdot]$估计$s[n]$。

479

显然$r[n]$是广义平稳过程，均值为$\mu_r=\mu_f\mu_s$，自协方差函数为

$$\begin{aligned}C_{rr}[m]&=R_{rr}[m]-\mu_r^2=R_{ff}[m]R_{ss}[m]-\mu_f^2\mu_s^2=(C_{ff}[m]+\mu_f^2)(C_{ss}[m]+\mu_s^2)-\mu_f^2\mu_s^2\\&=C_{ff}[m]C_{ss}[m]+\mu_f^2C_{ss}[m]+\mu_s^2C_{ff}[m]\end{aligned} \tag{12.57}$$

因为$s[\cdot]$是联合的广义平稳过程，互协方差为

$$C_{sr}[m]=R_{sr}[m]-\mu_s\mu_r=R_{ss}[m]\mu_f-\mu_s^2\mu_f=C_{ss}[m]\mu_f \tag{12.58}$$

维纳滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\Omega})=\frac{D_{sr}(e^{j\Omega})}{D_{rr}(e^{j\Omega})}=\frac{D_{ss}(e^{j\Omega})\mu_f}{\frac{1}{2\pi}[D_{ff}(e^{j\Omega})\otimes D_{ss}(e^{j\Omega})]+\mu_f^2D_{ss}(e^{j\Omega})+\mu_s^2D_{ff}(e^{j\Omega})} \tag{12.59}$$

这里$\otimes$定义为周期卷积：

$$D_{ff}(e^{j\Omega})\otimes D_{ss}(e^{j\Omega})=\int_{<2\pi>}D_{ff}(e^{jv})\otimes D_{ss}(e^{j(\Omega-v)})\mathrm{d}v \tag{12.60}$$

计算这个积分需要注意，$D_{ff}(e^{j\Omega})$和$D_{ss}(e^{j\Omega})$是周期的，周期为2π。

下面用一个特殊情况来核实一下这个结果。假设$f[n]$在值μ_f处，是个固定的，$D_{ff}(e^{j\Omega})=0$，易得$H(e^{j\Omega})=1/\mu_f$，可以很容易地得到$\hat{s}[n]=s[n]$，所以输入信号可以很好地得到还原。

另外一种特殊情况是假定$f[n]$为有均值，在均值上的偏差为白噪声过程，所以$D_{ff}(e^{j\Omega})=\sigma_f^2$。然后有

$$H(e^{j\Omega})=\frac{D_{ss}(e^{j\Omega})\mu_f}{\sigma_f^2E\{s^2[n]\}+\mu_f^2D_{ss}(e^{j\Omega})} \tag{12.61}$$

◀

12.4 离散时间的因果维纳滤波

在前面两节关于DT情况的维纳滤波处理的几个例子中，已经给出了相对较直接的解决方案。在FIR预测的例子中，已经建立了相应的正规方程以及求解。在无约束的情况下，由正交性条件可以推出在整个时间轴上的卷积关系，转换这种关系到频域表征，就允许最优滤波器存在简单的代数解。在两种类型的例子中，滤波器实现所涉及的结构如图12.2所示，其中，在第一种情况下LTI滤波器是FIR系统，而在第二种情况下LTI滤波器是无约束的。

480

关于维纳滤波的其他应用方案可能要更细致地讨论。一个最重要的情况就是将LTI滤波器约束为因果性的情况，即有 $h[j]=0$，$j<0$。此时估计方程就被规定为如下形式

$$\hat{y}[n]=\mu_y+\sum_{j=0}^{\infty}h[j](x[n-j]-\mu_x) \tag{12.62}$$

其求和下限值规定为从0开始。这种情形下 $y[n]$ 的估计值决定于当前和过去的 $x[\cdot]$，但是将来的值是被排除在外的。滤波器的这种形式已经确保估计值的无偏性。估计误差 $e[n]=y[n]-\hat{y}[n]$ 与当前的和过去的 $x[\cdot]$ 正交，这种特性可以写成

$$E[e[n]x[n-m]]=0=E[e[n](x[n-m]-\mu_x)] \tag{12.63}$$

或者等价地描述为

$$C_{\hat{y}x}[m]=C_{yx}[m] \tag{12.64}$$

但是注意，式(12.63)和式(12.64)只是对于 $m\geqslant 0$ 成立。类似地，可以推出不受约束的情形下所得到的这个公式，即

$$h[m]*C_{xx}[m]=C_{yx}[m] \tag{12.65}$$

同样地，这也仅仅在 $m\geqslant 0$ 情形下成立。

对于式(12.63)～式(12.65)中 m 为非负的限制条件，意味着这与以前使用的普通双边傅里叶变换是不同的，所以先前的对于维纳滤波的频率响应的解决方法就不再适用。不过当 $C_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$ 时，也就是当量测的过程是白噪声过程的时候，这个就不是障碍了。这是因为，在 $h[m]*C_{xx}[m]=\sigma_x^2h[m]$ 的情形下，对于 $m<0$ 的值来说，这种情况是没有什么关联的。利用这一点，式(12.65)可以写成如下所示：

$$h[m]=\frac{1}{\sigma_x^2}C_{yx}[m],m\geqslant 0 \text{ 和 } h[m]=0,m<0 \tag{12.66}$$

解决该问题的一种常见方法是，在因果情况下实现量测的白化处理，或者说进行因果的白化转换，然后再采用前面的解决方式进行处理，最后总体体现为滤波器对原始量测的随机过程进行工作。在进行下一步讨论前，这里需要对原始的维纳滤波器解决方案进行更加细节、更加本质的讨论。

回到式(12.65)所反映的一般关系上，目前的难题是把(12.65)的左边($m\geqslant 0$)给隔离出来，同时仍然保留足够的信息去计算出 $h[\cdot]$ 及其DTFT变换。这个问题的维纳解决方法是：在合适的假设条件下识别出自协方差。自协方差公式定义如下：

481

$$C_{xx}[m]=f[m]*\overleftarrow{f}[m] \tag{12.67}$$

其中，$\overleftarrow{f}[k]=f[-k]$ 是 $f[k]$ 的时间反转，$f[\cdot]$ 是一个因果稳定系统的单位冲激响应，对应存在一个稳定的、因果的逆系统。在转换域中这个公式可写成

$$D_{xx}(e^{j\Omega})=F(e^{j\Omega})F^*(e^{j\Omega})=F(e^{j\Omega})F(e^{-j\Omega}) \tag{12.68}$$

其中，标志 $*$ 表示复共轭。$F(z)$ 表示 $f[n]$ 的 z 变换，可以得到

$$D_{xx}(z)=F(z)F(z^{-1}) \tag{12.69}$$

显然因果性和稳定性条件就等价为 $F(z)$ 的所有零极点都在单位圆内，因此，$F(z)$ 是最小相位函数，正如在2.3.2节讨论的那样。将 $D_{xx}(e^{j\Omega})$ 或者 $D_{xx}(z)$ 分别分解成式(12.68)和式(12.69)的形式，就称为最小相位谱分解，这在2.4节有所讨论。基于Palay和Wiener所阐述的功率谱 $D_{xx}(e^{j\Omega})$ 的条件，也就是说要求 $|\log D_{xx}(e^{j\Omega})|$ 在一个 2π 间隔内有一个有限积分，可以确保最小相位谱因子分解的存在。基于Palay和Wiener所阐述的FSD条件，排除了 $D_{xx}(e^{j\Omega})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的一些有限间隔内恒等于零的情况。这是合理的，因为，此时FSD的谱因子的逆将不会有关于频率响应的明确定义，因此不能实现相位最小化。

上面的描述说明了一个特性，即式(12.67)中的函数 $\overleftarrow{f}[\cdot]$ 对应于一个非因果系统的、稳定的单位冲激响应。它存在一个非因果的、稳定的逆系统，用 $\overleftarrow{g}[\cdot]$ 来表示这个逆系统的单位冲激响应。从而，$\overleftarrow{f}[j]=0=\overleftarrow{g}[j]$，$j>0$，$\overleftarrow{f}[\cdot]$ 和 $\overleftarrow{g}[\cdot]$ 均是绝对可和(absolute summability)的，同时有 $\overleftarrow{f}[k]*\overleftarrow{g}[k]=\delta[k]$。$\overleftarrow{g}[\cdot]$ 的绝对可和确保了后面可以很好地求出卷积结果。

现在可以从式(12.65)得出 $h[\cdot]$。用 $\overleftarrow{g}[\cdot]$ 来卷积处理方程的左边，得到函数 $h[m]*$

$f[m]$。这个卷积(其中 $m\geqslant0$)只是取决于 $h[m]*C_{xx}[m]$(其中 $m\geqslant0$)的值，因为 $\overleftarrow{g}[\cdot]$是非因果的。通过观察，因为 $h[m]*f[m]$是两个因果函数进行卷积，所以它本身也是因果的，也就是说，对于 $m<0$，其值全都是 0。

用 $\overleftarrow{g}[\cdot]$来卷积式(12.65)的右边，得到函数 $\overleftarrow{g}[m]*C_{yx}[m]$，其中对于任意的 m 来说，其均没有零点。但是，对于 $m\geqslant0$ 的值来说，这取决于 $C_{yx}[m]$的值，因为 $\overleftarrow{g}[\cdot]$是非因果的。式(12.65)适用于 $m\geqslant0$，可以写为

$$h[m]*f[m]=(\overleftarrow{g}[m]*C_{yx}[m])u[n] \tag{12.70}$$

这里，$u[n]$是单位阶跃函数。现在，对方程两边做 DTFT 变换，重新整理结果可以得出因果维纳滤波器的频率响应的理想表达式：

$$H(e^{j\Omega})=\frac{1}{F(e^{j\Omega})}\left[\frac{D_{yx}(e^{j\Omega})}{F(e^{-j\Omega})}\right]_+ \tag{12.71}$$

这里定义 $P(e^{j\Omega})=\dfrac{D_{yx}(e^{j\Omega})}{F(e^{-j\Omega})}$，是 $p[n]$信号的 DTFT 变换(译者添加说明)，$[P(e^{j\Omega})]_+$表示信号 $p[n]$的因果部分的变换，也就是 $p[n]u[n]$的变换。在 z 变换的形式下能够写出因果维纳滤波器的传递函数：

482

$$H(z)=\frac{1}{F(z)}\left[\frac{D_{yx}(z)}{F(z^{-1})}\right]_+=\frac{[P(z)]_+}{F(z)} \tag{12.72}$$ ㊀

相应地，MMSE 由下面公式给出：

$$\begin{aligned}\text{MMSE}=C_{ee}[0]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{ee}(e^{j\Omega})\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(D_{yy}(e^{j\Omega})-H(e^{j\Omega})D_{xy}(e^{j\Omega})-H(e^{-j\Omega})D_{yx}(e^{j\Omega})\\&\quad+|H(e^{j\Omega})|^2D_{xx}(e^{j\Omega}))\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{12.73}$$

这涉及比无约束响应式(12.38)所给出的更多的项，这是因为式(12.65)中的关系仅适合因果条件下 $m\geqslant0$ 的情况，所以不能用来简化上述表达式。尽管这里忽略了推导过程，但仍能直观地看出，这里的 MMSE 在数量上超过了无约束维纳滤波器的 MMSE。

$$\Delta\text{MMSE}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left[\frac{D_{yx}(e^{j\Omega})}{F(e^{-j\Omega})}\right]_-\right|^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[P(z)]_-^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{12.74}$$ ㊁

其中，$[P(e^{j\Omega})]_-$ 表示信号 $p[n]$ 中的严格反因果部分的离散时间傅里叶变换，也就是 $p[n](1-u[n])$的变换。

例 12.7 因果离散时间维纳预测器

假设有一个量测随机过程信号 $x[n]$，它是由单位方差的白噪声(零均值)通过建模或整型滤波器产生的，假定滤波器传递函数中的系数 α_0 和 α_1 为非零值，有

$$F(z)=\alpha_0+\alpha_1z^{-1} \tag{12.75}$$

该滤波器是稳定(因果)的，所以 $x[n]$是 WSS 的，具有零均值。它的 PSD 为

$$D_{xx}(e^{j\Omega})=F(e^{j\Omega})F^*(e^{j\Omega})=F(e^{j\Omega})F(e^{-j\Omega}) \tag{12.76}$$

如果$|\alpha_1|<|\alpha_0|$，那么滤波器 $F[z]$的逆是因果稳定的。在该不等式情况下，$F[z]$是由 $D_{xx}(z)$的最小相位谱因子组成的。在这里假设满足不等式(对于不满足不等式的情况会在下面的例子中进行说明)。

现在对于 $x[n]$进行连续的单步预测：利用 $x[k]$的所有 $k\leqslant n$ 项，获得对 $y[n]=x[n+1]$的 LMMSE 估计值$\hat{y}[n]$。因为 $C_{yx}[m]=C_{xx}[m+1]$，所以

$$D_{yx}(z)=zD_{xx}(z)=zF(z)F(z^{-1}) \tag{12.77}$$

㊀ 第二个等式由译者添加。—— 译者注

㊁ 第二个等式由译者添加。—— 译者注

因此

$$\left[\frac{D_{yx}(z)}{F(z^{-1})}\right]_+ = [zF(z)]_+ = \alpha_1 \tag{12.78}$$

483

现在使用(12.72)的表达式，因果维纳预测器的传递函数是

$$H(z) = \frac{1}{F(z)}\left[\frac{D_{yx}(z)}{F(z^{-1})}\right]_+ = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1}} \tag{12.79}$$

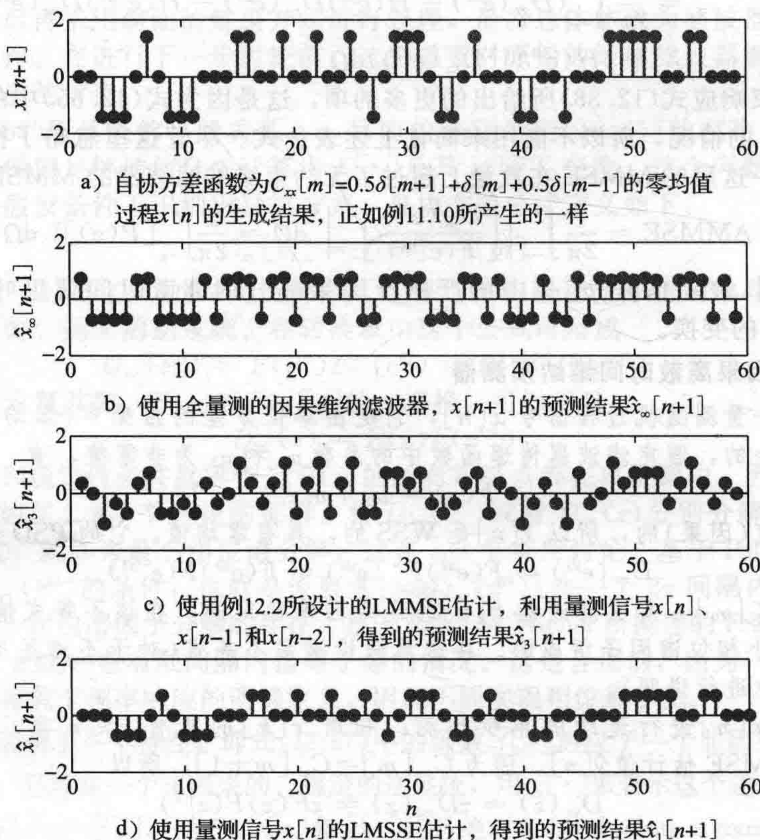
无约束的维纳预测器的 MMSE 是 0，正如例 12.3 所指出的那样，因果滤波器的 MMSE 由式(12.74)给出，计算结果为 α_0^2。作为比较，利用均值对 $x[n+1]$估计的结果，均方误差为 $C_{xx}[0]=\alpha_0^2+\alpha_1^2$；仅仅只使用量测 $x[n]$对 $x[n+1]$的 LMMSE 估计，其均值误差为

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \frac{\alpha_0^2\alpha_1^2}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} \tag{12.80}$$

对于$|\alpha_1|\approx|\alpha_0|=\alpha$，因果维纳预测器的均方误差是 α^2，而使用均值来预测 $x[n+1]$时，有 $2\alpha^2$ 的均方误差，直接使用 $x[n]$来进行的预测值会有 $1.5\alpha^2$ 的均方误差。因此在这个例子中，从使用最近量测的预测器到基于完整量测的因果维纳预测器，均方误差存在着三分之一的减少，其值从 $1.5\alpha^2$ 降到了 α^2。

图 12.8 对例 12.2 进行重新阐释，对比使用 FIR 预测滤波器所得的结果和使用式(12.79)所示因果维纳滤波器所得的结果。这里再次选择 $\rho=0.5$ 和 $C_{xx}[0]=1$，其中有 $\alpha_0=\alpha_1=\alpha=1/\sqrt{2}$，不满足不等式$|\alpha_1|<|\alpha_0|$，这种情况要求模型滤波器 $F(z)$的逆(例如 $1/F(z)$)是因果稳定性。利用式(12.79)进行替换，可以推出因果维纳滤波器的传递函数：

$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} \tag{12.81}$$



a) 自协方差函数为$C_{xx}[m]=0.5\delta[m+1]+\delta[m]+0.5\delta[m-1]$的零均值过程$x[n]$的生成结果，正如例11.10所产生的一样

b) 使用全量测的因果维纳滤波器，$x[n+1]$的预测结果$\hat{x}_\infty[n+1]$

c) 使用例12.2所设计的LMMSE估计，利用量测信号$x[n]$、$x[n-1]$和$x[n-2]$，得到的预测结果$\hat{x}_3[n+1]$

d) 使用量测信号$x[n]$的LMSSE估计，得到的预测结果$\hat{x}_1[n+1]$

图 12.8

它只在单位圆上有一个极点，且处于稳定的边缘。此时可以进行补偿，令选取的$|\alpha_1|$稍微小于选取的$|\alpha_0|$(也就是说严格限制$|\rho|<1$)，但是更加务实的处理是利用下面近似的传递函数进行预测：

$$H(z)\approx\frac{1}{1+0.99z^{-1}} \tag{12.82}$$

下面将会看到这个滤波器的性能，这和先前的结论是一致的。

图12.8a展示了例12.2中的有限相关过程的一个实现，但与图12.3a的实现方式不同。图12.8b展示了由近似方程(12.82)来代替方程(12.79)中的全量测的因果维纳滤波器所产生的预测值$\hat{x}_\infty[n+1]$的情况。在这个情况下，MMSE的理论值是$\alpha^2=0.5$，而因果维纳滤波实现方法的实验均方误差是0.497。图12.8c和d显示了FIR滤波器实现方法的预测结果，该方法在例12.2中对应预测结果$\hat{x}_3[n+1]$和$\hat{x}_1[n+1]$。其预测值的时间均方误差是0.650(与对应的MMSE理论值0.625比较)和0.754(与对应的MMSE理论值0.75比较)。

上面的推论假设$|\alpha_1|<|\alpha_0|$，这样就保证了模型滤波器$F(z)$是最小相位。如果$|\alpha_1|>|\alpha_0|$，然后$F(z)=\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}$仍然是因果稳定的，其中有一个极点在$z=0$和一个零点在$-\alpha_1/\alpha_0$，但是这个零点在单位圆外。因此，$F(z)$的逆尽管是因果的，但不稳定，因为它在单位圆外有一个极点。需要从$F(z)$来得到的最小相位因子$\widetilde{F}(z)$，这可以通过选取一个适当的全通因子$A(z)$与$F(z)$相乘来获得，$A(z)$在式(2.27)里有给出，它是用另一个零点来代替这个位置上的零点$-\alpha_1/\alpha_0$，即

$$\widetilde{F}(z)=F(z)A(z) \tag{12.83}$$

$$=\alpha_0(1+(\alpha_1/\alpha_0)z^{-1})\left(\frac{z^{-1}+(\alpha_1/\alpha_0)}{1+(\alpha_1/\alpha_0)z^{-1}}\right) \tag{12.84}$$

$$=\alpha_1+\alpha_0 z^{-1} \tag{12.85}$$

容易验证$\widetilde{F}(z)\widetilde{F}(z^{-1})=F(z)F(z^{-1})=D_{xx}(z)$。 ◀

预测中模型滤波器的作用 量测信号$x[n]$的最小相位模型滤波器，或者等价于$D_{xx}(z)$的最小相位谱因子，在因果维纳滤波器中有着重要的作用。对于本节所讲的预测这个特定例子(正如例12.7所考虑的那样)，有更多的直接方式可以弄明白模型滤波器的重要性，正如后面总结的那样。在这里把重点放在单步预测上，尽管这种方法可以很自然地推广。

484~485

假设有一个量测信号$x[k]$，其中$k\leqslant n$，用来对$x[n+1]$进行LMMSE估计。此时可用最小相位滤波器的输出来建模，滤波器的传递函数为

$$F(z)=f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots \tag{12.86}$$

对应的因果的单位采样响应为

$$f[n]=f_n,\quad n\geqslant 0\quad 和 f[n]=0\quad ,其他 \tag{12.87}$$

滤波器由一个(零均值)单位方差的白过程$w[n]$所激励。所以，把上面的单位采样响应进行指定加权的线性组合，可以由$w[j]$来得到$x[n]$，其中$j\leqslant n$，也就是

$$x[n]=\sum_{j=-\infty}^{n}f_{n-j}w[j] \tag{12.88}$$

$F(z)$的因果可逆性等价于$F(\infty)=f_0\neq 0$，同样也确保了可以采用恰当的线性加权组合，使用$x[k]$，其中$k\leqslant n$，来得到$w[n]$。因此，$w[j](j\leqslant n)$和$x[k](k\leqslant n)$是等价的。

注意，可以得到一个与式(12.88)相似的表达式，来表征$x[n+1]$，即

$$x[n+1]=f_0w[n+1]+\sum_{j=-\infty}^{n}f_{n-j+1}w[j] \tag{12.89}$$

已知$x[k]$，$k\leqslant n$，根据$F(z)$的因果可逆性，确保所有的$w[j]$，$j\leqslant n$是已知的，但$w[n+1]$是未知的，所以预测方程(12.89)中的求和项是已知的，但是第一项是未知的。事实上，$w[\cdot]$是白过程意味着已知的$w[j]$与$w[n+1]$是毫不相关的，因此对于LMMSE

估计没有可用的信息。$x[n+1]$的 LMMSE 估计是

$$\hat{x}[n+1] = \sum_{j=-\infty}^{n} f_{n-j+1} w[j] \tag{12.90}$$

这能够通过检验 $x[n+1]-\hat{x}[n+1]$是否对所有的 $w[j]$，$j \leqslant n$ 均正交来进行一般性的验证，对于 $x[k]$，$k \leqslant n$ 也是如此。相关的 MMSE 就是 $f_0 w[n+1]$的方差，其公式可由式(12.89)和式(12.90)变换得到

486

$$\mathrm{MMSE} = f_0^2 = [F(\infty)]^2 \tag{12.91}$$

式(12.90)的和可以看作在时刻 n，用一个传递函数为$[zF(z)]_+$的因果滤波器对 $w[\cdot]$进行卷积，这个传递函数符号在之前的注释中介绍过。为了从 $x[\cdot]$因果地产生$w[\cdot]$，可以让 $x[\cdot]$通过一个滤波器，该滤波器的传递函数是 $1/F(z)$。综合以上可知，因果单步维纳预测滤波器具有传递函数：

$$H(z) = \frac{1}{F(z)}[zF(z)]_+ \tag{12.92}$$

这就是前面的例子得到的式(12.79)所表示的结果的精确推导。

12.5 最佳观测器和卡尔曼滤波

这一节要回顾例 12.4 中的典型问题——从一个被加性噪声干扰的量测中估计一个 DT 信号。在这里会限制这个估计滤波器必须是因果的，但它的设计要利用在 12.4 节中推导出的结果。更重要的是，在这里假设感兴趣的信号是一个白的 DT 过程经过一个因果稳定的 LTI 状态空间系统滤波后的结果。这个构想开启了维纳滤波的一系列重要扩展，也就是卡尔曼滤波

12.5.1 受加性噪声干扰的信号的因果维纳滤波

正如例 12.4 所述，假设有可利用的量测过程信号：

$$x[n] = y[n] + v[n] \tag{12.93}$$

式中零均值的 WSS 过程 $y[n]$是希望从量测值中估计出来的。它是把一个强度为 $\sigma_w^2 > 0$ 的白过程 $w[n]$通过一个因果稳定的模型滤波器滤波的结果。模型滤波器的传递函数是

$$G(z) = \frac{\eta(z)}{a(z)} \tag{12.94}$$

在接下来的小节中，将明确地把模型滤波器考虑成可达的、可观测的 L 阶状态空间向量的一个实现。但是现在来说，只要注意 $a(z)$是系统的首一 L 阶特征多项式(the monic L-degree characteristic polynomial)，$\eta(z)$的阶数小于 L。相应地，这里做出一个简单的假设，即在状态向量模型里，没有从输入到输出的直接通路。系统的可达性和可观测性保证了 $\eta(z)$和 $a(z)$没有相同的因子，系统的稳定性意味着 $a(z)$的根全部在单位圆里面。这也意味着感兴趣的潜在信号 $y[n]$是零均值的 WSS 过程。其复数 FSD 由下式给出：

487

$$D_{yy}(z) = \sigma_w^2 \frac{\eta(z)\eta(z^{-1})}{a(z)a(z^{-1})} \tag{12.95}$$

假设加性噪声过程 $v[\cdot]$也是白的，它的强度是 $\sigma_v^2 > 0$，且和驱动过程 $w[\cdot]$无关，于是与信号 $y[\cdot]$也是无关的。在上述的假设下，$x[\cdot]$是零均值的 WSS。给出定义 $r = \sigma_w^2 / \sigma_v^2 > 0$，那么 $x[n]$的复 PSD 就由下式给出：

$$\begin{aligned} D_{xx}(z) &= \sigma_w^2 \frac{\eta(z)\eta(z^{-1})}{a(z)a(z^{-1})} + \sigma_v^2 = \sigma_v^2 \frac{r\eta(z)\eta(z^{-1}) + a(z)a(z^{-1})}{a(z)a(z^{-1})} \\ &= \sigma_v^2 \frac{\nu(z)\nu(z^{-1})}{a(z)a(z^{-1})} \end{aligned} \tag{12.96}$$

式中$\nu(z)$是首一L 阶多项式，它的根都在单位圆里，且满足

$$\nu(z)\nu(z^{-1}) = r\eta(z)\eta(z^{-1}) + a(z)a(z^{-1}) \tag{12.97}$$

这个方程表征了在这类问题中所期望的最小相位谱因子分解的步骤。

为什么在式(12.97)中谱因子 $\nu(z)$ 的全部解一定是在单位圆以内？这可由下面这一事实推断出来，那就是方程右边式子的零点呈现为互为倒数，这就意味着如果它在 $z=z_0$ 处有一个零点，那么在 $z=z_0{}^{-1}$ 处也有一个零点。更重要的是，这个表达式没有在单位圆上的零点，因为假设在 $z=e^{j\Omega_0}$ 有一个零点，对于 $r>0$ 来说，意味着

$$r\,|\eta(e^{j\Omega_0})|^2+|a(e^{j\Omega_0})|^2=0$$

上式表示 $\eta(z)$ 和 $a(z)$ 会各自在 $z=e^{j\Omega_0}$ 上有一个零点，这与 $\eta(z)$ 和 $a(z)$ 没有相同的根相矛盾。然后就可以根据这样的要求来定义多项式 $\nu(z)$，即 $\nu(z)$ 由(12.97)右边的所有在单位圆里面的零点项构成。这里还可以注意到 $\nu(z)$ 和 $a(z)$ 将不会有相同的零点，因为式(12.97)表明，使得两个多项式为零的 z 任意取值必须会使得 $\eta(z)$ 为零，但是那样的话，会再一次和 $\eta(z)$ 与 $a(z)$ 没有相同的因子(相同的零点)矛盾。最后，$\eta(z)$ 的阶低于 L，于是 L 阶多项式 $\nu(z)$ 一定是首一的，也就是说，它有最高阶为 1 的系数，就像 $a(z)$ 一样。

从式(12.96)可知，$D_{xx}(z)$ 的最小相位谱因子是

$$F(z)=\sigma_v\frac{\nu(z)}{a(z)} \tag{12.98}$$

要求计算的因果维纳滤波器的剩余量是 $D_{yx}(z)$。由于 $y[\cdot]$ 和 $x[\cdot]$ 是不相关的，于是

$$D_{yx}(z)=D_{yy}(z) \tag{12.99}$$

$D_{yx}(z)$ 可由式(12.95)给出。

488

把上述计算的结果带入式(12.72)，并一起使用式(12.97)来化简。这里看到要求的因果维纳滤波器的传递函数是

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{1}{F(z)}\left[\frac{D_{yx}(z)}{F(z^{-1})}\right]_+=\frac{a(z)}{\sigma_v\nu(z)}\left[\sigma_w^2\frac{\eta(z)\eta(z^{-1})}{a(z)a(z^{-1})}\frac{a(z^{-1})}{\sigma_v\nu(z^{-1})}\right]_+\\&=\frac{a(z)}{\nu(z)}\left[\frac{r\eta(z)\eta(z^{-1})}{a(z)\nu(z^{-1})}\right]_+=\frac{a(z)}{\nu(z)}\left[\frac{\nu(z)}{\nu(z)}-\frac{a(z^{-1})}{\nu(z^{-1})}\right]_+\end{aligned} \tag{12.100}$$

式子 $\nu(z)/a(z)$ 从 $[\cdot]_+$ 的运算中完整地保存了下来，因为它的逆变换式是因果的。由于式子 $a(z^{-1})/\nu(z^{-1})$ 有一个反因果的逆变换，所以对 $[\cdot]_+$ 的贡献就只是在零时刻的相关时间函数的值。这个值是 1，因为 $\nu(z)$ 和 $a(z)$ 都是 z 的首一多项式。于是最佳因果滤波器由一个简单表达式给出：

$$H(z)=1-\frac{a(z)}{\nu(z)}=\frac{\nu(z)-a(z)}{\nu(z)} \tag{12.101}$$

它完全由式(12.97)的谱因子分解的结果决定。

由式(12.101)推得的维纳滤波器把量测过程 $x[\cdot]$ 看作输入，并因果地产生 $y[n]$ 的 LMMSE 估计 $\hat{y}[n]$，从而从加性噪声中提取出来 $y[n]$(当然还是会有一些剩余的错误)。下一小节会证明相同的效应，其能够通过合理设计一个产生信号 $y[n]$ 的基础状态空间系统(the underlying state-space system)观测器而得到。

12.5.2 维纳滤波器的观测器实现

在第 6 章，观测器被介绍为一个 LTI 状态向量系统中的状态估计机制。因此，用一个观测器来估计此类系统的输出，以便获得一个相关的信号，就不那么意外了。本章节使用的各种信号的标记和第 6 章的不一样。因此在这里需要重新建立实现结构和标记。

标记感兴趣的信号为 $y[n]$，其是一个因果稳定的 LTI 状态向量系统的输出，这个系统由一个未知的白过程 $w[\cdot]$ 来驱动，该白过程的方差是 $\sigma_w^2>0$。量测信号 $x[n]$ 是信号 $y[n]$ 被一个未知的方差为 $\sigma_v^2>0$ 的白噪声过程 $v[n]$ 所干扰以后的输出。这个白噪声过程 $v[n]$ 和 $w[\cdot]$ 不相关。给出相关的 L 阶可达、可观测的状态向量空间模型，其有如下形式：

489

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}w[n] \tag{12.102}$$

$$y[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n] \tag{12.103}$$

$$x[n]=y[n]+v[n] \tag{12.104}$$

注意：这里使用 $y[n]$来表示实际的系统输出，用 $x[n]$来表示系统输出被噪声干扰的版本，用以区分第 6 章所使用的这些信号。这里还假设这个系统已经从 $-\infty$ 时间开始运行，就如同在分析时限制随机过程为 WSS 过程一样。从 $w[n]$到 $y[n]$的系统函数是

$$G(z)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{\eta(z)}{a(z)} \tag{12.105}$$

这和式(12.94)一样，式中，$a(z)=\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$是这个系统的特征多项式。

这个系统的观测器有如下形式：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]&=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]-\boldsymbol{\ell}(x[n]-\hat{y}[n])\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\,\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]-\boldsymbol{\ell}x[n]\end{aligned} \tag{12.106}$$

式中，$\boldsymbol{\ell}$ 是观测器增益向量，且

$$\hat{y}[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n] \tag{12.107}$$

注意到，观测器不是由基础系统(the underlying system)的输出 $y[n]$驱动的，而是由量测信号 $x[n]$驱动的。还要注意到，未知噪声过程 $w[n]$和 $v[n]$也没有进入观测器结构中。$\hat{y}[n]$这个量表示了观测器对于 $y[n]$的估计，但是目前还没有表示说，它是对于给定的$x[k]$在 $k\leqslant n$ 时的 LMMSE 估计。在第 6 章中，构造一个观测器的动机就是克服初始状态 $\boldsymbol{q}[0]$的不确定性，然而状态的不确定性是因为 $w[n]$和 $v[n]$未知的结果。初始条件并没有什么作用，因为这里已经假设一个稳定系统从时间 $-\infty$ 就开始运行了。

式(12.106)和式(12.107)表明，在目前的字面理解中，可以把观测器看作一个以$x[n]$作为输入、$\hat{y}[n]$作为输出的 LTI 状态向量空间系统。一个有趣和重要的事实是，观测器的增益 $\boldsymbol{\ell}$ 是能被选择的，这样就能够使得系统的传递函数 $H(z)$恰恰和 12.5.1 节中设计的维纳滤波器一样，即和式(12.101)表述的一样。选择好了 $\boldsymbol{\ell}$，$\hat{y}[n]$就真的变成了 $y[n]$的因果 LMMSE 估计。

观测器的传递函数的分母是特征多项式 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$。第 6 章关于观测器设计的结果表明了特征多项式能够和任意的首一 L 阶多项式相等，只要合适的选择 $\boldsymbol{\ell}$ 就行，因为给定的状态向量空间系统是可观测的。因此 $\boldsymbol{\ell}$ 能够被选择成为这样的传递函数，其分母等于 $\nu(z)$，正如式(12.101)所要求的那样。这里 $\nu(z)$是通过谱因子分解得到的，如式(12.97)所定义的那样。同样如式(12.101)要求的，如果 $\boldsymbol{\ell}$ 的选择导致了观测器传递函数的分子是 $\nu(z)-a(z)$，那么就能够得到想要的结果了。

490

下面利用一个间接的论证来证明观测器的传递函数的分子多项式一定是什么样的。从式(12.106)和式(12.107)可知，要在观测器上实现一个单位增益输出反馈，可以设置

$$x[n]=\hat{y}[n]+p[n] \tag{12.108}$$

式中，$p[n]$在这里代表一些新的外部输入，那么状态向量空间系统的输出就是

$$\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]-\boldsymbol{\ell}p[n] \tag{12.109}$$

$\hat{y}[n]$的输出还是和前面的一样，如式(12.107)所示。这种单位增益反馈给传递函数产生了一个新的分母多项式，把它从 $\nu(z)$改变成 $\nu(z)$与原来分子多项式之间的差分。然而，检查前面的方程表明它的特征多项式也是这个新系统的分母多项式，即 $a(z)=\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，可以得出观测器的原分子多项式一定是 $\nu(z)-a(z)$，它正好是由前面小节推导出来的维纳滤波器的分子多项式，参看式(12.101)。

总结一下，如果 $y[n]$是希望从被加性白噪声干扰的量测信号中估计出来的信号，它是一个稳定的 LTI 状态空间系统的输出。该系统由另外一个与量测噪声不相关的白过程驱动，那么所需要的维纳滤波器就能够通过一个状态向量系统的观测器来实现。选择这个观测器的增益，使得观测器的特征多项式与由式(12.97)谱因子分解得到的 $\nu(z)$相同，那么观测器的输出$\hat{y}[n]$就是 $y[n]$的 LMMSE 估计。

12.5.3 最佳状态估计和卡尔曼滤波

现在会很自然地想到，式(12.106)中观测器产生的$\hat{\boldsymbol{q}}[n]$的状态估计$\hat{q}_i[n]$是不是最佳估计，也就是说，它们是不是基础状态变量$q_i[n]$(the underlying state variable)的因果LMMSE估计。后面将说明的确有这样的情况，即最佳观测器能从状态$\boldsymbol{q}[n]$中产生因果的LMMSE估计$\hat{\boldsymbol{q}}[n]$，但却没有输出信号$y[n]$的因果LMMSE估计$\hat{y}[n]$。这里将不会解释这个问题，但在后面会提供一个直观的解释。因为产生$y[n]$的状态向量空间系统是可达的、可观测的，它的状态向量是完全活跃的，而且完全反映在输出的量测信号的所有时间上，于是要通过状态观测器产生最佳输出估计$\hat{y}[n]$的唯一方法，就是基础观测状态$\hat{\boldsymbol{q}}[n]$也要是最优估计。

491

12.5.2节推导出的最佳观测器的最简单形式就是卡尔曼滤波器。在卡尔曼滤波器的常见推导过程中，从状态向量空间模型开始，正如式(12.102)、式(12.103)和式(12.104)所示的那样；然后推导基础状态向量$\boldsymbol{q}[n]$的因果LMMSE估计，在这个过程中，发现这个估计有观测器初始状态向量模型的形式，且它有最佳的观测增益。本章节已进行的推导过程是这个过程的反向推导，这是为了能通过维纳滤波达到最佳观测器设计的这个目的。

卡尔曼滤波器能够有更普遍的形式，并且它的基础因果状态向量空间模型能够随时间变化，甚至是不稳定的。同时，对它的相关过程没有广义稳定性的要求，还允许多重干扰输入和量测输出。刻画因果维纳滤波的谱因子分解步骤被所谓的黎卡提方程(Riccati equation)所代替。在这种情况中，干扰和噪声过程都是高斯的，状态方程转移扩散的是状态估计误差的协方差矩阵。

12.6 CT信号的估计

通过与DT情况很类似的推导，可以建立关于CT情况的几个估计问题的估计模型，尽管推导的细节可能有些不同。需要说明的，DT情况中的白噪声概念是简单的、便于理解的，但CT情况中的白噪声是极度理想化的，每个时刻的白噪声都具有无限大的功率期望。这里简短地总结一下CT情况下的结果，但是忽略所有结果的推导，这与前面DT情况下维纳滤波器的结果相类似。

对于无约束的CT情况，一些广义平稳过程的量测信号$x(\cdot)$通过滤波来构建与$x(\cdot)$关联的一些广义平稳过程$y(t)$的LMMSE估计$\hat{y}(t)$，维纳滤波的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{D_{yx}(\mathrm{j}\omega)}{D_{xx}(\mathrm{j}\omega)} \tag{12.110}$$

相应的MMSE为

$$\begin{aligned}\text{MMSE}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(D_{yy}(\mathrm{j}\omega)-H(\mathrm{j}\omega)D_{xy}(\mathrm{j}\omega))\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{yy}(\mathrm{j}\omega)-\frac{D_{yx}(\mathrm{j}\omega)D_{xy}(\mathrm{j}\omega)}{D_{xx}(\mathrm{j}\omega)}\right)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{12.111}$$

对于CT情况下的因果维纳滤波，最佳滤波频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{F(\mathrm{j}\omega)}\left[\frac{D_{yx}(\mathrm{j}\omega)}{F(-\mathrm{j}\omega)}\right]_{+} \tag{12.112}$$

492

$F(\mathrm{j}\omega)$是因果频率响应和$D_{xx}(\mathrm{j}\omega)$的因果可逆谱因子。

最后，为了预测$T>0$时的一个广义平稳CT过程，滤波器的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{F(s)}\left[\mathrm{e}^{sT}F(s)\right]_{+} \tag{12.113}$$

12.7 延伸阅读

维纳发表在[Wie]的研究激发了许多人对广义平稳信号的LMMSE估计的最佳系统设

计。在最近十年的工程教科书中这个专题都会被提及到，例如教科书[DAV]和[Lee]。可以读到的最近的一本关于维纳的传记是[Con]。第7章、第8章、第10章、第11章引用的一些文献里关于广义平稳过程和功率谱密度的讨论中，也对维纳滤波给予了特别的关注。比如，[Moo][Op2][Pa1][Pa3][Pa4][Th1]等文献就对维纳滤波过程需要的谱分解处理进行了讨论。卡尔曼滤波也在这些文献中部分涉及，同时也在[Poo]中进行了讨论。另外，第6章的一些参考文献提到了最佳状态观测器的反馈控制的描述。维纳滤波和卡尔曼滤波的关系在文献[And][Ka2]和[Kam]中有阐述。对有限状态、离散时间的Markov过程的滤波和预测在文献[Frs]中进行了讨论。

493

习题

基础习题

12.1 设有一零均值WSS过程 $y[n]$，它有 $E\{y^2[n]\}=\sigma^2$，现假设该信号值在临近时刻有相关系数 ρ，但是超过临近时刻信号值就不相关。已经知道如何利用当前值构造单步LMMSE预测器，也就是如何选择最佳的 a 得到估计 $\hat{y}[n+1]=ay[n]$。也可以很容易地看出，基于单个量测值的预测器，信号的过去时刻值是完全没有用的。也就是说如果 $\hat{y}[n+1]=by[n-k]$，$k>0$，则 $b=0$。

现在假设需要用当前值和最近一个过去时刻值，去构造一个单步LMMSE预测器，也就是说，假如进行 $\hat{y}[n+1]=cy[n]+dy[n-1]$ 估计。你可能会想，基于前面章节所说，推证出 $c=a$ 和 $d=0$，a 是前面提及的最优解。如果这样想，那就错了！请直观地解释最佳的 d 是非零的，然后找出 c 和 d 的最佳选择，并求出相关的均方误差。

12.2 广义平稳过程 $y[n]$ 的自协方差函数为 $R_{yy}[m]=9(\delta[m]-\alpha\delta[m-1]-\alpha\delta[m+1])$ 其中，$\alpha>0$。

(a) 可以取的 α 最大值为多少？解释其原因。如果 α 的值向最大值增加，那么信号的功率是向低频转移还是向高频转移？

(b) 求解下列各项(如果需要，可用 α 表示)：
(i) $E\{y[n]\}$ 和 $E\{y^2[n]\}$；
(ii) $y[4]$ 和 $y[5]$ 的相关系数 ρ。

(c) 假设已知 $y[4]$，想依据 $y[4]$ 求得LMMSE估计 $y[5]$。给出估计器，并求出相关的MMSE。

(d) 假设 $x[n]=y[n]+w[n]$，其中，$w[n]$ 是与 $y[\cdot]$ 不相关的白噪声，$w[n]$ 的功率谱密度为 $S_{ww}(e^{j\Omega})=9\alpha^2$。求解功率谱密度 $S_{xx}(e^{j\Omega})$，将它表示成如下的形式：

$$S_{xx}(e^{j\Omega})=K(1-\beta e^{-j\Omega})(1-\beta e^{j\Omega})$$

求解出 K 和 β 的值，如果需要，可用 α 表示。同时求出用 α 表示的互谱密度 $S_{yx}(e^{j\Omega})$。

(e) 利用过程 $x[\cdot]$ 的全部量测值，采样非因果维纳滤波来得到 $y[n]$ 的LMMSE的估计 $\hat{y}[n]$。求解出维纳滤波器的频率响应 $H(e^{j\Omega})$。

(f) 因果维纳滤波是指在 n 时刻，用所有当前时刻和过去时刻的量测值 $x[k]$，其中，$k\leqslant n$，来得到LMMSE估计，也就是说 $x[n+1]$ 的LMMSE估计 $\hat{x}[n+1]$。请确定因果维纳滤波器的频率响应 $G(e^{j\Omega})$。另外求解相应的均方误差。

12.3 假设 $y[n]$ 是零均值广义平稳过程，功率谱密度是 $S_{yy}(e^{j\Omega})=5+4\cos\Omega$，相关的自相关函数如图P12.3-1所示。

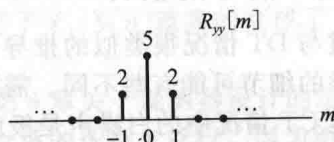


图 P12.3-1

(a) 画出 $S_{yy}(z)$ 的零极点图，一定要标出极点和零点。

(b) 假设 $y[n]$ 是由图P12.3-2所示系统产生的。$w[n]$ 是单位功率谱密度的广义平稳白噪声，也就是说 $S_{ww}(e^{j\Omega})=1$。求解一个可能的单位采样响应 $g[\cdot]$。

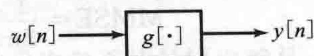


图 P12.3-2

为了获得 $y[n]$ 的单步预测，想要使用冲激响应为 $h[\cdot]$ 的最佳因果LTI滤波器，想要的系统如图P12.3-3所示。选择出让 $E[(\hat{y}[n+1]-y[n+1])^2]$ 最小的 $h[\cdot]$。

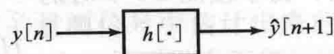


图 P12.3-3

(c) 如果 $h[n]$ 如图P12.3-4所示，只有两个长度的响应，求出 $h[n]$，也就是说求

出 a 和 b。

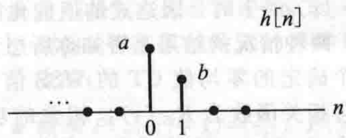


图 P12.3-4

(d) 求出让维纳滤波器是因果的也可能是无限的 $h[n]$。

12.4 一个确定的零均值 WSS 信号 $y(t)$，其自相关函数为 $R_{yy}(\tau)$，相应的功率谱密度是 $S_{yy}(j\omega)$，通过一个固定但增益 G 是随机的信道进行传输，G 的均值和方差分别为 μ_G 和 σ_G^2。由于接收机存在噪声，所以接受信号 $x(t)$ 的表达式为

$$x(t) = Gy(t) + w(t)$$

其中，$w(t)$ 是零均值的 WSS 噪声信号，自相关函数为 $R_{ww}(\tau)$，相应的功率谱密度是 $S_{ww}(j\omega)$。传输过程中 $y[\cdot]$ 与噪声 $w[\cdot]$ 互不相关，也就是说，$R_{yw}(\tau)=0$，并且它们都与 G 相互独立。

(a) 根据所给已知项，求出下列各项：

(i) $E[G^2]$；

(ii) $x(t)$ 的均值；

(iii) $x(t)$ 的自相关函数 $R_{xx}(\tau)$；

(iv) $x[\cdot]$ 和 $y[\cdot]$ 的互相关函数 $R_{yx}(\tau)$。

(b) 计算稳定的、非因果的 LTI 维纳滤波器的频率响应 $H(j\omega)$，该滤波器的作用是输入接收到的信号 $x[\cdot]$，来得到 $y(t)$ 的 LMMSE 估计 $\hat{y}(t)$，也就是说，确定滤波器，使得 $E[\{(\hat{y}(t)-y(t)\}^2]$ 最小。

(i) 如果有这样一些频率 ω，对应的噪声功率谱密度 $S_{ww}(j\omega)$ 为零，但传输功率谱密度 $S_{yy}(j\omega)$ 不为零，此时，$H(j\omega)$ 可以归纳为什么？这个答案是不是你所期望的？请解释之。

(ii) 如果有这样一些频率 ω，对应的噪声功率谱密度 $S_{ww}(j\omega)$ 不为零，但传输功率谱密度 $S_{yy}(j\omega)$ 为零，此时，$H(j\omega)$ 可以归纳为什么？这个答案是不是你所期望的？请解释之。

12.5 如果你是一名海洋研究所的科学家，可以访问随机过程 $x(t)$ 的量测值，然而你感兴趣的却是零均值广义平稳随机过程 $y(t)$，它与 $x(t)$ 的关系如下：

$$x(t) = y(t) + w(t)$$

其中，$w(\cdot)$ 是零均值的广义平稳噪声过程，它与 $y[\cdot]$ 是不相关的。若想设计一个冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 滤波器，作用是输入 $x(t)$，输出 $y(t)$ 的 LMMSE 估计，也就是说 $\hat{y}(t)$。然而，假设没有 $y(t)$ 或者 $w(t)$ 的量测值，所以不能直接计算相关信息来得出最佳滤波器。现在，从你的前辈那里得到的大量量测数据是用老传感器得到的：

$$v(t) = g(t) * w(t)$$

和

$$m(t) = g(t) * (y(t) + w(t))$$

其中，$g(t)$ 是老传感器的冲激响应，它是未知的，$*$ 代表卷积。你可以用这些老的记录数据去计算出 $R_{vv}(\tau)$ 和 $R_{mm}(\tau)$ 的良好近似值。现在的问题是这些相关函数结构是否满足维纳滤波器的设计。

(a) 使用 $S_{yy}(j\omega)$、$S_{ww}(j\omega)$ 以及老传感器的频率响应 $G(j\omega)$ 来表示出功率谱密度函数 $S_{vv}(j\omega)$ 和 $S_{mm}(j\omega)$。

(b) 仅用 $S_{vv}(j\omega)$ 和 $S_{mm}(j\omega)$ 来表示想要的维纳滤波器的频率响应 $H(j\omega)$。

(c) 定义误差信号 $e(t)=y(t)-\hat{y}(t)$ 的功率谱密度为 $S_{ee}(j\omega)$。仅用 $H(j\omega)$ 和/或者 $S_{vv}(j\omega)$ 和 $S_{mm}(j\omega)$ 来表示出

$$S_{ee}(j\omega)/S_{yy}(j\omega)$$

这个比值给出了维纳滤波器在各个频率上的处理质量，因为它揭示了估计后的误差信号功率谱密度与估计前的误差功率谱密度的比值。

12.6 随机过程 $r[n]$ 是零均值、单位方差的白噪声。随机过程 $y[n]$ 是 $r[n]$ 通过频率响应为 $G(e^{j\Omega})$ 的滤波器所得的，如图 P12.6-1 所示。假设所有信号和系统的冲激响应都是实数。

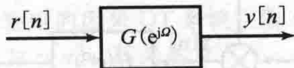


图 P12.6-1

(a) $y[n]$ 的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})$ 等于多少？用 $G(e^{j\Omega})$ 表示出来。

$x[n]$ 是由 $r[n]$ 加上信号 $w[n]$ 所得的，如图 P12.6-2 所示。$w[\cdot]$ 与 $r[n]$ 是统计独立的。对任意时刻 n，$w[n]$ 都是与 $r[n]$ 独立的，以概率 p 取值为 1，以概率 $1-p$ 取值为 0

$$w[n] = \begin{cases} 1, & \text{概率为 } p \\ 0, & \text{概率为 } 1-p \end{cases}$$

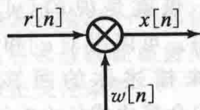


图 P12.6-2

(b) 计算 $x[n]$ 的均值以及自协方差函数。$x[n]$ 是白过程吗？

(c) 设计如图 P12.6-3 所示的冲激响应为 $H_1(e^{j\Omega})$的 LTI 滤波器，输入为 $x[n]$，要求输出的 $q[n]$与在(a)中计算得到的 $y[n]$的功率谱密度相同。

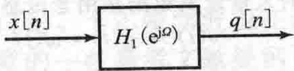


图 P12.6-3

(d) 设计如图 P12.6-4 所示的冲激响应为 $H_2(e^{j\Omega})$的 LTI 滤波器，输入为 $x[n]$，要求每个时刻的输出 $\hat{y}[n]$为 $y[n]$的 LMMSE 估计。

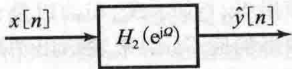


图 P12.6-4

(e) 根据(d)的答案，计算其均方误差。当 $p=0$和 $p=1$ 时对应的均方误差分别是多少？针对这些答案，说出你的合理解释。

12.7 假定图 P12.7 中的 $y[n]$是零均值的 WSS 过程，相关函数为 $R_{yy}[m]$，功率谱密度为 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。假设 $w[\cdot]$与 $y[n]$是独立的，在任意时刻以概率 p 取值为 1，以概率 $1-p$ 取值为 0。另外假设在任意时刻 $w[\cdot]$的值都是相互独立的。因此，信号 $x[n]=y[n]w[n]$是随机设置 $y[n]$为 0 得到的。

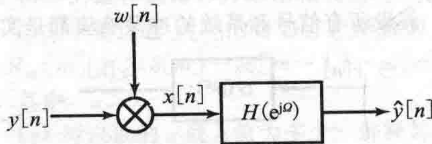


图 P12.7

(a) 求解 $w[n]$的均值 μ_w。$w[n]$的相关函数为 $R_{ww}[m]=\alpha\delta[m]+\beta$，求解出 α 和 β 的值，其中，$\delta[m]$为单位采样响应。另外求出 $w[n]$的功率谱密度 $S_{ww}(e^{j\Omega})$。

(b) 计算 $R_{yx}[m]$和 $R_{xx}[m]$。

(c) 频率响应为 $H(e^{j\Omega})$的、稳定的 LTI 滤波器的输入为 $x[n]$，输出是 $y[n]$的估计$\hat{y}[n]$。现 $H(e^{j\Omega})$的选择满足均方误差最小，也就是说$E[(y[n]-\hat{y}[n])^2]$达到最小。可以用 $y[n]$和 $w[n]$的功率谱密度来描述你的回答。当 $p=1$ 时 $H(e^{j\Omega})$会简化成什么？这是否的确如你所想？

(d) 求出(c)中滤波器的均方误差的表达式。你的结果可以用 $y[n]$和 $w[n]$的功率谱密度的积分形式表达。当(i) $p=0$ 和 (ii) $p=1$ 时，表达式的值能化简吗？这两种情况的结果是否如你所想？

12.8 一个确定的零均值 CT 的 WSS 信号 $y(t)$，其自相关函数为 $R_{yy}(\tau)$，相关的功率谱密度为 $S_{yy}(j\omega)$。该信号通过信道进行传输，信道特性和接收器的特征可由如下的接收信号形式来表征：

$$x(t)=by(t)+v(t)$$

$v(t)$代表接收到的噪声，它是零均值 WSS 噪声，自相关函数为 $R_{vv}(\tau)$，功率谱密度为 $S_{vv}(j\omega)$，并且与 $y[\cdot]$不相关，也就是说，$R_{yv}(\tau)=0$。b 是与 $y[\cdot]$和 $v[\cdot]$独立的随机变量，其取值是 0 或者 1，反映的是信道是否工作，当 $b=1$ 时工作，$b=0$ 时不工作。$b=1$ 的概率为 p。

(a) 计算 $S_{yx}(j\omega)$和 $S_{xx}(j\omega)$，找到稳定的、非因果的 LTI 维纳滤波器的频率响应 $H(j\omega)$，使得当输入为信号 $x[\cdot]$，输出为要传输的信号 $y(t)$的 LMMSE 的估计 $\hat{y}(t)$。也就是说，滤波器的 $E[\{y(t)-\hat{y}(t)\}^2]$达到最小。用问题描述中规定的量来回答，并核实滤波器在 $p=1$ 和 $p=0$时的结果是不是你所期望的。

(b) 求出(a)中设计的最佳滤波器的相关误差 $e(t)=y(t)-\hat{y}(t)$的功率谱密度 $S_{ee}(j\omega)$，再一次，用问题描述中规定的量来回答，并再一次核实在 $p=1$ 和 $p=0$时的结果是不是可以化简成你所期望的。

12.9 图 P12.9 给出了一个有问题(会丢掉数据)的 DT 存储系统的框图，从该存储系统检索数据时，样本会被随机地置 0，现需要设计一个“后检索”(post-retrieval)的估计滤波器用来估计存储器中原来信号的正确值。

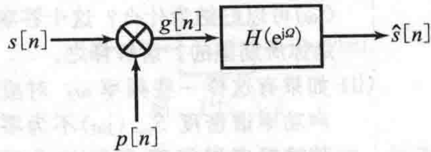


图 P12.9

(i) $s[n]$代表存储的正确信号，它是零均值 WSS 随机过程，自相关函数为 $R_{ss}[n]$，功率谱密度为 $S_{ss}(e^{j\Omega})$：

$$R_{ss}[n]=\frac{16}{15}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}$$

$$S_{ss}(e^{j\Omega})=\frac{16}{|4-e^{-j\Omega}|^2},\quad |\Omega|\leqslant\pi$$

(ii) $p[n]$是随机序列 0 和 1，代表内存信号丢失模型。$p[n]$有如下性能：

- $p[\cdot]$和$s[\cdot]$是统计独立的；
- $p[\cdot]$是独立同分布序列，$p[\cdot]$每个时刻的采样和其他时刻的采样是统计独立的；
- 概率 $P(p[n]=1)=\frac{3}{4}$，$P(p[n]=0)=\frac{1}{4}$。

(iii) $g[n]=s[n]p[n]$，是从当前丢掉数据的内存中检索来的受扰的信号，$g[n]$经常被写为 $g[n]=ks[n]+r[n]$，k 是一个常量，$r[n]=s[n](p[n]-k)$，是 WSS 随机过程。

(iv) $H(e^{j\Omega})$是用 $g[\cdot]$来估计 $s[n]$的 LTI 滤波器的频率响应。

由上述条件回答下列问题：

(a) $r[n]$是零均值的并且与 $s[n]$不相关，求解出常量 k。

(b) $r[n]$是零均值的并且与 $s[n]$不相关，求解 $r[n]$自相关函数 $R_{rr}[n]$。

(c) 当方均估计误差 $E[(s[n]-\hat{s}[n])^2]$最小时，求解滤波器的频率响应$H(e^{j\Omega})$。

12.10 图 P12.10 所示信息信号 $y[n]$加密后，通过一个噪声信道进行传输，然后在接收端进行解密和滤波。这里假设 $y[n]$是零均值 WSS 随机过程，自相关函数为 $R_{yy}[m]$，相关的功率谱密度为 $S_{yy}(e^{j\Omega})$。信号 $p[n]$在发送端用来加密，在接收端用来解密，它是等概率为 0.5 地取值+1 和−1 的独立同分布序列，并与 $y[\cdot]$相互独立。对于所有时刻 n，有 $p^2[n]=1$。传输信号 $q[n]$可由 $p[n]y[n]$得到。

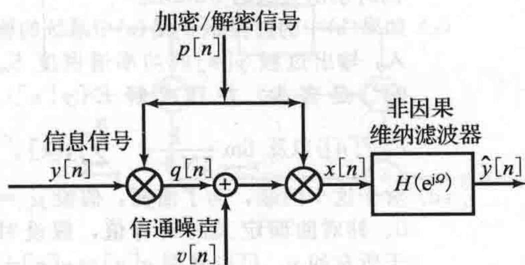


图 P12.10

(a) 分别求解 $p[n]$和 $q[n]$的均值 μ_p 和 μ_q，以及它们的自相关函数 $R_{pp}[m]$和 $R_{qq}[m]$(用 $R_{yy}[\cdot]$表示)，以及信息信号和传输信号间的互相关函数 $R_{yq}[m]$。请问一个入侵者通过拦截传输信号 $q[\cdot]$，能否使用一个线性估计器(可能是非因果的)基于量测值$q[\cdot]$来估计出 $y[n]$? 解释你的回答。

在信道中给传输信号加了噪声信号 $v[n]$，所以接收的信号为

$$q[n]+v[n]=p[n]y[n]+v[n]$$

假设 $v[n]$是零均值的白噪声 WSS 过程，$R_{vv}[m]=\sigma_v^2\delta[m]$。假设它与 $y[\cdot]$不相关，也与 $p[\cdot]$独立。正如图 P12.10所示的，这里假设约定的接收者是知道信号 $p[n]$的加密，也就是说，知道用来加密的全体信号中这一个特定的样本函数。如果这里没有信道噪声(也就是说 $v[n]=0$)，解密就是简单的 $p[n]$乘以接收信号：

$$p[n]q[n]=p[n](p[n]q[n])$$
$$=p^2[n]y[n]=y[n]$$

最后一个等式利用了 $p^2[n]=1$。在有噪声情况下还是企图用相同的方式来解密，但需要更进一步进行滤波。此时送给滤波器的信号为

$$x[n]=p[n](p[n]q[n]+v[n])$$
$$=y[n]+p[n]v[n]$$

(b) 求解 μ_x、$R_{xx}[m]$、$R_{yx}[m]$。

(c) 假设接收端的滤波器是(稳定)非因果维纳滤波器，以产出 $y[n]$的 LMMSE 估计量$\hat{y}[n]$。求解这个滤波器的频率响应 $H(e^{j\Omega})$，然后就两种极限情况 $\sigma_v^2=0$ 和 $\sigma_v^2\to\infty$ 进行明确的核实，看看是否是你所希望的。然后用$S_{yy}(e^{j\Omega})$和 σ_v^2 来写出滤波器的均方误差，同样在两种极限情况下进行验证，看看是否是你所希望的。

12.11 一个稳定的因果 DT 系统，输入为 $w[n]$，输出为 $y[n]$，其关系为

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+w[n]$$

输出是 N 阶的自回归模型，因为输出取决于它自身过去的值，以及现在的输入。假设 $w[n]$是已知的零均值白噪声，方差为 σ_w^2，但是其他的未知。假设 a_k 是已知的，用所有过去的值 $y[\cdot]$来求解输出 $y[n]$的 LMMSE 估计量$\hat{y}[n]$。求解相关的 MMSE。解释在你的推理中哪处会使用到或者如何使用系统的稳定性和因果性。

提示：为了得到 LMMSE 估计，可以利用上述公式给出一个你认为貌似合理的猜测，然后通过验证该猜测是否满足本问题所需的正交性条件。

12.12 (a) 假设 $x[n]$是零均值的 WSS 随机序列，自相关函数 $R_{xx}[m]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|m|}$。正如图 P12.12 所示，现在需要设计因果 LTI

滤波 $h[n]$，其仅有一个非零值，也就是 $h[n]$ 受限制于形式 $h[n]=a\delta[n-n_0]$，n_0 是大于或等于 0 的整数。输出 $g[n]$ 是 $x[n]$ 的最佳线性单步预测，也就是说，选择最小的方均预测误差 $E[(g[n]-x[n+1])^2]$ 作为输出。如果 n_0 是固定的，求出 a 的值，用 n_0 表示，来使误差最小。

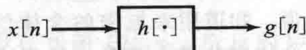


图 P12.12

(b) 一个零均值 WSS 过程 $x(t)$，已知其自相关函数 $R_{xx}(\tau)=6\mathrm{e}^{-3|\tau|}$。确定最佳因果的 LTI 维纳滤波器，用过去无限远到时间 t 的量测值 $x[\cdot]$ 来得到 $x(t+T)$ 的 LMMSE 估计，其中固定 $T>0$。同时，计算相关的 MMSE。

12.13 某个特定的频率响应为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=1/\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\right)$ 的、稳定的 LTI 滤波器，其输入是白噪声 DTWSS 过程 $w[n]$，它的功率谱密度对于所有频率 Ω 为 $S_{ww}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=9$。系统每个时刻 n 的输出为 $y[n]$。

(a) 求解系统输入和输出的一阶差分方程，以及系统的单位采样响应 $h[n]$。作为检验，精确 $\sum h[n]$ 的值并与由 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 给出的你所希望的值比较。系统是因果的吗？

(b) 求解 WSS 输出过程的均值 $E\{y[n]\}=\mu_y$，自相关函数 $E\{y[n+m]y[n]\}=R_{yy}[m]$。

答案中要明确写出自相关函数，不能使用积分或者求和的形式。如果计算正确，你将得到 $y[n]$ 的方差为 12，请证明这个结果。

(c) 用 $y[n+1]$ 来进行 LMMSE 单步因果估计以得到 $\hat{y}[n+1]$，用所有 $k\leqslant n$ 的 $y[k]$ 来进行。可以用(a)中输入输出方程形式来推测这个预测的形式，然后用正交方法检验之。用另一种方法设计一种适当的因果维纳滤波器。不用写出预测的每个步骤，而只写出主要计算步骤就行。也可以用其他方法预测，并且用相同的方法检验。最后计算预测的相关 MMSE。正确的答案比 12 大吗？

下面的几何级数可能有用：

$$1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-1}=\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}$$

12.14 假设零均值 WSS 过程 $x[n]$ 是由零均值、PSD $S_{ww}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sigma^2$ 的白噪声 $w[n]$ 通过一个稳定因果的系统函数为 $M(z)=1-3z^{-1}$ 的滤波器获得的。

(a) 如果 $S_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 是 $x[n]$ 的功率谱密度，求解之。同时求解 $x[n]$ 的自协方差 $C_{xx}[m]$，随机变量 $x[n+1]$ 的方差，$x[n]$ 与 $x[n+1]$ 的相关系数。

(b) 规定 $x[n]$ 的 LMMSE 估计为 $x[n+1]$，计算相关的均方误差。这里计算出的 $x[n+1]$ 的方差比(a)中的计算结果小吗？

(c) 求解由稳定和因果的 $1/F(z)$ 转变的稳定因果的滤波器的系统函数 $F(z)$，就如 $S_{xx}(z)=F(z)F(z^{-1})$。

(d) 求解由过去和现在的值 $x[k]$，$k\leqslant n$ 进行 $x[n+1]$ 的 LMMSE 估计的因果维纳滤波器的系统函数，也就是说求解单步预测的系统函数。你觉得均方误差比(b)中计算的是大还是相等还是小？均方误差是否如你期望的一样．

12.15 (a) 特定的 DT LTI 系统的频率响应为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$。求单位采样响应 $h[n]$。如果计算正确，你会发现系统既不是因果的也不是非因果的。同时求解

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k] \quad 和 \quad \int_0^{\pi}|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2\mathrm{d}\Omega$$

回忆：

$$\sum_{i=0}^{\infty}r^i=\frac{1}{1-r},\quad |r|<1$$

(b) $x[n]$ 为均值为 μ_x、自协方差函数为 $C_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$ 的 WSS 过程，$x[n]$ 的 LMMSE 估计 $x[n+2]$ 是多少？也就是说，找出使 $E\{(x[n+2]-\hat{x}[n+2])^2\}$ 最小的 $\hat{x}[n+2]=\alpha x[n]+\beta$ 的 α 和 β。同时求出关联的 MMSE。

(c) 如果(b)中的过程 $x[n]$ 是(a)中系统的输入，输出过程 $y[n]$ 的功率谱密度 $S_{yy}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 是多少？并且求解 $E\{y[n]\}$、$E\{y^2[n]\}$ 以及 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}y[k]$。

(d) 对于这个问题，为了简便，假设 $\mu_x=0$。针对前面定义的所有值，假设对于所有的 n，可以量测 $q[n]=y[n]+v[n]$，$v[n]$ 是零均值白噪声，值为 σ_v^2，与过程 $x[k]$ 是不相关的。计算非因果维纳滤波器的频率响应 $W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，维纳滤波器每个时刻的输入为 $q[n]$，输出为 LMMSE 估计 $\hat{x}[n+2]$。在 $\sigma_v^2=0$ 情形下，结果降低到了何值？

12.16 正如图 P12.16-1 所示，系统包括因果嵌入反馈回路。输入信号为 $a[\cdot]$，噪声信号 $w[\cdot]$ 是零均值的、不相关、WSS 白噪声过程，自相关函数分别为

$$R_{aa}[m]=\sigma_a^2\delta[m],\quad R_{ww}[m]=\sigma_w^2\delta[m]$$

$a[n]$到$b[n]$的传递函数为$E(z)$、$w[n]$到$b[n]$的传递函数$F(z)$为

$$E(z)=\frac{1}{z},\quad F(z)=\frac{z-3}{z}=1-3z^{-1}$$

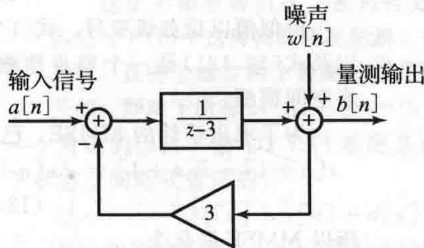


图 P12.16-1

如图 P12.16-2 所示，这个问题关注 LTI 滤波器的设计，系统函数为 $H(z)$，输入为 $b[n]$，输出为 $a[n]$的 LMMSE 估计$\hat{a}[n]$。

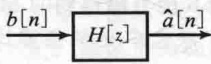


图 P12.16-2

(a) 假设这里没有噪声 $w[n]$，也就是说 $\sigma_w^2=0$，滤波器 $h[n]$是非因果的。求不工作时 $H(z)$的值，以及相关的均方误差 $E[(a[n]-\hat{a}[n])^2]$。

(b) 假设现在的滤波器 $h[n]$是非因果的，但是 σ_w^2 不再限制为0，也就是说 $\sigma_w^2\geqslant 0$。求 $H(z)$。并检验当 $\sigma_w^2=0$ 时，(a)中的答案是否减小了。

(c) 再一次假设这里没有噪声 $w[n]$，也就是说，$\sigma_w^2=0$，但是估计滤波器 $H(z)$是因果的，求解 $H(z)$以及均方误差。

(d) 求解当 $\sigma_w^2>0$ 时的维纳滤波器。

12.17 观察图 P12.17-1 所描绘的系统

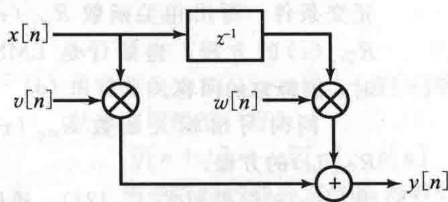


图 P12.17-1

随机序列 $x[\cdot]$、$v[\cdot]$、$w[\cdot]$是相互独立的 WSS，自相关函数分别为 $R_{xx}[m]$，$R_{vv}[m]$和 $R_{ww}[m]$，功率谱密度分别为 $S_{xx}(e^{j\Omega})$、$S_{vv}(e^{j\Omega})$、$S_{ww}(e^{j\Omega})$。序列 $x[n]$是零均值的，序列 $v[n]$和 $w[n]$的均值分别为 μ_v 和 μ_w。

设计一个对于所有 n 都有来自量测值$\{y[k],\ -\infty<k<\infty\}$的估计 $x[n]$的非因果维纳滤波器，也就是说，非因果线性滤波器 $H_{WF}(e^{j\Omega})$如图 P12.17-2. 将你的回答用 $x[n]$、$v[n]$、$w[n]$表示，任何代数的或者三角函数的操作对加、标量乘积、多位乘积和卷积都没有限制。

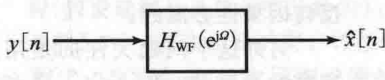


图 P12.17-2

12.18 WSS 过程 $x[n]$是输入为白噪声 $w[n]$的最小相位 LTI 系统的输出，其中 $E\{w^2[n]\}=1$，如图 P12.18-1 所示。

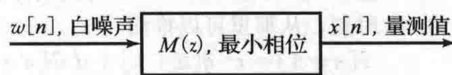


图 P12.18-1

假设系统的传递函数为 $M(z)=\dfrac{\gamma}{z-\lambda}+d$，其中 $\gamma\neq 0$，$d\neq 0$。想将过程 $x[n]$通过一个稳定 LTI 滤波器(其系统函数是 $H(z)$)得到 $x[n+1]$的 LMMSE 估计$\hat{x}[n+1]$，也就是说，LMMSE 的单步预测，如图 P12.18-2 所示。

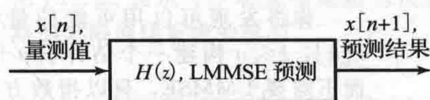


图 P12.18-2

(a) 假设除了 LTI 滤波器 $H(z)$是稳定的之外无其他约束，求最佳滤波和相关的 MMSE 以及 $E\{(x[n+1]-\hat{x}[n+1])^2\}$。

(b) 假设现在约束 $H(z)$不仅是稳定的而且是因果的。再一次计算最佳滤波器和相关的均方误差。用给出的量表示结果，也就是说用 γ、λ 和 d 表示。

高级习题

12.19 WSS 随机过程 $x[n]$是输入为白噪声 $w[n]$的因果 BIBO 稳定 LTI 系统的输出(见图 P12.19)，其中 $w[n]$是零均值的 $E\{w^2[n]\}=1$。

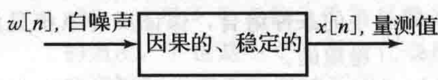


图 P12.19

假设所有模型中的所有状态空间都是可达的和可观测的，状态空间的形式为

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}w[n]\qquad(12.114)$$

$$x[n]=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+dw[n]\qquad(12.115)$$

第一个方差为状态演变方程，第二个方程为输出方程。相关的系统函数为

$$M(z)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}+d\qquad(12.116)$$

(a) 解释为什么 BIBO 稳定状态空间能确保是渐进稳定的。

注意不能使用过程 $w[n]$或者 $\boldsymbol{q}[n]$，我们只有输出 $x[n]$的量测值。这个问题在上述模型的反转系统中是

有用的。假设上述模型有因果的 BIBO 稳定的反转系统，也就是说，模型是最小相位的。假设从现在开始 $d\neq 0$ 是反转因果性必需的。

另外这个问题关注的是用过去和现在的量测值(即，$x[k]$，$k\leqslant n$)，来构建量测值的下一个，即 $x[n+1]$ 的 LMMSE 估计 $\hat{x}[n+1]$。换句话说，若想构建最佳单步预测。我们的策略是基于式(12.115)中 $n+1$ 时刻而不是 n 时刻，从那里可以推测

$$\begin{aligned}\hat{x}[n+1] &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]+d\,\hat{w}[n+1]\\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]\end{aligned}\tag{12.117}$$

在前面等式的量上加 ^ 定义了每个 LMMSE 估计都是基于 $x[k]$ 的，$k\leqslant n$，最后一个等式说明 $\hat{w}[n+1]=0$。

(b) 详细解释为什么 $\hat{w}[n+1]=0$，也就是说，为什么基于 $x[k]$，$k\leqslant n$ 的 $w[n+1]$ 的 LMMSE 估计为 0？

你将发现可以用可能的量测值 $x[k]$，$k\leqslant n$ 构建一个估计 $\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]$，而不需要 LMMSE，只以指数方式聚集 $\boldsymbol{q}[n+1]$。因此，经过一个短暂的瞬间，估计值本质上与 $\boldsymbol{q}[n+1]$ 自身是一样好的。

(c) 反转系统的状态空间模型可以写为

$$\boldsymbol{q}[n+1]=\boldsymbol{A}_{\mathrm{inv}}\boldsymbol{q}[n]+\boldsymbol{b}_{\mathrm{inv}}x[n]\tag{12.118}$$

$$w[n]=\boldsymbol{c}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}[n]+d_{\mathrm{inv}}x[n]\tag{12.119}$$

用原系统中合适的量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$、$d$ 来表示 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{inv}}$、$\boldsymbol{b}_{\mathrm{inv}}$、$\boldsymbol{c}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{T}}$ 和 d_{inv}。已知上述模型在原系统中的状态空间向量是相同的，但是输入和输出与原系统是互换的。

假设 BIBO 稳定的反转系统和(a)中的条件组合，保证反转系统是渐进稳定的。

假设建立了一个反转系统状态演变的实时仿真：

$$\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]=\boldsymbol{A}_{\mathrm{inv}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{b}_{\mathrm{inv}}x[n]\tag{12.120}$$

如果对于 $x[k]$，$0\leqslant k\leqslant n$，初始值为 $\hat{\boldsymbol{q}}[0]=\boldsymbol{q}[0]$，则在 $0\leqslant k\leqslant n$，$\hat{\boldsymbol{q}}[k+1]=\boldsymbol{q}[k+1]$。然而因为不能得到 $\boldsymbol{q}[0]$，所以在仿真器中用 $\hat{\boldsymbol{q}}[0]$。

(d) 求解状态演变方程的误差在 $n\geqslant 0$ 时 $\tilde{\boldsymbol{q}}[n]=\boldsymbol{q}[n]-\hat{\boldsymbol{q}}[n]$，并且用方程解释为什么误差以指数级的速度变为 0，即反转系统特征值的速率，也就是说，到 0 时式(12.116)中 $M(z)$ 的系统函数。

观察上述实例，可以用 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n+1]$ 近似表示 $\hat{x}[n+1]$。援引式(12.120)，有

$$\hat{x}[n+1]\approx\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}_{\mathrm{inv}}\,\hat{\boldsymbol{q}}[n]+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{b}_{\mathrm{inv}}x[n]\tag{12.121}$$

近似值以指数级变好。式(12.120)以及式(12.121)是一个单步预测的状态空间模型。

为了求出估计的 MMSE，已知

$$x[n+1]-\hat{x}[n+1]=dw[n+1]\tag{12.122}$$

所以 MMSE 简化为

$$d^2E\{w^2[n+1]\}=d^2$$

(e) 分别用常量 a、b、c 代替 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 来详细说明一阶模型，并且检验由因果维纳单步预测得到的和相关的 MMSE 与用其他方法得到的 MMSE 的好坏。

12.20 已知三个联合广义平稳零均值 CT 随机过程 $y(\cdot)$、$x_1(\cdot)$、$x_2(\cdot)$。假设想用 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 的过去、现在、将来的所有值来对 $y(t)$ 进行 LMMSE 估计，可以计算 $y(t)$ 的估计量 $\hat{y}(t)$：

$$\hat{y}(t)=h_1(t)*x_1(t)+h_2(t)*x_2(t)\tag{12.123}$$

选择使 $E[\{y(t)-\hat{y}(t)\}^2]$ 最小化的 $h_1(\cdot)$ 和 $h_2(\cdot)$。我们可以认为 $h_1(\cdot)$ 和 $h_2(\cdot)$ 分别是输入为 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 的两个稳定 LTI 系统的冲激响应，这两个系统的输出加上了感兴趣的估计值。我们的目标是求出这两个冲激响应，或者它们的傅里叶变化 $H_1(\mathrm{j}\omega)$ 和 $H_2(\mathrm{j}\omega)$。

(a) 援引管理 LMMSE 问题的解决方法的正交条件，写出相关函数 $R_{yx_1}(\tau)$ 和 $R_{\hat{y}x_1}(\tau)$ 的方程，当估计是 LMMSE 时，解释你的回答。

同时写出相关函数 $R_{yx_2}(\tau)$ 和 $R_{\hat{y}x_2}(\tau)$ 的方程。

(b) 利用(a)的结果和式(12.123)，通过合适的卷积或者 $R_{x_1x_1}(\cdot)$、$R_{x_1x_2}(\cdot)$、$h_1(\cdot)$、$h_2(\cdot)$ 的和，或者与这些紧密相关的函数，来表示 $R_{yx_1}(\tau)$。

也用类似的方式表示 $R_{yx_2}(\tau)$。

如果 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 是不相关的，如何简化表达式，也就是说，对于所有 τ，$R_{x_1x_2}(\tau)=0$ 吗？

(c) 将(b)中的方程进行傅里叶变化，将得到两个线性联立方程，变化域的频率响应为 $H_1(\mathrm{j}\omega)$ 和 $H_2(\mathrm{j}\omega)$。将方程集合在下面矩阵中，在星号处填上合适的值：

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1(\mathrm{j}\omega) \\ H_2(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}$$

（检验：若一切正确，则所确定的 2×2 矩阵是 ω 的实函数）

这里不需要解出这一系列的方程，但是写下(b)中这种特殊情况的解，也就是说，在哪个地方两个量测过程是不相关的，即对于所有 τ，$R_{x_1x_2}(\tau)=0$。

12.21 一个特定的因果一阶 DT LTI 系统是由如下状态空间形式管理的：

$$q[n+1]=3q[n]+x[n]+d[n]$$

$x[n]$是已知的控制输入，$d[n]$是未知的零均值、WSS 白噪声输入干扰信号，$E(d^2[n])=\sigma_d^2$。想用一个观测器构造一个由 $q[n]$的估计$\hat{q}[n]$，此时使用噪声输出量测值

$$y[n]=2q[n]+v[n]$$

$v[n]$是未知的零均值的 WSS 白噪声过程，$E(v^2[n])=\sigma_v^2$。假设量测噪声与系统干扰信号是不相关的，即对于所有 n、k，都有 $E(v[n]d[k])=0$。

(a) 详细说明下列哪个方程是可以实现的，解释你的原因。在每种情况中，ℓ 表示观测器增益。

(i) $\hat{q}[n+1]=3\,\hat{q}[n]+x[n]+d[n]-\ell(y[n]-2\,\hat{q}[n]-v[n])$

(ii) $\hat{q}[n+1]=3\,\hat{q}[n]+x[n]-\ell(y[n]-2\,\hat{q}[n]-v[n])$

(iii) $\hat{q}[n+1]=3\,\hat{q}[n]+x[n]-\ell(y[n]-2\,\hat{q}[n])$

(iv) $\hat{q}[n+1]=3\,\hat{q}[n]-\ell(y[n]-2\,\hat{q}[n])$

(v) $\hat{q}[n+1]=3\,\hat{q}[n]-\ell(y[n]-2\,\hat{q}[n]-v[n])$

(vi) 其他

(b) 由观测误差 $\widetilde{q}[n]=q[n]-\widetilde{q}[n]$ 获得状态空间模型，写为

$$\widetilde{q}[n+1]=\alpha\,\widetilde{q}[n]-p[n]$$

用参数和问题陈述中提到的信号来表示 α 和 $p[n]$(但是 $p[n]$中不能有 $\widetilde{q}[n]$)。检验：如果计算正确，你会发现当 $\ell=-\dfrac{3}{2}$时 $\alpha=0$。

(c) 求(b)中系统函数的误差以及相关的冲激响应，也就是说，求出输入 $p[n]$与 $\widetilde{q}[n]$之间的系统函数以及冲激响应。

(d) 已知(b)中输入过程 $p[n]$是 WSS 的且零均值的，求它的自协方差函数$C_{pp}[m]$，用题目陈述中所给的参数表示。

(e) 当 $\ell=-\dfrac{3}{2}$时，求 $E(\widetilde{q}[n])$及其二阶矩 $E(\widetilde{q}^2[n])$，以及方差。

(f) 如果不只知道条件(e)，同时使 ℓ 必须满足观测误差 $\widetilde{q}[n]$是零均值的 WSS 过程(假设观测是从负无穷开始的)，核实条件(e)中 ℓ 是否满足约束，详细说明。

(g) 假定 ℓ 的约束是(f)中详细说明的，观测是从负无穷开始的。求 $E(\widetilde{q}[n])$的一般表达式及其二阶矩 $E(\widetilde{q}^2[n])$和方差的一般表达式。下面的等式可能会有，对于$|\alpha|<1$，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}=\frac{1}{1-\alpha^2}$$

(h) 在 $\sigma_d^2=0$ 和 $\ell=-\dfrac{4}{3}$时计算(g)中方差的表达式，并且表明这里的误差方差比(e)中 $\ell=-\dfrac{3}{2}$时的要小。

(i) 求出(g)中方差最小时的 ℓ，在条件(f)的约束下，求相关的方差。

12.22 图 P12.22 表示一个有直接通路与反射通路的无限通信系统的模型。

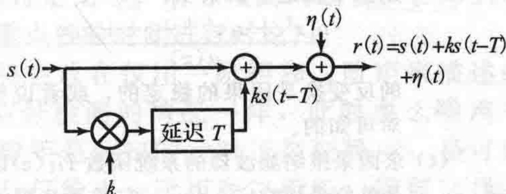


图　P12.22

在这个图中，

(1) 信道输入 $s(t)$是零均值的 WSS 随机过程，其功率谱密度是

$$S_{ss}(\mathrm{j}\omega)=\frac{2\lambda\sigma_s^2}{\omega^2+\lambda^2}$$

这里 λ 和 σ_s^2 都是正数。

(2) 信道的输出是 $r(t)=s(t)+ks(t-T)+\eta(t)$，这里 k 是正数，代表反馈回路的强度，T 也是一个正数，代表反馈通路相对于直接通路的延迟，$\eta(t)$是信道噪声。

(3) 信道噪声 $\eta(t)$是零均值的 WSS 白噪声，与 $s(\cdot)$独立，并且功率谱密度 $S_{\eta\eta}(\mathrm{j}\omega)=N$。

根据所给信息回答下列问题：

(a) 求 $r(t)$的功率谱密度 $S_{rr}(\mathrm{j}\omega)$。

(b) 想让 $r(t)$通过频率响应为$H(\mathrm{j}\omega)$的 LTI 滤波器来获得信道输入 $s(t)$的估计。求频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$最小时的估计值的均方误差。

12.23 假设零均值 WSS 过程 $x[n]$的自相关函数 $R_{xx}[m]$的 z 变换为

$$S_{xx}(z)=\frac{1}{a(z)a(z^{-1})}$$

其中，

$$a(z)=z^L+a_1z^{L-1}+\cdots+a_L$$

是一个 L 阶多项式，它的解都在单位圆内。已知

$$S_{xx}(z)=\frac{z^L}{a(z)}\frac{z^{-L}}{a(z^{-1})}$$

$$=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Lz^{-L}}\frac{1}{1+a_1z+\cdots+a_Lz^L}$$

(a) 求稳定因果滤波的系统函数 $M(z)$以及使 $M(z)M(z^{-1})=S_{xx}(z)$的稳定的因果反转滤波器。

(b) 求因果维纳滤波器的系统函数 $H_1(z)$以及单位采样响应 $h_1[n]$，该滤波器的作用是用量测值 $x[\cdot]$来进行 $x[n+1]$的 LMMSE 估计，所以这个滤波器是单步维纳预测。提示：取决于如何处理这个问题，你可能会用到下述关系

$$\frac{z^L}{a(z)}=z-\frac{a_1z^L+a_2z^{L-1}+\cdots+a_Lz}{a(z)}$$

以及下面这个观察项：

$$\frac{a_1z^L+a_2z^{L-1}+\cdots+a_Lz}{a(z)}$$

的反变换是因果的稳定的，或者说绝对可知的。

(c) 求因果维纳滤波器的系统函数 $H_2(z)$以及单位采样响应 $h_2[n]$，它是两步维纳预测，用于由量测值 $x[\cdot]$(包括时刻 n)来对 $x[n+2]$的 LMMSE 估计。你将用如下定义的系数 p_1，…，p_L 来表示：

$$\frac{z^{L+2}}{a(z)}=z^2-a_1z-\frac{p_1z^L+p_2z^{L-1}\cdots+p_Lz}{a(z)}$$

已知系数 p_1，…，p_L 可以由 a_1，…，a_L 轻松准确地表示，但是在这里不重要。

12.24　一个 DT 随机过程 $x[n]$是零均值 DT WSS 过程 $y[n]$与零均值 DT WSS 白噪声 $v[n]$之和，所以 $x[n]=y[n]+v[n]$。假设下面条件成立：

(i) $y[n]$的功率谱密度 $S_{yy}(e^{j\Omega})=4-4\cos(\Omega)$；

(ii) $v[n]$的功率谱密度 $S_{vv}(e^{j\Omega})=1$；

(iii) 随机过程 $y[\cdot]$和 $v[\cdot]$是不相关的。

我们感兴趣的是管理 $y[n]$的单步预测的因果维纳滤波器，为了获得基于所有 $k\leqslant n$ 的 $x[k]$值来对 $p[n]=y[n+1]$进行 LMMSE 估计。用$\hat{y}[n+1]$表示这个 LMMSE 估计。想一想因果系统中的传递函数对这个问题是有帮助的，即

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

有单位采样响应 $\alpha^n u[n]$。

(a) 求解谱因子 $M_{xx}(e^{j\Omega})$它有下列所有的属性：

(i) $S_{xx}(e^{j\Omega})=|M_{xx}(e^{j\Omega})|^2$；

(ii) $M_{xx}(e^{j\Omega})$可以是一个因果稳定的 LTI 系统的频率响应；

(iii) $1/M_{xx}(e^{j\Omega})$可以是一个因果稳定的 LTI 系统的频率响应。

(b) 用(a)中的结果求 $w_{xx}[n]$的反转变化

$$W_{xx}(e^{j\Omega})=\frac{1}{M_{xx}(e^{j\Omega})}$$

(c) 用 $R_{yy}[m]$表示 $R_{px}[m]$。

(d) $h[n]$是输入为 $x[n]$、输出为$\hat{y}[n+1]$的维纳滤波器的冲激响应。求用 $w_{xx}[n]$准确地表示 $h[n]$。这个题的目的是说明 $S_{yy}(e^{j\Omega})$最有用的表达式可能是

$$S_{yy}(e^{j\Omega})=4-2e^{j\Omega}-2e^{-j\Omega}$$

(e) 修改(d)中的计算或者用其他流行的方法求两步预测的因果维纳滤波器，也就是说，基于所有 $k\leqslant n$ 的量测值 $x[k]$来获得 $y[n+2]$的 LMMSE 估计，并且解释这个结果的合理性。

扩展习题

12.25　(a) 假设零均值过程 $y[n]$的估计量$\hat{y}[n]$是由零均值量测过程 $x[n]$用频率响应为 $H(e^{j\Omega})$的 LTI 滤波器得到的，这里 $x[\cdot]$和 $y[\cdot]$是联合广义平稳过程。这个估计的均方误差源于式(12.73)。(这个结果适用于不是 LMMSE 估计也可以是非零均值的过程，在构建估计量的标准调节后：在滤波器的输入中减去 $x[n]$的均值 μ_x，在滤波器的输出中加上 $y[n]$的均值 μ_y。)

(b) 再用所有的 $k\leqslant n$ 的 $x[n]$在(a)中的因果维纳滤波器对 $y[n]$进行 LMMSE 估计。源于式(12.74)的因果性的代价，即无约束维纳滤波器中额外的均方误差。

12.26　假设已知广义平稳过程 $x[n]$的均值 μ_x 和 $D_{xx}(e^{j\Omega})$的 FSD。描述如何管理 $x[n]$的联合 WSS 过程 $y[\cdot]$，这里有规定的 μ_y、FSD $D_{yy}(e^{j\Omega})$和互波动密度(cross fluctuation density) $D_{yx}(e^{j\Omega})$。(说明：利用 LMMSE，通过 $x[\cdot]$的各个项来估计 $y[n]$的估计项$\hat{y}[n]$。为了保障你的分析有效，请说明 $D_{yx}(e^{j\Omega})$应该满足的约束条件，由 $D_{xx}(e^{j\Omega})$和 $D_{yy}(e^{j\Omega})$表示。)

494
~
510

第13章 信号检测

在给定了一个与随机变量 R 相关的量测 r 情况下，第 9 章探讨了多假设 H_i 的最佳决策问题。例如在数字通信领域中，量测信号是接收端已处理过的信号样本，而假设是指与发送端传输的各个备选符号中的一个在特定时间段内相关联。在第 9 章中，通过选择任何具有最大的后验概率(posterior probability)的假设，以确保在这样的假设检验问题中错误概率最小，也就是说选择基于量测的概率最大的假设。

这个具有最小错误概率决策的最大后验概率准则(或 MAP)的推论，也可扩展到多于一个随机变量的量测情况。采样多重量测(multiple measurement)的不同在于，后验概率是以全部随机变量的量测值为条件的。这个推广在第 9 章中已经指出过，而在本章将会更加详细地探讨。

在众多应用中，多重量测信号是由一个或多个接收机接收到的波形在一个时间区间上采样的样本序列来构成的。典型的问题涉及对被测量的波形进行决策，判定它只是一个噪声信号，还是一个隐藏在噪声中的人们感兴趣的特定信号。信号检测问题会以多形式出现，比如在雷达、声呐和通信的应用中，本章的重点就是对此进行讨论。

虽然本章开始是一般性的讨论，不过重点将会放在仅用一阶矩和二阶矩来描述的噪声的检测问题上，正如第 12 章的 LMMSE 信号检测的情况一样，此时要么噪声本身是高斯的，要么就是只有噪声的一阶矩和二阶矩是已知的。对于高斯噪声，是可以获得最小错误概率的。但对于非高斯噪声，并且仅给出一阶矩和二阶矩，需要选择一些次最佳的概念，此时典型的做法是通过最大化某个信噪比，来推导出基于量测信号的决策变量。

511

13.1 基于多重量测的假设检验

考虑两种假设 $H=H_0$ 和 $H=H_1$ 中具有最小错误概率的选择问题，已知一系列的随机变量 R_i 分别取值 r_i，$i=0, 1, 2, \cdots, L-1$。更紧凑地，令 $\boldsymbol{R}$ 表示随机变量 R_i 的向量，$\boldsymbol{r}$ 表示对应于这些随机变量取值 r_i 的向量。于是要想使条件错误概率 $P(\text{error}\,|\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r})$ 最小，可以做出的判决是有利于二元假设(two hypotheses)中任何一个具有最大条件概率那个假设，这里概率以 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}$ 为条件。二元假设检验的最佳检测可采用如下形式表征：

$$P(H_1\,|\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}) \underset{\text{'}H_0\text{'}}{\overset{\text{'}H_1\text{'}}{\gtrless}} P(H_0\,|\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}) \tag{13.1}$$

第 9 章引入的记号'H_1'指示对假设 H 的选择 $\hat{H}$ 是 H_i，或 $\hat{H}=H_i$。相关的判决域 D_i 定义为当 $\boldsymbol{r}$ 落在区域 D_i 时，就可以准确地声明是假设'H_1'。在这里判决域 D_i 是 L 维空间中的区域，而不是实线段。如果处理的情况是多于二元假设的，则最小错误条件概率准则选择所有变量假设中那个具有最大后验概率 $P(H_i\,|\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r})$ 的假设 H_i。

正如第 9 章推导的那样，对式(13.1)两边的后验概率运用贝叶斯准则进行变换，消去两分母中的因式 $f_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r})$，可以得到一个等价的准则，表达式为

$$p(H_1)f_{\boldsymbol{R}|H}(\boldsymbol{r}\,|\,H_1) \underset{\text{'}H_0\text{'}}{\overset{\text{'}H_1\text{'}}{\gtrless}} p(H_0)f_{\boldsymbol{R}|H}(\boldsymbol{r}\,|\,H_0) \tag{13.2}$$

MAP 准则变换后的这一种表示形式是应用中最有用的，因为该式中出现的各个项的数值通常是已知的，或者可以从问题描述中推导出来。特别地，两个条件概率密度构成在每个假设下的量测值的概率模型。再一次说明，对于多于二元假设下的最小错误概率判决，选择多个假设中任何具有最大 $p(H_i)f_{\mathbf{R}|H}(\mathbf{r}|H_i)$值的那个假设 H_i。

512

进一步重新整理式(13.2)，得到最佳二元判决准则的似然比形式：

$$\frac{f_{\mathbf{R}|H}(\mathbf{r}|H_1)}{f_{\mathbf{R}|H}(\mathbf{r}|H_0)} \underset{`H_0'}{\overset{`H_1'}{\gtrless}} \eta \tag{13.3}$$

其中，阈值 η 定义为 $P(H_0)/P(H_1)$的比值，用作最小错误概率的判决，但是对于 NP (Neyman-Pearson)准则或最小风险检测，可能会有不同的规定。

例 13.1　两个量测值优于单个量测值

假设基于被量测的随机变量 X，需要在假设 H_0 和 H_1 之间做出决策。在 H_0 和 H_1 的条件下，分别给出 X 的条件概率密度，如图 13.1 所示。这里可以认为 H_1 对应于存在某个潜在条件，假设检验问题的目的是需要基于 X 的量测值来检测这个潜在条件是否存在。于是假设 H_0 就对应于该条件不存在。二元假设的先验概率为 $P(H_0)=\frac{3}{4}$和 $P(H_0)=\frac{1}{4}$。

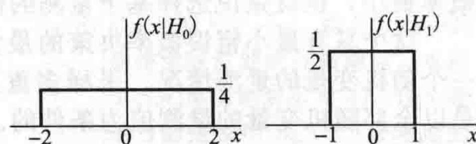


图 13.1　X 分别在 H_0 和 H_1 假设下的条件概率密度

在两种假设之间进行选择的最小错误概率判决准则就是对式(13.2)的直接应用。由于

$$\frac{1}{4}f_{X|H}(x|H_1)=\frac{1}{8} \quad < \quad \frac{3}{4}f_{X|H}(x|H_0)=\frac{3}{16} \tag{13.4}$$

其中，x 属于区域$|x|<2$ 时总是声明为假设'H_0'，而无论 x 是何值。因此，潜在条件的"虚警"概率是 $P_{\mathrm{FA}}=P(`H_1'|H_0)=0$。但同时，潜在条件的检测概率是 $P_{\mathrm{D}}=P(`H_1'|H_1)=1-P(`H_0'|H_1)=1-P_{\mathrm{M}}=0$，其中 P_{M} 表示"漏警"概率。如式(9.29)所示，根据 P_{FA}和 P_{M} 计算 X 全部可能取值上相关的总体错误概率的平均，可以得到

$$P_{\mathrm{e}}=P(H_0)P_{\mathrm{FA}}+P(H_1)P_{\mathrm{M}}=P(H_1)=\frac{1}{4} \tag{13.5}$$

现在不妨假设有两个随机变量 X_1 和 X_2 的量测值分别为 x_1 和 x_2，随机变量 X_1 和 X_2 与上面的随机变量 X 同分布，且它们在任何一个假设下相互独立。这里把两个随机变量假设为一个随机向量 $\mathbf{X}$，是为了标记方便，因为随机变量在每个假设下是相互独立的

$$f_{\mathbf{X}|H}(x_1,x_2|H_i)=f_{X|H}(x_1|H_i)f_{X|H}(x_2|H_i),\quad i=0,1 \tag{13.6}$$

513

该等式表明对于 $H=H_0$ 的两个随机变量的条件联合概率密度函数是非零的，且以概率$\frac{1}{16}$均匀分布在区域$|x_1|<2$、$|x_2|<2$ 上。对于 $H=H_1$，条件联合概率密度函数是非零的且以概率$\frac{1}{4}$均匀分布在区域$|x_1|<1$、$|x_2|<1$ 上。两个条件密度在特定区域外为 0。再次运用式(13.2)，可以发现在区域$|x_1|<1$、$|x_2|<1$ 中，

$$\frac{1}{4}f_{\mathbf{X}|H}(x_1,x_2|H_1)=\frac{1}{16} \quad > \quad \frac{3}{4}f_{\mathbf{X}|H}(x_1,x_2|H_0)=\frac{3}{64} \tag{13.7}$$

所以在这个区域中，最佳判决准则声明为假设'H_1'。在这个较大区域$|x_1|<2$、$|x_2|<2$ 的剩余区域中，

$$\frac{1}{4}f_{\mathbf{X}|H}(x_1,x_2|H_1)=0 \quad < \quad \frac{3}{4}f_{\mathbf{X}|H}(x_1,x_2|H_0)=\frac{3}{64} \tag{13.8}$$

所以最佳判决准则声明'H_0'。对应的 $P_{\mathrm{FA}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$和 $P_{\mathrm{D}}=1$，因此相关的总体错误概率是

$$P(\text{错误}) = P(H_0)P_{FA} + P(H_1)P_M = P(H_0)P_{FA} = \frac{3}{16} \tag{13.9}$$

由于是两个量测值，所以错误概率由$\frac{1}{4}$减为$\frac{3}{16}$。

不使用最佳判决，基于两个量测值的处理结果基本上只会有与使用单个量测值的最佳判决结果一样的性能，甚至可能有更差的性能。例如在这个特殊的例子中，可以使用基于 x_1 和 x_2 均值的判决准则，可以证明这是最好的，如果总是声明'H_0'，该准则会产生和单量测值的最佳判决一样的性能。◀

本章接下来会涉及比上面例子中的量测处理更加复杂的情况，讨论其假设检验的最佳实现。不过相关公式和方法在本质上还是与上面例子使用的一样简单。

13.2 独立同分布高斯噪声中已知信号的检测

本节研究的检测问题的原型是使用在有限长时间窗内测量的一个离散时间(DT)信号 $r[n]$，例如，假定 $n=0, 1, 2, \cdots, L-1$。将这些量测值看成一系列随机变量$R[n]$的真实采样值(the realized value)。

令 H_0 表示的假设为：随机变量 $R[n]$是独立同分布的零均值高斯噪声，即

$$H_0\text{：}\ R[n] = W[n] \tag{13.10}$$

其中，随机变量 $W[n]$，$n=0, 1, 2, \cdots, L-1$，是独立的零均值的高斯信号，方差为 σ^2。类似地，让 H_1 表示的假设为：随机变量序列 $R[n]$是已知的确定信号 $s[n]$与独立同分布的高斯噪声序列 $w[n]$的和，所以

$$H_1\text{：}\ R[n] = s[n] + W[n] \tag{13.11}$$

其中，$W[n]$的分布同上。通常将信号 $s[n]$视为目标信号。信号检测问题在这里是基于 $r[n]$的量测值决定声明 H_0 还是 H_1，也就是说，判决目标信号是否存在于接收到的量测值中。

514

这个问题的最简化版本在例 9.5 中有提出(或者见习题 9.9)，该例题处理只有一个信号量测值的特殊情况，即 $L=1$。在那里，这个简化问题判决一个特殊的量测值 r 是否为一个有 0 均值和规定的标准差(在那个例子中取值为 1)的高斯随机变量的真实值，还是一个标准差同样为 1 但均值为非零信号 s 的高斯随机变量。

对于 $L>1$ 所建立的最佳检测方法，将分析简化为 $L=1$ 的情况一样简单的结论。归根到底，最终的任务是判决基于量测值 $r[n]$和信号 $s[n]$所推导的一个特殊数据量 g，它是否为具有 0 均值和规定标准差的高斯随机变量所对应的真实值，还是标准差相同但均值非零的其他高斯随机变量所对应的真实值。细节讨论如下。

13.2.1 最佳检测方案

对于最小错误概率检测，再次使用式(13.2)中的 MAP 准则，比较

$$P(H_i)f(r[0],r[1],\cdots,r[L-1]\,|\,H_i) \tag{13.12}$$

其中，$i=0, 1$，并判决哪种假设使该表达式的值最大。这里为了标记方便，已经舍弃了概率密度函数的下角标 $\boldsymbol{R}$ 和 H。

由于 $W[n]$是独立同分布和高斯的，式(13.12)中的条件密度容易计算，给出计算公式：

$$\begin{aligned} f(r[0],r[1],\cdots,r[L-1]\,|\,H_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(L/2)}}\prod_{n=0}^{L-1}\exp\left\{-\frac{(r[n])^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(L/2)}}\exp\left\{-\sum_{n=0}^{L-1}\frac{(r[n])^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \tag{13.13}$$

和

$$f(r[0],r[1],\cdots,r[L-1]\,|\,H_1)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(L/2)}}\prod_{n=0}^{L-1}\exp\left\{-\frac{(r[n]-s[n])^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(L/2)}}\exp\left\{-\sum_{n=0}^{L-1}\frac{(r[n]-s[n])^2}{2\sigma^2}\right\}\quad(13.14)$$

515 如果将一个非线性严格递增的函数运用到等式(13.2)的两边，式(13.2)中的检验仍然成立。由于式(13.13)和式(13.14)为指数形式，对于这种特殊情况的检验可以对等式两边取自然对数，这样处理是非常方便的。在随后的化简和重新整理中，为了标记方便，用 p_i 来表示 $P(H_i)$。MAP 检验可采用如下等价形式

$$g=\sum_{n=0}^{L-1}r[n]s[n]\underset{`H_0\text{'}}{\overset{`H_1\text{'}}{\gtrless}}\sigma^2\ln(p_0/p_1)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{L-1}s^2[n]\quad(13.15)$$

其中，与 $r[n]$有关的计算已经集中在不等式的左边，不等式右边的各项数值可以根据问题说明预先计算出来。式(13.15)右边的求和项是确定性信号 $s[n]$的能量，标记为$\mathcal{E}$，即

$$\mathcal{E}=\sum_{n=0}^{L-1}s^2[n]\quad(13.16)$$

式(13.15)中的检验现在变为

$$g\underset{`H_0\text{'}}{\overset{`H_1\text{'}}{\gtrless}}\gamma\quad(13.17)$$

其中，门限 γ 由下列表达式给出

$$\gamma=\sigma^2\ln(p_0/p_1)+\frac{\mathcal{E}}{2}\quad(13.18)$$

对于例 9.5 和习题 9.9 中处理的 $L=1$ 的情况，其中 $g=r[0]s[0]$，或更简洁的形式是 $g=rs$。在 $s>0$ 的假设下，这种情况的阈值检验(threshold test)可以写为

$$r\underset{`H_0\text{'}}{\overset{`H_1\text{'}}{\gtrless}}\gamma/s=\gamma'\quad(13.19)$$

阈值检验的这种形式在例 9.5 和习题 9.9 中已给出，只不过先前的表达式使用的是符号 γ，这里的表达式使用的是 γ'。如果 $s<0$，上面的检验表达式唯一的变化是将'H_1'和'H_0'的位置互换。

如果从最小错误概率检测准则变成最小风险检测准则或者 NP 检测准则，最佳判决准则仍然是式(13.19)中的形式，而除了式(13.18)给出的阈值表达式中的 p_0/p_1 项会被其他 516 某个适当的常量 η 所代替。例如，在 NP 检测准则下，常量 η(或者等价的 γ 本身)将会在满足规定的 P_{FA}上界的限定下，选择尽可能小的值。

13.2.2 性能描述

本章中的信号检测最佳方法的性能可以通过它的相关错误概率来进行评估。这需要在每种假设下，计算式(13.15)中的数据量 $g=\sum r[n]s[n]$可能的取值范围，然后计算出取值位于阈值 γ 错误的一边的概率，此时会导致一个错误的检测结论。下面就阐述相关的推理和计算。

如果假设 H_0 是正确的，式(13.15)左边的序列 $r[n]$将会只包含独立同分布的高斯噪声的真实值。相应地，g 将会是下列随机变量的一个真实值。

$$G=\sum_{n=0}^{L-1}W[n]s[n]\quad(13.20)$$

因为在每个时刻 n，$W[n]$都是高斯的，并且 $W[\cdot]$与其他时刻的随机变量统计独立，

同时又因为独立高斯随机变量的加权线性组合也是高斯的，所以随机变量 G 是高斯的。由式(13.20)可知，它的均值是 0，方差为

$$\sigma^2 \sum_{n=0}^{L-1} s^3[n] = \sigma^2 \mathcal{E} \tag{13.21}$$

所以标准差就是 $\sigma\sqrt{\mathcal{E}}$。

如果假设 H_1 是正确的，呈现的信号实际上是叠加了一个零均值的噪声。在这种情况中，式(13.15)左边的序列 $r[n]$是加上了一个干扰的信号值 $s[n]$，这个干扰就是高斯白噪声的一个真实值。相应地，g 将是下列随机变量的一个真实值。

$$G = \sum_{n=0}^{L-1}(s[n]+W[n])s[n] = \mathcal{E} + \sum_{n=0}^{L-1} W[n]s[n] \tag{13.22}$$

因此，随机变量 G 是已知常量$\mathcal{E}$和独立高斯随机变量的线性和，并且它本身是高斯的。它的均值是$\mathcal{E}$，但是它的方差仍然和式(13.21)中的一样，因此，它的标准差仍然是 $\sigma\sqrt{\mathcal{E}}$。

因此可以由图 13.2 来描述式(13.15)中的最佳检验。这个图和呈现在例 9.5 中的那个图在本质上是相同的，除了图中横轴上的值的含义不同。那里的图的横轴为接收值 r，而在图 13.2 中横轴是数据量 g。在独立同分布的高斯噪声中信号出现的假设检验等价于使用阈值 γ 来判决数据量 g 究竟是两个高斯分布中的哪一个产生的。这两个高斯分布的标准差相同，同为 $\sigma\sqrt{\mathcal{E}}$，但一个均值为 0(对于 H_0)，另一个均值为$\mathcal{E}$(对于 H_1)。根据式(13.15)左边的总和，数据量 g 的值是可以得到的，等于量测值$r[n]$的加权线性组合，权系数分别对应于信号值 $s[n]$。

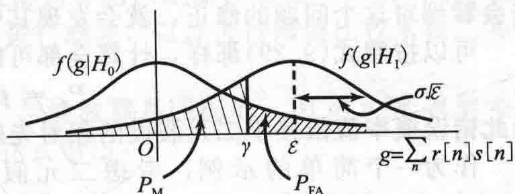


图 13.2 对于独立同分布高斯噪声中已知信号的最小错误概率检测，评估其阈值检验的性能

517

如果假设的先验概率是相等的，阈值 $\gamma=\mathcal{E}/2$，即在两个均值之间进行精确求平均。如果假设 H_0 比 H_1 更有可能，此时 $p_0>P_1$，于是 γ 就变成一个较大的值，这表明在检验时要声明是假设'H_1'，数据量 g 需要变得更大，这是可以理解的。

由图 13.2 可以看出虚警条件概率 $P_{FA}=P(\text{'}H_1\text{'}\,|\,H_0)$是均值为零、标准差为 $\sigma\sqrt{\mathcal{E}}$的高斯 PDF 分布下位于 γ 右边尾部的区域。这个区域不能用封闭形式来计算，但是可以用一个标准高斯(即零均值、单位方差的高斯分布)的列尾概率函数(tabulated tail-probability function) $Q(x)$的形式来表达。$Q(x)$定义为

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-v^2/2}\,dv \tag{13.23}$$

在应用时了解对于 $x>0$ 时 $Q(x)$的上下限是有帮助的，

$$\frac{x}{(1+x^2)}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} < Q(x) < \frac{1}{x}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},\quad x>0 \tag{13.24}$$

根据高斯 PDF 的对称性，可以了解到 $Q(x)$满足下列等式，这也是有用的

$$Q(-x) = 1 - Q(x) \tag{13.25}$$

对变量进行简单的变化，可以推出，对于均值为 α、标准差为 β 的高斯随机变量，位于 PDF 下的某个 γ 值的右边区域的概率可以写成如下的 $Q(\cdot)$形式：

$$\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma}^{\infty} e^{-(w-\alpha)^2/(2\beta^2)}\,dw = Q\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right) \tag{13.26}$$

$Q(\cdot)$的参数是相对于均值α的γ的距离，以标准差β为单位进行度量。根据这个标

518

记，对于前面提出的问题而言，P_{FA}是

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma\sqrt{\mathcal{E}}}\right) = Q\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\mathcal{E}}}\ln(p_0/p_1) + \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\sigma}\right) \tag{13.27}$$

其中，第二个等式是在表达式中代入式(13.18)中的γ后推出的结果。

类似地，漏警条件概率$P_M = P('H_0'|H_1)$是位于均值为$\mathcal{E}$、标准差为$\sigma\sqrt{\mathcal{E}}$的高斯 PDF 分布下的γ左边尾部的部分。使用式(13.26)和式(13.25)，这区域是

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - Q\left(\frac{\gamma - \mathcal{E}}{\sigma\sqrt{\mathcal{E}}}\right) = 1 - Q\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\mathcal{E}}}\ln(p_0/p_1) - \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\sigma}\right) \\ &= Q\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{\mathcal{E}}}\ln(p_0/p_1) + \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\sigma}\right) \end{aligned} \tag{13.28}$$

注意，P_{FA}和P_M只依赖于二元假设的相对先验概率和信噪比$\mathcal{E}/\sigma^2$，或者说依赖于该信噪比的平方根。在这里所讨论的信号检测问题是基于约定的特殊环境下，作为时间函数的已知信号$s[n]$的变化，不会影响最佳检测准则的性能。这里只与信号的能量相关。在稍后将会看到对这个问题的修正，就会发现其中信号的形状确实是有影响的。

可以按照式(9.29)那样，计算全部可能输出结果的错误概率：

$$P_e = p_0 P_{FA} + p_1 P_M \tag{13.29}$$

因此错误概率值依赖于二元假设的相对先验概率和接收到的信号的 SNR。

作为一个简单的示例，考虑二元假设是等概率的特殊情况，因此有$p_0 = p_1$和$\ln(p_0/p_1) = 0$。于是

$$P_{FA} = P_M = P_e = Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\sigma}\right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\mathcal{E}/(8\sigma^2)}}{\sqrt{\mathcal{E}}/(2\sigma)} \tag{13.30}$$

其中，在这里已经调用了式(13.24)中的上界。因此随着 SNR 的增加，P_{FA}、P_M和总体错误概率P_e的下降速度要比指数方式更快一点。

13.2.3 匹配滤波

式(13.15)中的决策变量g是线性依赖于量测值$r[n]$的。这就允许g的值可以通过线

519

性时不变滤波器来计算，滤波器的输入是$r[n]$，输出$g[n]$是在适当时刻的采样，以形成想得到的值。特别地，考虑一个 LTI 滤波器，其单位采样响应为$h[\cdot]$，在任何时刻n的输出为$g[n]$，并由下面的卷积给出：

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]h[n-k] \tag{13.31}$$

如果在$n=0$时，对滤波器的输出进行采样，那么结果是

$$g[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]h[-k] \tag{13.32}$$

选择如下滤波器的单位采样响应：

$$h[-k] = s[k] \tag{13.33}$$

其中，$0 \leqslant k \leqslant L-1$。在$k$为其他值时，$h[\cdot]=0$。那么式(13.32)中滤波器的输出$g[0]$就变成

$$g[0] = \sum_{k=0}^{L-1} r[k]s[k] = g \tag{13.34}$$

其中，g是式(13.15)中定义的数据量，并且是用作阈值检验的。式(13.33)所示的滤波器的单位采样响应实际上就是目标信号的时间翻转。因此可以将滤波器说成是用于匹配目标信号的或者是目标信号的匹配滤波器。

将上述结果合在一起，一种独立同分布的高斯噪声中已知的、有限持续长信号的最佳检测器的实现可以按照图 13.3 的方式来构建。式(13.33)规定的匹配滤波器是反因果的。

对于最佳检测器的纯因果实现，必需将 $h[\cdot]$ 延时 L 步且相应的输出是在 L 步后被采样。后面章节应该经常会与“反因果”打交道，例如为了标记方便，会采用无移位的匹配滤波器。

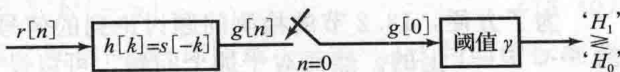


图 13.3　加性独立同分高斯噪声中的已知信号的最佳检测器

匹配滤波器的缩放　如果用一个正数 $K>0$，对匹配滤波器的单位采样响应进行缩放，那么前面定义的 $h[\cdot]$ 就变成了 $Kh[\cdot]$，于是滤波器在 0 时刻的输出将会是 Kg，而不是简单的 g。由式(13.17)可以表明，在进行检测处理时，只需要进行一点修正，那就是把阈值从 γ 调整到 $K\gamma$ 即可。这样做的根本原因是在二元假设下，随机变量 G 的均值之间的距离也进行了 K 倍缩放，并且有一样的标准差。由于滤波器单位采样响应的缩放，使得阈值也进行了同样倍数的缩放，因此在检测性能上并没有变化。

520

匹配滤波器的性能　在前面推导匹配滤波器时，是将它当作了生成变量 g 的设备。通过数据量 g 与阈值进行比较，得出在量测值中是否出现目标信号的最佳判决。通过对滤波器的时域特性和频域特征的进一步考察，可以得到对用匹配滤波器进行判决的深入理解，明白为什么匹配滤波利用其采样之前的量测值进行滤波，以及进行阈值比较来在二元假设之间做出判决，这些都是很合理的方式。

假如无噪声信号 $s[n]$ 作为滤波器的输入，与滤波器是匹配的。用 $\overline{g}[n]$ 来表示无噪声情况下的滤波器输出，n 时刻的输出由下列表达式给出：

$$\overline{g}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s[k]s[k-n]=\overline{R}_{SS}[n] \tag{13.35}$$

在写第二个求和项时，假设对于区间 0，1，2，…，$L-1$ 外的 j 取值有 $s[j]=0$。当 $s[n]$ 应用到匹配滤波器中，滤波器的输出是 $s[\cdot]$ 的自相关函数 $\overline{R}_{SS}[n]$。$\overline{R}_{SS}[n]$ 的峰值是信号 $s[n]$ 的能量 $\mathcal{E}$，并且发生在零时延处，

$$\overline{R}_{SS}[0]=\mathcal{E}>\overline{R}_{SS}[n],\quad n\neq 0 \tag{13.36}$$

匹配滤波器输出的最佳采样时刻是 $n=0$，基于的观点是，相对在接收到的量测值中噪声分量的贡献而言，在 $n=0$ 可以获得来自信号的最大贡献(如果目标信号出现)。噪声的贡献与什么时候进行采样无关。

接下来在频域中来考察匹配滤波器。对式(13.33)进行傅里叶变换，匹配滤波器的频率响应是

$$H(e^{j\Omega})=S(e^{-j\Omega})=|S(e^{j\Omega})|e^{-j\angle S(e^{j\Omega})} \tag{13.37}$$

其中，$|S(e^{j\Omega})|$ 是目标信号 $s[n]$ 的 DT 傅里叶变换(DTFT)。因此，匹配滤波器的频率响应的模 $|H(e^{j\Omega})|$ 等于目标信号的频谱分布(spectral distribution)的模 $|S(e^{j\Omega})|$。匹配滤波器因此增强了目标信号中较强频谱分量处的那些频率，并且衰减了目标信号中较弱频谱分量处的那些频率。这应该是合理的，因为考虑到全部 n 而不只是 $[0, L-1]$ 中的 n，已知的独立同分布噪声 $W[n]$ 具有平坦的频谱含量。

另一方面，式(13.37)表明匹配滤波器的频率响应的相位 $\angle H(e^{j\Omega})$ 是目标信号 DTFT 的相位 $\angle S(e^{j\Omega})$ 的负值。这使得目标信号出现时，匹配滤波器能校准目标信号各频率分量的相位，保证了在 0 时刻处采样的滤波器输出，是目标信号的全部分量建设性累加起来的结果。接收到的量测信号中噪声分量的频谱不受滤波器相位特征的影响。

521

13.3　匹配滤波器检测的推广

前一节中的信号检测问题的原型可以用构架匹配滤波器结构的方法，推广到不同的检测方法中。下面的小节将简单地讨论其中的一些推广。13.4 节会对检测问题的原型进行推广，对加性独立同分布高斯噪声下的多个已知观测信号进行识别，那里的解决方案会再次涉及匹配滤波。

13.3.1　无限长度的有限能量信号

为了方便，13.2 节的检测问题讨论到的信号 $s[n]$ 和量测值 $r[n]$ 都是定义在 $n=0$，1，2，…，$L-1$ 上的。然而对于那个问题，可以设置选取任何其他有限长度为 L 的间隔的数据，在被选定的间隔以外，将 $s[n]$ 定义为 0。最佳方案仍然可以运用匹配滤波，即使用一个单位采样响应满足 $h[n]=s[-n]$ 的 LTI 滤波器。将 0 时刻处的滤波器输出的采样值与阈值比较，并做出判决，这做法和以前的一样。

13.2 节中已经简要指出，匹配滤波器的单位采样响应的另外一种选择是 $h[n]=s[-n+D]$，其中 D 是某个固定时移，相应地，这个移位匹配滤波器的输出是在时刻 D 采样，而不是在 0 时刻。对于有限长信号，D 大小的选择总是使时移后的匹配滤波器为因果的滤波器。

在加性独立同分布的高斯噪声中，对于最小错误概率信号检测的匹配滤波器方法的推导，其适用于任意长的 L，并且人们感兴趣的间隔可以是时间上的任意位置。然而不太明显的是，该结果也适用于无限长信号 $s[n]$ 的情况，这里假设信号 $s[n]$ 具有有限能量 $\mathcal{E}$，这就意味着它是一个 ℓ^2 信号。在这里没有试着进行严格的论证，只是简单地接受了这个推广。在这种情况下，匹配滤波器的单位采样响应 $h[\cdot]$ 将会是无限长度的，而且，通常也不会有使它变成因果的时间移位。

13.3.2　白噪声中信号检测的 SNR 最大化

在 13.2 节的信号检测问题中，噪声是独立同分布高斯的事实，允许详细描述最小概率检测问题的检测方法。同时也允许这个方法的一个简单的实现：将量测值通过匹配滤波器进行 LTI 处理，接着进行采样，最后进行阈值判决。另外，它保证了在每种假设下匹配滤波器的采样输出都是高斯的，因此该方法可以用每种假设下的均值和方差来完整地表征。对于已确定的均值和已确定的相同的方差，就可以直接进行错误概率的计算，这个错误概率依赖于 SNR 和二元假设的先验概率。

522

现在假设接收到的量测值中噪声分量是来自于强度为 σ^2 的(零均值)白过程，但是白过程的其他特性是未知的。一个均值是 0 和方差是 σ^2 的独立同分布的高斯过程只是这类噪声的无数种产生方式中的一种。在没有这种噪声的更加详细的描述情况下，评估和实现最小错误概率检测的 MAP 准则一般是不可能的，但是可以借用高斯情况下性能卓越的检测器结构。换句话说，就是借助如图 13.4所示的检测结构，通过良好选择单位采样响应 $h[\cdot]$ 来设计 LTI 检测滤波器，以进行处理，然后进行采样和阈值判决。这里假设正在检验的目标信号 $s[n]$ 可能是无限长的，正如 13.3.1 节所允许的那样。

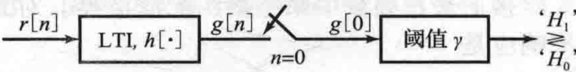


图 13.4　基于作用于接收信号的 LTI 滤波器的采样输出，进行阈值判决的检测器结构

为了实现这一想法，考虑出现在 0 时刻的样本输出的数据量 $g[0]$，即

$$g[0]=\sum_{-\infty}^{\infty} r[n]h[-n] \tag{13.38}$$

它被看作某个随机变量 G 的一个真实值。虽然在没有噪声 PDF 更详细的信息说明的前提下，每个假设下的 G 的 PDF 是不能确定的。但是每个假设下 G 的均值和方差可以用已知量来计算。这种计算需要确定式(13.38)中的序列 $r[n]$ 在每个假设下可以取什么值，并且需要注意 $g[0]$ 是 $r[n]$ 这些量测值的线性加权和，其加权系数是 $h[-n]$。这样可以推导出在 H_0 下，G 的均值是 0。不过在 H_1 下，均值是

$$\mu=\sum_{-\infty}^{\infty} s[n]h[-n] \tag{13.39}$$

为了简化接下来的讨论，但又不失一般性，可以假设 μ 是正的，而不是负的。

523

由表达式(13.38)可以简单地计算出G在每种假设下的方差：

$$\sigma_g^2 = \sigma^2 \sum h^2[-n] \tag{13.40}$$

在假设为H_0和H_1情况下，G的均值之间的间隔(即距离$\mu-0=\mu$)比共同的标准差σ_g要大，那么可以期望基于这个间隔能相当好地区别在假设H_0H_1下分别获得的采样$g[0]$。比如利用基本概率的切比雪夫不等式(Chebyshev inequality)，该不等式阐明了在假设H_0下，$g[0]$到它的零均值的距离大于$C\sigma_g$(左右两个方向)的概率小于$1/C^2$，并且这个概率可能会更小，因为切比雪夫不等式一般是相当保守的。同样地，在假设H_1下，$g[0]$到它的均值μ的距离大于$C\sigma_g$的概率小于$1/C^2$。因此可假设比值μ/σ_g越大，那么基于$g[0]$的量测值来区分H_0和H_1的能力就越好。

正如μ和σ_g依赖于滤波器单位采样响应$h[\cdot]$一样，分别根据式(13.39)和式(13.40)，找出使μ/σ_g最大的$h[\cdot]$，或者等价地找出使它的平方最大化的$h[\cdot]$。定义滤波器输出端的SNR为

$$\mathrm{SNR_{out}} = \frac{\mu^2}{\sigma_g^2} = \frac{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} s[n]h[n]\right)^2}{\sigma^2 \sum h^2[-n]} \tag{13.41}$$

之所以称其为SNR，原因是μ^2反映了信号的能量，而σ_g^2反映了噪声的功率或强度。注意在一般情况下，使输出SNR最大化不一定能最小化错误概率，除了在高斯情况下。使式(13.41)中的SNR最大化，这很容易实现，可以通过调用切比雪夫不等式来实现。接下来就来阐述并证明该不等式。

柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式 对于实ℓ^2函数$x[n]$和$y[n]$，切比雪夫不等式是

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]y[n]\right)^2 \leqslant \left(\sum_{-\infty}^{\infty} x^2[n]\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty} y^2[n]\right) \tag{13.42}$$

当且仅当$y[n]=Kx[n]$，等号成立，对于全部的n和某个常量K。对于函数只在某个间隔上是非零的情况，此不等式就简化为这样一句话：在实欧几里得空间中，两个向量的内积或点积的模以各个向量长度的乘积为界，并且当仅当这两个向量是正负对齐的时候等号才成立。一般情况下，该不等式的直接证明来自于下列计算：

524

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] - y[n])^2 \geqslant 0 \tag{13.43}$$

对于全部的实α。将其展开可以得到：

$$\underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} x^2[n]\right)}_{a}\alpha^2 - \underbrace{\left[2\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]y[n]\right]}_{b}\alpha + \underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} y^2[n]\right)}_{c} \geqslant 0 \tag{13.44}$$

这是关于α的二次函数，即$a\alpha^2-b\alpha+c$，因为$a>0$，对于大的$|\alpha|$，它是非负的。只有在$b^2\leqslant 4ac$的条件下，才能保证该二次方程最多有一个实根，从而满足对于全部的α，它都是严格非负的。用式(13.44)中的定义来替代不等式$b^2\leqslant 4ac$中的a、b和c，就得到式(13.42)中的柯西-施瓦茨不等式。又因为当仅当二次方程等于0时，即对于某个$a=K$，才有$b^2=4ac$。因此，式(13.43)表明只有当$y[n]=Kx[n]$时，才会精确地相等。

现在回到选择式(13.41)中的单位采样响应$h[\cdot]$，使得输出SNR最大的问题上来。运用切比雪夫不等式：

$$\mathrm{SNR_{out}} = \frac{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} s[n]h[-n]\right)^2}{\sigma^2 \sum h^2[-n]} \leqslant \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} s^2[n]}{\sigma^2} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}\,\mathrm{SNR_{in}} \tag{13.45}$$

其中，$\mathcal{E}$和以前一样，表示目标信号的能量。对于某个K，当且仅当$h[-n]=Ks[n]$时，上面等号成立。在不失一般性下，可以将K取值为1，因此，最佳滤波器还是匹配滤波

器。进行匹配滤波时，滤波器输出端的采样可以获得最高可能的 SNR，其等于输入信号的 SNR，即$\mathcal{E}/\sigma^2$。

在没有关于噪声的 PDF 的进一步信息时，对于匹配滤波器的采样输出，几乎没有什么依据来指导判决阈值 γ 的选择。但是，如果匹配滤波器能够有效地从假设 H_1 下 $g[0]$的分布中，把假设 H_0 下 $g[0]$的分布分离出来，那么将阈值设定在两个条件分布的均值中的某个位置可能是合适的，例如直接设置在 $\mu/2$ 处。

于是，匹配滤波器可以简单地看成一个设备，用来将一个 LTI 检测滤波器采样输出的 SNR 最大化，即使在只知道噪声是白的且可能是非高斯的情况下。在高斯白噪声情况下，匹配滤波器(此时能正确选择采样输出进行判决的阈值)可以实现错误概率最小。

13.3.3 有色噪声中的检测

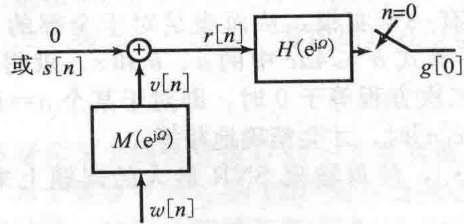
现在来考虑存在下列噪声的检测问题，它不是一个白过程噪声 $w[n]$，而是一个零均值、广义平稳的过程 $v[n]$，其谱密度函数由 $D_{vv}(e^{j\Omega})$给出。如果考虑到有色噪声是由强度为 σ^2 的白噪声过程 $w[n]$通过一个频率响应是 $M(e^{j\Omega})$的、稳定的成型滤波器来获得的，那么

$$D_{vv}(e^{j\Omega}) = \sigma^2 M(e^{j\Omega})M(e^{-j\Omega}) \tag{13.46}$$

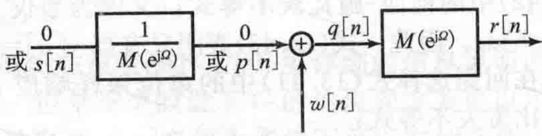
因此，$\sigma D(e^{j\Omega})$是 $D_{vv}(e^{-j\Omega})$的频谱因子。这里假设 $M(e^{j\Omega})$在全部频率上是非零的，也就是说 $D_{vv}(e^{j\Omega})$在全部频率上是非零的。如果不是这种情况，在接收到的量测值中就可能存在没有噪声的频率分量，这会导致检测算法的退化。还要注意到一般是假设白噪声 $w[n]$具有单位强度，而成型滤波器能够按照任何要求进行缩放来获得所要求的噪声强度。这里假设 $w[n]$是强度为 σ^2 的噪声过程，只是为了便于与先前叙述的强度为 σ^2 的白噪声情况，在表达式上进行更多简单的比较。

如果潜在的输入白噪声过程 $w[n]$的确是零均值独立同分布的高斯噪声，那么通过成型滤波器进行滤波获得的 $v[n]$过程就是有色的高斯噪声。它具有这样一些特性：例如在两个不同时刻上的取值是二元高斯的；更一般地，在任意一组时刻上的取值就是多元高斯的(multivariate Gaussian)。对于这种情况，下面建立的匹配滤波器的方法将会在匹配滤波器的输出进行合适的采样和阈值判决后，产生最小错误概率的决策。如果只知道过程 $w[n]$是白噪声的，那么下面的匹配滤波器方法将只能保证输出样本的 SNR 最大化，见 13.3.2 节。这些结论的正确性可用一种相反的方法，将有色噪声问题转换成其在处理前的白噪声问题来推断出。

这里再次希望在假设 H_0 和 H_1 之间做判决，H_0 表示接收到的量测值 $r[n]$仅由有色噪声$v[n]$构成，H_1 表示接受到的量测值由被加性有色噪声污染的已知信号 $s[n]$构成。这种情景由图 13.5a 中的框图说明，该框图也表明了接收到的信号 $r[n]$通过一个频率响应为 $H(e^{j\Omega})$的 LTI 滤波器滤波，然后经过采样，最终产生了与最佳检测准则中的阈值相比较的数据量 $g[0]$。



a）使用量测值$r[n]$来检测加性有色噪声$v[n]$中的信号$s[n]$



b）检测加性白噪声$w[n]$中的信号$p[n]$的等价问题，其中，$p[n]$是$s[n]$通过一个频率响应为$1/M(e^{j\Omega})$的滤波器的结果

图 13.5

通过将其转化为 13.2 节中已解决的问题，可以获得这个问题的最佳解决方法。第一步是将图 13.5a 框图中生成 $r[n]$的那部分转化为图 13.5b 中的等价框图。这个框图使潜在

的信号 $I[n]$变得明显。潜在信号 $q[n]$要么是强度为 σ^2 的白噪声，要么是被加性噪声 $w[n]$干扰的信号 $p[n]$。信号 $p[n]$是 $s[n]$通过一个频率响应 $1/M(e^{j\Omega})$的滤波器的结果。

这个已经转化的问题的最佳解决方法已经在 13.2.3 节中讨论并确定了。它是通过与目标信号 $p[n]$匹配的滤波器对信号 $q[n]$进行处理，然后在 0 时刻采样，并且与适当的阈值进行比较。在图 13.5 所示的系统中，采样之前的信号 $q[n]$是经过由 $M(e^{j\Omega})$和 $H(e^{j\Omega})$的级联组合的滤波器滤波来表现的，如下所示：

526

$$H(e^{j\Omega})M(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) = \frac{S(e^{-j\Omega})}{M(e^{-j\Omega})} \tag{13.47}$$

其中，$S(e^{j\Omega})$表示原信号 $s[n]$的变换。因此理想最佳滤波器的频率响应由下式给出：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{S(e^{-j\Omega})}{M(e^{j\Omega})M(e^{-j\Omega})} = \frac{S(e^{-j\Omega})}{D_{vv}(e^{j\Omega})/\sigma^2} \tag{13.48}$$

这是对于有色噪声的匹配滤波器的频率响应。对于早期分析的白噪声的结果，可设置式(13.48)中的最后一项 $D_{vv}(e^{j\Omega})=\sigma^2$ 来得到。

式(13.48)给出的这个广义匹配滤波器频率响应的模，是由处于分子位置上的信号频谱的模$|S(e^{j\Omega})|$和处于分母位置上的噪声的 FSD(这里的 FSD 经过了白噪声的强度 σ^2 归一化)共同确定的。正如在白高斯噪声的情况中的那样，检测滤波器在输入信号 SNR 大的频率处具有最高的模响应，而在输入信号 SNR 小的频率处具有最低的响应。广义匹配滤波器的相位特征仍然是目标信号相位特征的负数。噪声对相位特征不起作用，因为 FSD $D_{vv}(e^{j\Omega})$的相位在全部频率上是 0。

运用早期的结果可以表明，在这里建立的最佳解决方法的性能，是由被预滤波的信号 $p[n]$的能量和白噪声 $w[n]$的方差 σ^2 的比值决定的。记信号 $p[n]$的能量为$\mathcal{E}_p$，所以系统的性能由下列比值确定。当 $w[n]$是高斯白噪声时，用错误概率来描述系统性能；或在其他白噪声情况下，用输出采样的 SNR 来描述系统性能。

527

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\sigma^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|P(e^{j\Omega})|^2}{\sigma^2}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|S(e^{j\Omega})|^2}{D_{vv}(e^{j\Omega})}d\Omega \tag{13.49}$$

其中，在推写第一个等式时使用了帕塞瓦尔定理，然后使用了式(13.46)和式(13.47)进行变量替代。如果噪声 $v[n]$是强度是 σ^2 的白噪声，那么 $D_{vv}(e^{j\Omega})=\sigma^2$，于是就覆盖了前面已经讨论过的解决方法。

式(13.49)表明，不同于白噪声的处理情况，信号现在的形状会影响性能。粗略地讲，在噪声强度最小的频率区域的附近集中信号能量，会使先前等式中的积分变大，从而导致检测的性能改善。但是在很多应用场景中，传输的信号受限于许多其他方面，例如它的峰值振幅和持续时间等。因此这时的任务就是在这些限制下选择 $s[n]$，使得它的傅里叶变换能保证式(13.49)中的积分达到最大。对于这样的最优化问题，通常没有闭形式解(即解析表达式)

13.3.4 CT 匹配滤波器

到目前为止，关注的都是 DT，而不是 CT 的信号检测，主要因为 CT 的白噪声是一个理想化的信号，它要比 DT 的白噪声或者 CT 的单位冲激更难想象。例如，CT 白噪声中的期望功率在每个时刻上都是无限的。不过只需要简单的变化，就可以把在 13.3.3 节中建立的 DT 有色噪声的情况移植到 CT 上来。

例如，考虑一个零均值 CT 的 WSS 噪声过程 $v(t)$，其 FSD 由 $D_{vv}(e^{j\Omega})$给出。根据假设 H_0 或者假设 H_1，决定是否加上一个已知的能量有限信号 $s(t)$，产生量测信号 $r(t)$进行处理，其目的是判决是哪一个假设发生。假设依然采用通过某个冲激响应为 $h(\cdot)$且频率响应为 $H(j\omega)$的检测滤波器来处理$r(t)$，接着采样这个滤波器在时刻 0 时的输出 $g(t)$，最后比较采样值和阈值进行判

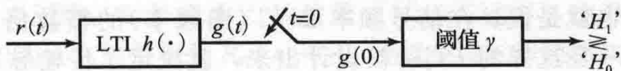


图 13.6 CT 信号检测

决，处理结构如图 13.6 所示。

在此情景下，这个数据量为

$$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h(-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13.50}$$

528

这是随机变量 G 的一个真实值。随机变量 G 在假设 H_0 下的期望值为 0，而在假设 H_1 下的期望值为

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{13.51}$$

随机变量 G 在每一个假设下的方差相同，表达式为

$$C_{gg}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2 D_{ww}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{13.52}$$

现在可以用一种自然的方式来定义输出的 SNR，它为二元假设下的两个均值之间的距离的平方，再除以共同的方差：

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} S(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2 D_{ww}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega} \tag{13.53}$$

上面问题的公式化表示与 13.3.2 节中的处理非常相似，虽然现在是在频域中，涉及的是积分运算而不是求和运算。通过使用适当形式的柯西-施瓦茨不等式，可以得到解决方法。这个问题的 DT 版本已经在 13.3.3 节得到了解决，它通过噪声白化使用了不同的变量。所以这里就简单地描述一下 CT 的解决方法，类似于式(13.48)，有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{S(-\mathrm{j}\omega)}{D_{ww}(\mathrm{j}\omega)/\sigma^2} \tag{13.54}$$

其中，σ^2 被解释为任意正参数，在设置值阈值 γ 时需要考虑它的具体值。将上式代入式(13.53)，可以推出最佳输出采样 SNR，由下式给出：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(\mathrm{j}\omega)|^2}{D_{ww}(\mathrm{j}\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{13.55}$$

这个表达式就是式(13.49)在 CT 情况下的类似描述。

13.3.5　匹配滤波和奈奎斯特脉冲设计

第 3 章在假设没有噪声的场景下，给出了用于脉冲幅度调制(PAM)的零符号干扰(ISI)的奈奎斯特脉冲设计。3.2 节阐述了即使在有噪声存在的情况下，接收机中的脉冲成形部分的研究还是令人满意的结论。到了本小节，可以对这一点进行更好的理解。

考虑一个开关信号方案(on-off signaling scheme)，在该方案中，对于每个比特而言，脉冲要么被传输，要么不被传输。在接收端，希望检测出被传输的脉冲是否会出现。如果傅里叶变换为 $P(\mathrm{j}\omega)$ 的脉冲经过一个频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)$ 的基带信道，那么接收机想要检测的脉冲的傅里叶变换就变成 $P(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$。假设信道引入加性白噪声，于是为了在脉冲出现时产生最大 SNR 的输出采样，匹配此脉冲的最佳接收机滤波器应该具有的频率响应为 $H(-\mathrm{j}\omega)P(-\mathrm{j}\omega)$。

529

这里假设在接收端已经实现了匹配滤波器，那么对于接收机的零 ISI 传输脉冲的傅里叶变换 $P(\mathrm{j}\omega)$ 的设计，就是要求将经过信道滤波后的脉冲傅里叶变换送给接收机进行处理，即下列表达式能满足奈奎斯特的零 ISI 条件。

$$P(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)P(-\mathrm{j}\omega)=|P(\mathrm{j}\omega)|^2|H(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{13.56}$$

如果在通带内 $H(\mathrm{j}\omega)$ 是常量，那么数据量 $|P(\mathrm{j}\omega)|^2$ 就必须满足奈奎斯特零 ISI 条件，也就是说，在信号频率 $2\pi/T$(角频率)的整数倍处，它的周期性重复加起来应该是常量。一旦这样的 $P(\mathrm{j}\omega)$ 被设计出来，就决定了传输脉冲和接收机滤波器。因此，脉冲成形的任务是由发射机和接收机两者同等完成的。

13.3.6 未知的到达时间和脉冲压缩

在类似雷达或声呐的应用中，一个已知的信号脉冲要么是电磁波，要么是声波，从发射机传播出去。如果在传播路径中存在反射物，那么传播信号经过衰减和噪声的干扰后返回到接收机。如果没有反射物出现，那么在这个间隔内，接收机只是简单地测量噪声。用从开始发射到任何反射脉冲到达接收机的延时乘以信号传播的速度，可以确定反射物体的来回距离。这些应用中的传播信号都是CT的，但是下面的分析是将相应的CT波形按照常规采样率进行采样，以从DT信号的角度来分析表达。

雷达或声呐设备中的信号处理的任务是确定在某个时间窗内收到的量测值只由噪声信号构成，还是由反射信号加上噪声信号构成。假设噪声是独立同分布的高斯噪声，并且接收到的信号波形与发送出去的信号波形的不同之处在于幅值上有一个比例衰减因子α，在本质上，这里面临的就是前面研究的信号检测问题。最佳检测器将会使用一个用于匹配所发送的信号的匹配滤波器，只不过在幅值上进行了缩放(amplitude-scaled)，然后合适地选择阈值，进行比较判决。

在实际工作中，发送的信号在幅度上的上限是由发送功率的峰值决定的，所以为了达到更好的检测性能，唯一的方式是增加信号长度L来提升信号能量$\mathcal{E}$，也就是，通过发送一个长的脉冲。但是长的脉冲意味着下一个询问脉冲(interrogating pulse)一定会被相应地延迟。更重要的是，如果在发射脉冲的反射路径上，一个反射物与另一个反射物的距离很接近的话，那它的反射脉冲可能会和另一个物体的反射脉冲重叠，使得分辨这两个物体的能力(即认为它们是两个物体而不是一个)打折扣。下面将给出一种聪明的信号设计，可以大大地提高分辨率。

530

它与13.2节中考虑的信号检测问题至少有两个关键的不同之处。首先，如果存在一个反射信号的话，反射信号在时间上的位置是未知的，因为反射物的位置是未知的。结果就是，匹配滤波器的输出采样时刻就是未知的。其次就是衰减因子α是未知的，所以检测滤波器需要进行缩放(或者等价地，判决阈值需要进行缩放)，缩放因子也是未知的。

这两种问题的处理方法可以借鉴13.2.3节中的匹配滤波器特性的讨论。式(13.35)和式(13.36)的推导计算表明，如果匹配滤波器的输入是有延时的无噪声信号$s[n-D]$，其中D是延时，那么滤波器的输出可以由下式给出：

$$\overline{g}[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s[n-D]h[k-n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s[n-D]s[n-k]=\overline{R}_{\mathrm{ss}}[k-D] \quad (13.57)$$

因此，输出是接收到的信号的延时确定性自相关(the delayed deterministic autocorrelation)，当它的延迟参数为0时，即$k=D$时，$\mathcal{E}$的峰值才会出现。作为一种推论，对于接收的是无噪声信号的情况，由接收到的信号可以容易地推断出延时D的值，具体是通过观察匹配滤波器的输出在什么时刻达到最大。

如果接收的反射信号是被加性噪声干扰的情况，那么匹配滤波器在任何时刻的输出都会被噪声分量干扰。如果噪声不是很强，那么相对于无噪声的情况，匹配滤波器的输出不会被干扰得很严重，于是可以采样其最大输出值，并送去与所选择的阈值进行比较。在没有出现反射信号的情况下，采样值将只能反映出噪声分量，它通常会低于判决阈值。

如果信号和高强度噪声一起被接收，因为反射的信号分量被噪声分量所掩饰，相对于无噪声的情况，匹配滤波器的最大输出可能在不同的k值处发生。这将会导致采样时刻和采样值的错误选择。在强噪声情况中，如果没有出现反射信号，则仅由噪声也会导致匹配检测器的输出中出现尖峰，这会误解为有一个反射信号存在。

前面的这些考虑支持了执行所谓的脉冲压缩：对长度为L的信号$s[n]$进行成形，使得在$k\neq0$或者$k\neq0$的附近的某个小区域($\ll L$)内，它的自相关$\overline{R}_{\mathrm{ss}}[k]\ll\mathcal{E}$。也就是说，匹配滤波器输出集中到峰值上，或者近似一个峰值。这种情况下，即使信号被噪声干扰，$\overline{R}_{\mathrm{ss}}[k-D]$

最大的位置也将会被很好地保存。更进一步，在一个区域内若有一个比噪声干扰值大的多的最大值，就可以满足于判断一个潜在信号的出现，虽然信号的衰减因子不确定，会造成合适的阈值选择不确定。

531

一个在这方面表现得很好且被广泛使用的信号例子如下：

$$+A,+A,+A,+A,+A,-A,-A,+A,+A,-A,+A,-A,+A \tag{13.58}$$

它被称为巴克-13序列(Barker-13)信号，其两端用零扩充。该信号的自相关函数在零延时处的函数值是 $13A^2$，然而，在其他延时处的函数值是0或 A ㊀。实现脉冲压缩的另外一种流行的方式是通过使用所谓的线性调频(chirp)信号：一个准正弦(quasi-sinusoidal)信号，它的频率随着时间推移呈现线性扫频(swept linearly)，或者某个其他单调扫频形式。因为线性调频信号(chirp)可以看成由接近正弦的不同频率段构成的系列子区间信号，所得到的确定性自相关峰宽度会稍稍宽于每个频率段子区间的长度。

13.4　独立同分布高斯噪声中的信号识别

前面章节所考虑的二元假设下的信号检测问题可以轻松地推广到多元假设下。和以前一样，假设DT信号 $r[n]$ 的量测值($n=0,1,2,\cdots,L-1$)是一系列随机变量 $R[n]$ 的真实值。不过这里令 $H_i(i=0,1,\cdots,M-1)$ 表示多元假设，即变量 $R[n]$ 是 M 个已知的确定性信号中的第 i 个信号 $S_i[n]$ 加上了独立同分布的高斯噪声干扰的结果，所以

$$H_i: R[n]=S_i[n]+W[n] \tag{13.59}$$

这里再次约定，每种假设下的数据项 $W[n]$ 表示独立的、零均值的、方差为 σ^2 的高斯随机变量，假定 H_i 假设的先验概率是 $P(H_i)$。现在的任务就是根据量测值 $r[n]$，按照最小错误概率，判决哪个假设成立。这也可以认为是 M 种潜在信号的识别问题，即假设给出这些信号中的一个被噪声干扰后的量测值，选择出真正的潜在信号。

例如，上面的情况就可能出现在数字通信中。假设在一个指定时隙内，M 个符号中的某个符号被选定出来发送。各个符号映射成不同的信号波形，以便满足特定通信信道的传输特性。如果对应符号 i 的信号波形被传输，使用 $s_i[n]$，$n=0,1,2,\cdots,L-1$，来表示无噪声的情况下，在指定的时隙内可能接收到的量测值序列。假设在任意时刻，传输信道使用独立的、同分布的高斯噪声干扰信号。接收机的任务就是判决 M 个符号中的哪个符号真的被传输，前提是在特定的时隙内，接收机接收到的量测值为 $r[n]$，$n=0,1,2,\cdots,L-1$。这里的确是把信号识别任务作为假设检验问题提出来的。

532

为了达到最小错误概率，再次使用式(13.2)中的MAP准则。在这种情况下是比较

$$P(H_i)f(r[0],r[1],\cdots,r[L-1]\mid H_i) \tag{13.60}$$

的值 $i=0,1,2,\cdots,M-1$，并决定支持哪种假设会使该表达式有最大值。同样地，由于自然对数是关于它自变量的单调递增函数，可以改写上述表达式为对数形式：

$$\ln\{P(H_i)\}+\ln\{f(r[0],r[1],\cdots,r[L-1]\mid H_i)\},\quad i=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{13.61}$$

经过适当的替换，并舍弃式(13.61)中 M 个表达式中的相同项，那么只需要比较下面这些量，就可以简单地推断出最佳检测：

$$\left(\sum_{n=0}^{L-1}r[n]s_i[n]\right)+\sigma^2\ln\{P(H_i)\}-\frac{\mathcal{E}_i}{2},\quad i=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{13.62}$$

其中，$\mathcal{E}_i$ 表示第 i 个信号的能量，即

$$\mathcal{E}_i=\sum_{n=0}^{L-1}s_i^2[n] \tag{13.63}$$

在这种准则下，式(13.62)中的最大项，$i=0,1,2,\cdots,M-1$，决定着哪种假设被选择。

㊀ 应该是 A^2。——译者注

如果信号具有相等的能量和相等的先验概率，那么上述的比较可以简化，比较下列的值，最大值对应的信号被声明为

$$g_i = \sum_{n=0}^{L-1} r[n]s_i[n] \tag{13.64}$$

式(13.64)中的计算可以再次使用匹配滤波器来执行。然后将滤波器的输出在适当的时刻进行采样。

和前面信号检测情况中的做法一样，可以用几种方式对信号识别问题进行推广。特别是信号在全部时刻上都存在而不只是在区间[0, L−1]上存在的情况，只要它们是能量有限的。接下来的内容中将考虑更一般的情景，并忽略表达式中的求和范围限制。

例 13.2 独立同分布高斯噪声中的二进制信号识别

考虑只有两个可选信号的情况，这两个信号能够在加性独立同分布高斯噪声中区分出彼此。这是前面结果中 $M=2$ 的一种特殊情况。最佳检测就变成

533

$$\left(\sum_n r[n]s_1[n]\right) + \sigma^2 \ln p_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{2} \underset{`H_0'}{\overset{`H_1'}{\gtrless}} \left(\sum_n r[n]s_0[n]\right) + \sigma^2 \ln p_0 - \frac{\mathcal{E}_0}{2} \tag{13.65}$$

其中，$p_0 = P(H_0)$和 $p_1 = P(H_1)$，和以前的约定一样，进一步写成

$$g = \sum_n r[n](s_1[n] - s_0[n]) \underset{`H_0'}{\overset{`H_1'}{\gtrless}} \sigma^2 \ln(p_0/p_1) + \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{2} = \gamma \tag{13.66}$$

左边的数据量将是用来计算差信号 $s_1[n] - s_0[n]$的检测，并且通过使用一个与差信号相匹配的滤波器来获得，也就是说，滤波器的单位采样响应为 $h[n] = s_1[-n] - s_0[-n]$。

上面判决准则的性能分析可以精确地计算出来，像13.2.2节描述的那样，通过考查下列随机变量在二元假设下的分布：

$$G = \sum_n R[n](s_1[n] - s_0[n]) \tag{13.67}$$

在这样做之前，先引入一个数据项符号，标记在分析中出现的

$$\chi = \sum_n s_0[n]s_1[n] \tag{13.68}$$

根据式(13.42)中的柯西-施瓦茨不等式，可以写出

$$-\sqrt{\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1} \leqslant \chi \leqslant \sqrt{\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1} \tag{13.69}$$

其中，对于某个正数 K，如果 $s_0[n] = Ks_1[n]$，可以得到数据项的上界，其一定等于 $\sqrt{\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1}$；对于这个相同的 K，如果 $s_0[n] = -Ks_1[n]$，可以获得数据项的下界。

在假设 H_0 下，式(13.67)中的随机变量 G 是高斯的，均值为 $-\mathcal{E}_0 + \chi$，方差为 $\sigma^2 \mathcal{E}_d$，其中，$\mathcal{E}_d$ 是差信号的能量：

$$\mathcal{E}_d = \sum_n (s_1[n] - s_0[n])^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 - 2\chi \tag{13.70}$$

在假设 H_1 下，随机变量 G 也是高斯的，均值为$\mathcal{E}_1 - \chi$，方差为 $\sigma^2 \mathcal{E}_d$。这就又回到前面讨论过的评估假设检验性能的熟悉的任务上来。此时使用特定阈值 γ 将两个方差相等但均值不等的高斯信号进行分离。在这种情况下，阈值由式(13.66)的右边给出。

来考虑两种特殊情况。对于全部的 n，如果 $s_0[n]$是零信号，而 $s_1[n] = s[n]$。回顾一下13.2节所考虑的问题，即在独立同分布的高斯噪声中检测一个已知信号。在数字通信领域中，这将对应于开关信号，信号 $s[n]$的出现代表二进制数字1，而它的不出现代表二进制数字0。这里的表达式就可以近似地简化成前面讨论所获得的那些表达式。如果二元假设是等概率的，于是 $p_0 = p_1$，那么错误概率可以再次由式(13.30)给出，即

534

$$P_{\text{on-off}}=Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\sigma}\right) \tag{13.71}$$

对于另外一种特殊情况，假设这两个信号有相等的能量(即$\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=\mathcal{E}$)为某个固定的特定值。同时假设二元假设的先验概率相同，也就是说$p_0=p_1$。在这些条件下，阈值γ是0。此时$P_{\text{FA}}=P_{\text{M}}=P_{\text{e}}$，所以错误概率是

$$P_{\text{e}}=Q\left(\frac{\mathcal{E}-\chi}{\sigma\sqrt{\mathcal{E}_d}}\right)=Q\left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}-\chi}}{\sigma\sqrt{2}}\right] \tag{13.72}$$

其中，第二个等式由式(13.70)获得。

现在考虑允许自由选择$s_0[n]$和$s_1[n]$，只要满足它们各自的能量等于某个给定的常数值$\mathcal{E}$。那么要达到最小的错误概率，就取决于所选择的这些信号能使上述$Q(\cdot)$函数的变量参数达到最大。注意式(13.69)中的上下界，可以合理选择信号来达到上下界。通过选择$\chi=-\sqrt{\mathcal{E}_0\ \mathcal{E}_1}=-\mathcal{E}$，就可以达到错误概率最小化，也就是通过设置对于所有的n满足$s_1[n]=-s_0[n]$，来获得最小错误概率。这就产生了所谓的二极性信号或反相信号。注意在发射端反相信号即使具有与开关信号情况下一样的峰值功率，但是其平均功率和每比特的平均能量确实是加倍的(至少在$p_0=p_1=0.5$时)。

因此可以推得反相信号对应的错误概率为

$$P_{\text{antip}}=Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sigma}\right) \tag{13.73}$$

对于开关信号的情况，其中，$s_0[\cdot]=0$，其错误概率$P_{\text{on-off}}$在式(13.71)中给出。反相信号相较于开关信号的情况，反相信号的作用使已经分开的两个同样强度的高斯信号的均值之间的距离加倍，从而使得函数$Q(\cdot)$的变量参数也加倍，有效的SNR增加四倍。因此，反相信号实质上能够得到比开关信号更好的错误性能。◀

接下来的例子更加具体地阐述了第3章讨论的PAM通信场景中，也是上述结论的应用。虽然那个问题是用CT叙述的，但是在数值模拟中还是DT的。

例13.3 采用匹配滤波器检测器检测开关型和反相型PAM

采用二进制DT信号$a[n]$来数值模拟CT通信中PAM的策略，来阐明本章的一些观念。在本例中，在给定的每一个单位时间的时隙内，其长度$T=1$，传送一个基本信号或者一个脉冲$p(t)$。基本信号定义为一个矩形信号，即对于某个$A>0$，$p(t)=A$，$|t|<T/4$，是位于时隙中间，占时隙的一半，在其他时刻$p(t)=0$。全部的PAM信号都是由这样的脉冲串联构成的，第n个脉冲$p(t-nT)$在第n个时隙内被传输，其幅度由信号$a[n]$进行缩放。因而PAM信号可表示为

$$x(t)=\sum_n a[n]p(t-nT) \tag{13.74}$$

对于开关信号，$a[n]$是0或1，而对于反相信号，$a[n]$是+1或-1。这里假设在每种情况下，这两种电平都是等电平的。反相信号蕴含和开关信号一样的峰值功率，但是希望它能提供更好的噪声容限，尽管这是以比较高的平均功率为代价。这个例子忽略了通信信道的失真，而聚焦到处理噪声的影响。在每个时隙内，接收机不得不基于接收到的噪声波形(noisy waveform)，来判决两个可能的信号值中哪一个信号值被发送。

535

图13.7上面的两个子图概要地显示了如何通过发送一个合适的冲激串到一个冲激响应为$p[t]$的滤波器，来产生无噪声的PAM信号。这里的PAM信号对应于图顶部显示的13比特序列的开关信号，选择幅度A=1。时间轴表示采样数，100个采样对应于CT中的一个单位时间。

在数值模拟中，假设CT中的加性宽带高斯噪声是在DT采样时刻产生的独立同分布的、强度为σ^2的高斯噪声。图13.7中的第三个子图包含和第二子图一样的PAM信号，然后加上了$\sigma=3.5$的高斯噪声再一起显示。可以认为噪声淹没了该信号，几乎没有线索

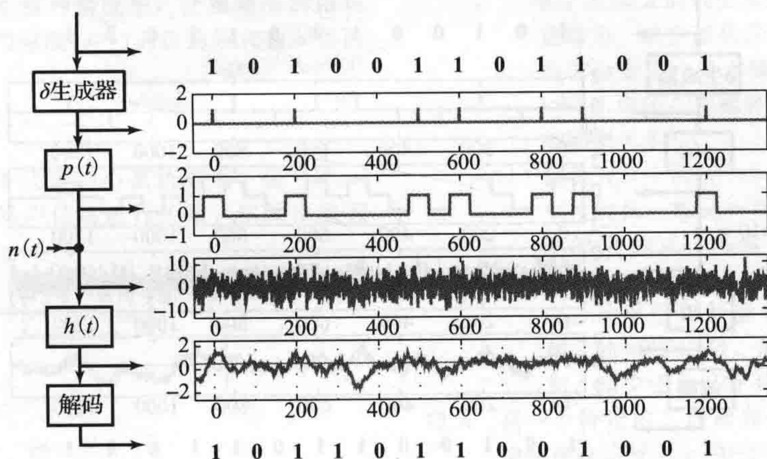


图 13.7　开关信号的二进制检测

能够判断出 PAM 信号。如果不做任何噪声滤波，相反，只是在每个 T 时间单位上进行采样，并与门限 $A/2=0.5$ 进行比较，这不会比进行随机判决有更好的检测效果。根据本章前面的分析，表明对于这种情形的错误概率是 $Q(A/(2\sigma))=Q(1/7)=0.443$。

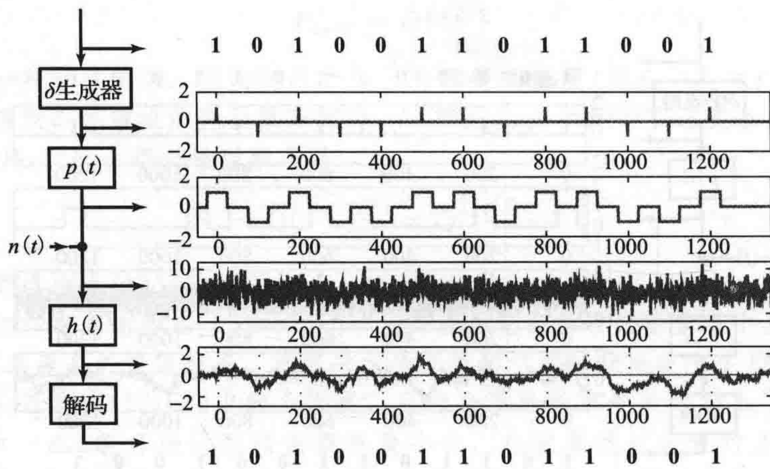
认识到在这个例子中，不同时隙的判决是相互独立的，判决构成了伯努利过程(a Bernoulli process)，且错误的数量服从二项分布。因而，13 比特中错误比特的期望数为 $0.443\times13=5.76$ 比特，可以计算标准差为 $\sqrt{13\times0.433\times(1-0.433)}=1.79$ 比特。

在图 13.7 底部的子图显示了使用一个关于接收到的信号的匹配滤波器滤波的结果。在 CT 中，匹配滤波器的冲激响应在每个时隙内是 $h(t)=p(-t)$。由于 $p(t)$ 是一个矩形脉冲，仅在 0 附近、长度为 $T/2$ 的区间上是非零的，相应的匹配滤波器的作用就是一个窗口的积分，有时称为矩形积分(boxcar integration)。或是说接收到的信号通过一个长度为 $T/2$ 的窗滑动平均，匹配滤波器的输出在每个时间单位 T 上采样。匹配滤波器在这些采样时刻上的输出积累了相应比特时隙内的、潜在的 PAM 信号的影响，同时对噪声进行了平均(消除了部分噪声影响)，从而相对直接采样，提高了接收信号的 SNR。这里的 DT 模拟器参照阈值缩放后的大小，对匹配滤波器进行了缩放(这里采用缩小版本)。图 13.7 底部子图的比较阈值为 0.5 的水平线处。536

在这个模拟中，经过解码的 13 比特二进制序列中，有 2 比特错误。考虑到信号是一个长度为 50 个采样周期的脉冲，式(13.71)给出了针对开关信号的错误概率 $Q(\sqrt{50}/(2\times3.5))=0.156$，因此 13 比特中错误比特的期望数是 $0.156\times13=2.03$ 比特，对应的标准差是 1.31 比特，这与观察到的结果相符合。

图 13.8 显示了采用反相信号而不是开关信号时的相应结果。基于图 13.7 中的比特序列，图 13.8 顶部两个子图描述所传输的 PAM 波形的生成，第三个子图显示了包含有加性噪声的接收信号。尽管反相信号的两个电平之差是开关信号中的两倍，但是噪声仍然掩盖了潜在的信号。这里同样不能期望将每个比特时隙内的噪声信号的一个采样与阈值 0 进行比较，来得到一个好的检测结果。这种直接方式的错误概率是 $Q(A/\sigma)=Q(1/3.5)=0.388$，13 比特中错误比特的期望数是 $0.388\times13=5.03$ 比特，对应的标准差是 1.76 比特。

反相信号情况下的匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 等于两个目标信号 $p(t)$ 和 $-p(t)$ 的差。这里再次使用匹配滤波器执行接收信号在长度 $T/2$ 的区间上的窗口积分。匹配滤波器输出的结果经过尺度变换后显示在图 13.8 底部的子图中。基于该结果，解码后的二进制序列恰好没有错误比特。式(13.73)给出了反相信号下的错误概率 $Q(\sqrt{50}/3.5=0.022)$，所以 13 比特中的错误比特的期望数是 $0.022\times13=0.28$，对应的标准差是 0.53 比特。



537

图 13.8 反相信号的二进制检测

在表 13.1 中总结了这个例子中的反相信号和开关信号的结果，表中显示出了使用匹配滤波的优点。◀

表 13.1 计算例 13.3 中 PAM 信号的误比特率

	无匹配滤波器	有匹配滤波器
开关信号	0.443	0.156
反相信号	0.388	0.022

13.5 延伸阅读

诸如雷达的应用催生了信号检测理论的很多发展，这在早期经典文献[Wod]和较近期的文献[Rch]和[Sko]中进行了探讨。同样地，声呐和通信系统也促进信号检测理论的发展。不过，在这些领域中建立的信号检测的理论公式、处理手段和定义的术语，已经广泛地扩展到其他领域中。在第 7～12 章中，从作为 WSS 过程、功率谱密度和信号估计这几个内容的文献引用中，也可以查到信号检测的内容。主要讨论信号检测的书籍包括[He2][He3][Kay3][Lev]和[McD]。对于切比雪夫不等式的令人着迷的探究和应用，可以参见[Ste]。

538

习题

基础习题

13.1 这个问题参考了例 13.1 所描述的环境。

(a) 证明那个例子所得结论，在二元假设中基于 $\boldsymbol{X}$ 的两个独立量测值的平均来进行最佳判决，产生的错误概率与只采用一个量测信号值进行判决的一样。

(b) 对于 X 的 K 个独立量测值情况，其最佳判决准则是什么，相应的错误概率是什么？

13.2 考虑下面的信号检测问题，基于二元假设 H_0 和 H_1 的接收信号的量测值为

$$H_0：r[n]=-s[n]+v[n]$$
$$H_1：r[n]=s[n]+v[n]$$

其中，$s[n]$是一个已知脉冲，噪声采样值$v[n]$是独立的、零均值的高斯随机变量，方差为 σ^2。在接收端采用如图 P13.2 所示的处理策略。

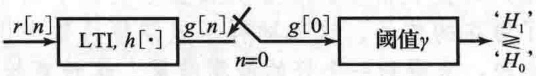


图 P13.2

这里的 $h[\cdot]$是 LTI 系统的单位采样响应，γ 是一个常量。假设脉冲 $s[n]$由 $s[n]=2\delta[n]-\delta[n-1]$给出。

确定单位采样响应 $h[n]$和使错误概率最小的 γ 值。首先分析 H_0 和 H_1 是等概率的情况，其次分析 H_1 的概率是 H_0 的两倍

的情况。在每种情况中，计算相应的错误概率，请用标准 $Q(\cdot)$ 函数的形式表示你的答案

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$

13.3 图 P13.1-1 代表一个系统框图，信号 $d[n]$ 经过一个噪声信道进行传输，然后接收到信号 $r[n]$。

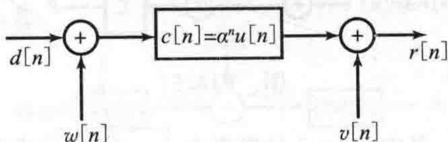


图 P13.3-1

反映信道的冲激响应的参数 α 是某个已知数，幅度小于 0.5。噪声过程 $w[n]$ 在每个时刻是均值为零、方差为 σ_w^2 的已知的高斯随机变量的采样值，并且这些值在不同时刻是相互独立的。换句话说，$w[n]$ 是零均值独立同分布高斯过程，其自相关函数 $C_{ww}[m]=\sigma_w^2\delta[m]$。噪声过程 $v[n]$ 也是零均值独立同分布高斯过程，独立于过程 $w[\cdot]$，并且在每个时刻的方差 σ_v^2 已知，即 $C_{vv}[m]=\sigma_v^2\delta[m]$。

对于任意时刻，信号可能是 0（假设 H_0），或者是单位采样函数（假设 H_1）：

$$H_1: d[n]=\delta[n] \quad P[H_1]=p_1$$
$$H_0: d[n]=0 \quad P[H_0]=p_0$$

就下面(a)和(b)指定的两种情况，你需要对每种情况设计一个接收机，将 $r[n]$ 作为输入，并且以最小错误概率在 H_0 和 H_1 之间进行判决。每种情况中的最佳接收机包含以下几步，如图 P13.3-2 所示：对 $r[n]$ 进行 LTI 滤波（有可能是非因果）；然后在某个适当的时刻 n_0 对滤波器输出 $g[n]$ 进行采样；再基于采样值相对于阈值 γ 的位置，判决支持假设 H_0 还是假设 H_1。

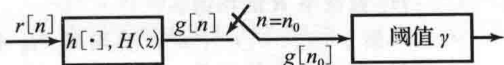


图 P13.3-2

因此，为了详细说明下面两种情况中每一种的最小错误概率接收机，你将需要明确：(i) 滤波器冲激响应 $h[\cdot]$ 或者系统函数 $H(z)$；(ii) 对滤波器输出 $g[n]$ 进行采样的时刻 n_0；(iii) 与采样值进行比较的阈值 γ；(iv)采样值大于和小于阈值时的判决结果分别是什么。

(a) 假设 $\sigma_w^2=0$ 和 $\sigma_v^2>0$，确定最小错误概率接收机。如果信道冲激响应是变化的，比如 α 的幅度加倍，那么错误概率是增加、减少还是保持不变？如果你认为它会变化，那么噪声方差 σ_v^2 必须乘以什么因子，才能将错误概率恢复到它的原来大小？

(b) 假设 $\sigma_w^2>0$ 和 $\sigma_v^2=0$，确定最小错误概率接收机。在 $\sigma_w^2=1$ 时，请给出错误概率的表达式，将这个错误概率写成式(13.23)所定义的标准 Q 函数的形式。如果信道冲激响应是变化的，比如 α 的幅度加倍，那么错误概率是增加、减少还是保持不变？

13.4 在一个特定的二进制通信系统中，有人对检测接收信号 $r[n]$ 中是否存在已知的脉冲 $s[n]$ 感兴趣。如果存在脉冲，接收到的信号就是 $r[n]=s[n]+v[n]$；如果脉冲不存在，接收到的信号就是 $r[n]=v[n]$。因此

$$H_0（脉冲出现）: r[n]=v[n]$$
$$H_1（脉冲不出现）: r[n]=s[n]+v[n]$$

以下是对 $v[n]$ 的了解：

(i) $v[n]$ 是一个 WSS 高斯随机过程，均值为 $\overline{v}$。等价地，$v[n]-\overline{v}$ 是单位方差、零均值、独立同分布的高斯噪声通过一个适当的 LTI 成型滤波器的结果，滤波器的单位采样响应为 $b[n]$，频率响应为 $B(\mathrm{e}^{j\Omega})$。

(ii) $R_{vv}[m]-\overline{v}^2=E\{(v[n+m]-\overline{v})(v[n]-\overline{v})\}=C_{vv}[m]=\frac{5}{2}\delta[m]+\delta[m-1]+\delta[m+1]$

(a) 找出产生上面 C_{vv} 中的 $b[n]$ 的一种选择。

(b) 假定 $\overline{v}=0$，确定对于 $v[n]$ 的白化滤波器的单位采样响应，即确定如图 P13.4-1 所示的 $h_w[\cdot]$，使得 $R_{ww}[m]=\delta[m]$。你的选择是唯一的吗？

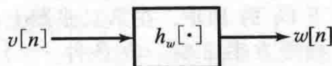


图 P13.4-1

将信号 $r[n]$ 按照图 P13.4-2 所示的那样进行处理。以下是对 $s[n]$ 和 $h[n]$ 的了解

(i) $s[n]=\delta[n]$

(ii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^2[n]=1$

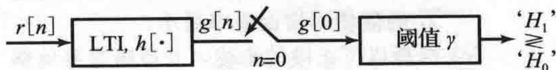


图 P13.4-2

(c) 假定 $\overline{v}=0$，在给定虚警概率的情况下，确定 $h[n]$ 的一种选择和相应的阈值 γ，

使得系统检测概率最大，并说明你的选择是否唯一。

(d) 现在假定 $\bar{v}=1$，计算出两种假设 H_0 和 H_1 下 LTI 滤波器的输出和 $g[n]$ 的均值。

(e) 对于 $\bar{v}=1$ 情况，重复(c)。

13.5 考虑一个 DT 的通信系统，在该系统中，两个确定信号中的一个经过一个噪声信道进行传送，接收信号 $r[n]$ 由下式给出：

$$r[n]=S_i[n]+w[n],\quad i=1 \text{ 或 } =2$$

过程 $w[n]$ 是独立同分布的高斯噪声，其均值为零，方差为 $\sigma_w^2=\frac{1}{2}$。两个脉冲信号 $s_1[n]$ 和 $s_2[n]$ 的先验概率都等于 1/2。这两个脉冲具有以下性质：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2^2[n]=1$$

和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[n]s_2[n]=\frac{1}{2}$$

考虑下面提出的两个接收机方案，如图 P13.5中所示。

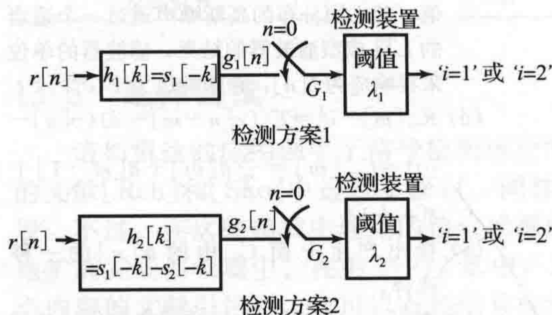


图 P13.5

(a) 在同一张图上画出采用检测方案 1 时，在条件 $i=1$ 下 G_1 的 PDF，在条件 $i=2$ 下 G_2 的 PDF。在第二张图上画出采用检测方案 2 时，在条件 $i=1$ 下 G_1 的 PDF，在条件 $i=2$ 下 G_2 的 PDF。在图 P13.5 所示的方案 1 中，G_1 的值和阈值 λ_1 比较，G_2 的值和阈值 λ_2 比较，即

$$G_1 \underset{`i=2'}{\overset{`i=1'}{\gtrless}} \lambda_1 \qquad G_2 \underset{`i=2'}{\overset{`i=1'}{\gtrless}} \lambda_2$$

(b) 确定 λ_1 的值使得错误概率最小；确定 λ_2 的值使得错误概率最小。

(c) 选择以下正确的论述，并清晰简要地解释你的理由。

(i) 检测方案 1 获得的错误概率比检测方案 2 低；

(ii) 检测方案 2 获得的错误概率比检测方案 1 低；

(iii) 检测方案 1 和检测方案 2 获得相同的错误概率。

13.6 图 P13.6 所示的通信系统中的传输信号是

$$s[n]=Ap[n]$$

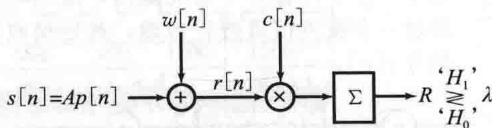


图 P13.6

其中，$A=0$ 的概率为 $\frac{1}{3}$，$A=1$ 的概率为 $\frac{2}{3}$。因此二元假设为

$$H_0: A=0$$
$$H_1: A=1$$

脉冲 $p[n]$ 具有单位能量，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p^2[n]=1$$

由信道引入的噪声 $w[n]$ 是零均值、独立同分布的高斯噪声，方差为 σ^2，与传输信号相互独立。

接收到的信号 $r[n]$ 是

$$r[n]=Ap[n]+w[n]$$

图 P13.6 中对接收信号进行处理的系统称为相关接收器，经常用于雷达和通信系统中。脉冲 $c[n]$ 是能量有限脉冲，在(c)中考虑它如何选择。由 Σ 表示的模块使计算数据量 R 定义为

$$R=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n]c[n]$$

检测器将对随机变量 R 进行阈值检验

$$R \underset{`H_0'}{\overset{`H_1'}{\gtrless}} \lambda$$

(a) 根据 $p[n]$、$c[n]$、σ^2，来确定 H_0 和 H_1 假设下 R 的均值。

(b) 根据 $p[n]$、$c[n]$、σ^2，来确定 H_0 和 H_1 假设下 R 的方差。

(c) 假设指定 $c[n]$ 的能量为某个数值 K。确定 $c[n]$ 的选择，使得下列表达式最大化。

$$(E[R|H_0]-E[R|H_1])^2$$

(d) 根据在(c)中对 $c[n]$ 的选择，对于适当选择的 $c[n]$，一定会使错误概率最小吗？重新给出错误概率表达式：

错误概率 $=P((`H_0',H_1)+P((`H_1',H_0)$

如果你的答案是肯定的，请给出说明，并根据指定的参数确定 λ。

高级习题

13.7 考虑如图 P13.7-1 所示的通信系统，等概率地取值 0 或 1 的二进制消息 m，经过编码形成 DT 波形 $s_m[n]$，这里

$s_0[n]=0$，　对于全部的 n

$s_1[n]=\sqrt{\mathcal{E}-a^2}$，$s_1[n]=a$　和　$s_1[n]=0$，其他

其中，$-\sqrt{\mathcal{E}}\leqslant a\leqslant\sqrt{\mathcal{E}}$，具体如图 P13.7-2 所示。这里的 ε 表示信号 $s_1[n]$的能量。

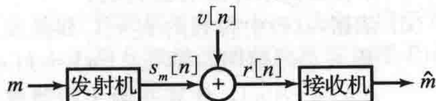


图　P13.7-1

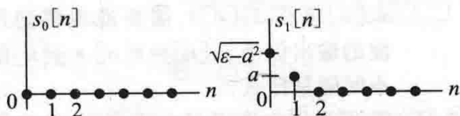


图　P13.7-2

接收机观测信号

$$r[n]=s_m[n]+v[n]$$

其中，$v[n]$是零均值的、WSS 有色的高斯噪声过程，它和信息 m 相互独立，相关函数为

$$R_{vv}[k]=E(v[n+k]v[n])=\begin{cases}\sigma_v^2, & k=0\\ \sigma_v^2/4, & k=\pm1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

你可以将有色高斯过程考虑成一个独立同分布高斯过程的 LTI 滤波结果。在这个问题中，你将需要用到这样一个事实，高斯过程采样的每个线性组合产生一个高斯随机变量。

假设接收机按照如图 P13.7-3 所示的形式来构建。在这里 LTI 滤波器的冲激响应 $h[n]=s_1[1-n]$。滤波器的输出 $y[n]$在 $v=1$ 时刻进行采样，所产生的 $Y=y[1]$采用如下判决准则进行判决。

$$Y\ \underset{\hat{m}=0}{\overset{\hat{m}=1}{\gtrless}}\ \gamma$$

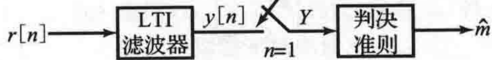


图　P13.7-3

如果 $v[n]$一直是白高斯噪声，这将会是最小错误概率的最佳滤波器结构。虽然这种结构对于有色噪声 $v[n]$不一定是最佳的，但是需要尽量做到最好。

(a) 在 $m=1$ 的条件下，求 Y 的均值和方差 $E(Y\mid m=1)$和 $\mathrm{var}(Y\mid m=1)$。Y 以 $m=1$为条件的概率密度函数是什么？

(b) 对于和(a)中一样的问题，现在对于 $m=0$的情况陈述(但没必要推导)相应的答案。

(c) 此结构中的 γ 为何值时，错误概率 $P_e=P_r(\hat{m}\neq m)$最小？简要证明你的答案。

(d) 当采用最佳的 γ 值时，求解图 P13.7-3 中接收机的错误概率。根据 Q 函数写出你的结果。

$$Q(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$$

如果已经正确处理这部分，应该发现你会得到相同的错误概率 P_e，无论 $a=0$、$\sqrt{\mathcal{E}}$或$-\sqrt{\mathcal{E}}$。然而，在被允许的范围内，存在一种 a 的选择，能产生更小的 P_e。请找出 a 的最优解。

(e) 确定 $h[n]$取代先前指定的 $h[n]$，以及相关的 γ，使得这个有色噪声问题的错误概率真正达到最小，然后再次利用 Q 函数来表达推导出来的错误概率。

13.8 图 13.8-1 显示了一个通信系统的基带模型，该系统用于在线的信号放大。为了简化，只考虑信号比特的传输。

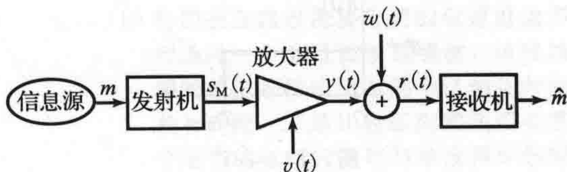


图　P13.8-1

在图 13.8-1 中，

(i) m 是取值为 0 和 1 的、等概率出现的二进制符号。

(ii) $s_m(t)$是用于传递信息 m 的发射机波形，分别与信息 $m=0$ 和 $m=1$ 相关的波形 $s_0(t)$和 $s_1(i)$显示在图 P13.8-2 中。

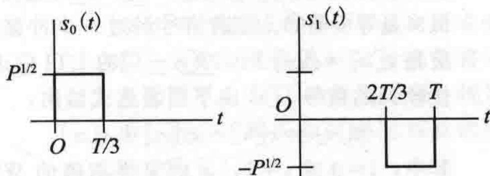


图　P13.8-2

(iii) 放大器的输出 $y(t)$由下式给出：

$$y(t)=\sqrt{G}s_m(t)+v(t)$$

其中，$G>1$ 是放大器的功率增益，

$v(t)$是由放大器引入的噪声。与信息m统计独立的$v(t)$是零均值的、白的高斯噪声过程，并且它的 PSD 为$S_{vv}(j\omega)=N_v$。高斯过程有这样一个性质，通过一个 LTI 系统滤波器产生的一个任何时刻的值都是一个高斯随机变量过程。

(iv) $w(t)$是零均值的、白的高斯噪声过程，由接收机电子设备产生。它与信息m和放大器的噪声过程$v(\cdot)$统计独立。$w(t)$的 PSD 为$S_{ww}(j\omega)=N_w$。

(v) 接收机正如图 P13.8-3 清晰显示的那样，对接收的波形$r(t)=y(t)+w(t)$，经过滤波和采样，以获得随机变量$Z=z(T)$。接收机的输出是基于Z的值来判决是哪个信息被发送，得到的判决输出为$\hat{m}=0$或 1。

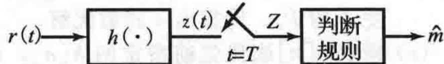


图 P13.8-3

(vi) 接收机滤波器的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}1/\sqrt{T}, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & 其他\end{cases}$$

如图 P13.8-4 所示。

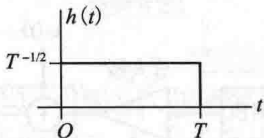


图 P13.8-4

(a) 确定在条件$m=0$和$m=1$下，Z的条件概率密度$f_{Z|m}(z|0)$和$f_{Z|m}(z|1)$。

(b) 确定判决$\hat{m}=0$或$\hat{m}=1$的最小错误概率的判决准则。推导出你的判决准则中对Z进行检测的阈值。

13.9 由一特定的发射机发射的 DT 信号为$x_0[n]=0$，或者$x_1[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$，并且这两个概率是等可能的。发送信号经过一个冲激响应是$c[n]=\delta[n]+0.2\delta[n-1]$的 LTI 信道。接收到的信号$y[n]$由下列表达式给出：

$$y[n]=c[n]*x_i[n]+v[n]$$

其中，$i=0$或$i=1$，$v[n]$是零均值的 WSS 有色噪声过程，自相关函数是

$$R_{vv}[m]=(0.5)^{|m|}$$

接收到的信号$y[n]$根据最小错误概率准则进行处理，判决是$x_0[n]$还是$x_1[n]$信号被发送。

(a) 计算并画出$c[n]*x_1[n]$的示意图。

(b) 噪声过程$v[n]$的 PSD $S_{vv}(e^{j\Omega})$是什么？

(c) 假设这里首先将$y[n]$传给一个 LTI 预滤波器滤波，通过对滤波器冲激响应$\phi[n]$的选取来使得预滤波器的输出$v_\phi[n]=\phi[n]*v[n]$，它的“噪声分量”成为一个 WSS 白噪声过程，自相关函数为$R_{v_\phi v_\phi}[m]=\delta[m]$。找出符合这些条件的因果冲激响应$\phi[n]$。

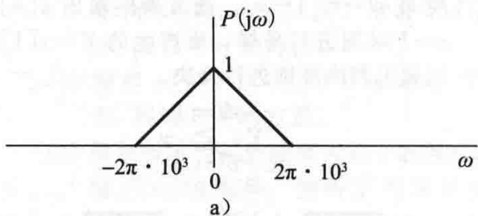
(d) 依据在(c)中得到的$\phi[n]$，如果发送的是$x_1[n]$信号，即$x_{1p}[n]=\phi[n]*c[n]*x_1[n]$，计算并画出预滤波器输出中的信号分量。

(e) 为了根据最小错误概率来判决发送的是$x_0[n]$还是$x_1[n]$，需要能观察到预滤波的输出信号$y_\phi[n]=\phi[n]*y[n]$的最小间隔是什么？

(f) 假设现在允许通过一个 LTI 滤波器对$y_\phi[n]$进行处理，并且可以依据滤波器在某个时刻的输出$g[n]$，比如在$n=0$时刻，与某个阈值相关来做出你的假设选择。什么样的滤波器选择能使得$g[0]$中的 SNR 最大？如果没有进行预滤波，而是直接对$y[n]$进行滤波来产生输出$g[n]$，那么是否存在一种改善$g[0]$中 SNR 的滤波器选择？是否存在 SNR 最大化的滤波器阈值，使错误概率最小？如果是，需要的阈值值是什么？

13.10 两个等可能的符号A和B中的一个经过噪声信道进行发送。符号A代表发送一个脉冲$p(t)$，它的傅里叶变换为$P(j\omega)$，如图 P13.10-1a 所示。

$$P(j\omega)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\omega|}{2\pi\cdot 10^3}\right), & |\omega|<2\pi\cdot 10^3\\ 0, & |\omega|\geqslant 2\pi\cdot 10^3\end{cases}$$



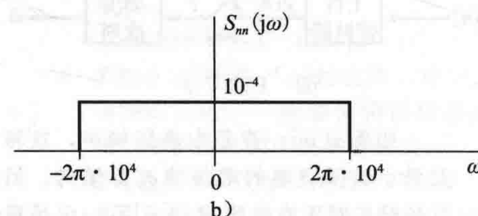


图 P13.10-1

符号 B 代表不发送脉冲(也就是发射一个"零")。信道上的噪声 $n(t)$ 是零均值的、带宽受限的 WSS 高斯过程，其 PSD 为 $S_{nn}(j\omega)$，如图 P13.10-1b 所示。在这里，高斯过程存在一个有趣的性质：一个高斯过程通过 LTI 滤波所产生的一个输出过程，在任何时刻都是高斯的。

如果符号 A 被发送，接收到的信号是 $r(t)=p(t)+n(t)$。如果符号 B 被发送，接收到的信号是 $r(t)=n(t)$。用于判决是 A 还是 B 被发送的判决系统如图 P13.10-2 所示。

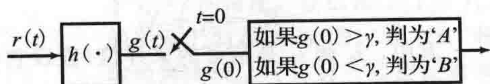


图 P13.10-2

冲激响应为 $h(\cdot)$ 的 LTI 滤波器是一个理想低通滤波器，频率响应如图 P13.10-3 中所示。

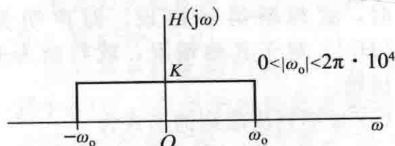


图 P13.10-3

对冲激响应 $h(t)$ 进行缩放，使其具有单位能量，即 $\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\mathrm{d}t=1$。

(a) 确定 $p(0)$。

(b) 确定噪声 $n(t)$ 的方差。

(c) 为了保证 $\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\mathrm{d}t=1$，确定 K 和 ω_o 之间的关系；

(d) 假设 $|\omega_o|<2\pi\cdot 10^4$ 滤波器的输出可以被表示为

$$g(t)=p_h(t)+n_h(t)$$

其中，$P_h(t)=p(t)*h(t)$ 是 $g(t)$ 的信号分量，而 $n_h(t)=n(t)*h(t)$ 是 $g(t)$ 的噪声分量。请确定噪声分量 $n_h(t)$ 的方差。

(e) 假设 $|\omega_o|<2\pi\cdot 10^4$。确定 ω_o 和 γ 的值，使得错误概率最小。

13.11 考虑有一个(无记忆的)通信信道，在 j 时刻的输入是随机变量 X_j，输出是随机变量 Y_j，关联关系由下列表达式给出：

$$Y_j=G_jX_j,\quad 1\leqslant j\leqslant 4$$

其中，增益 G_j 是独立同分布的、均值为 0 和方差为 σ_G^2 的高斯随机变量，所以 G_j 服从 $\mathcal{N}(0,\ \sigma_G^2)$ 的分布。随机变量 W_j 表示信道噪声，假定它也是独立同分布的高斯噪声，服从 $\mathcal{N}(0,\ \sigma_W^2)$ 分布，并且独立于 G_k。这种情形如图 P13.11 所示。

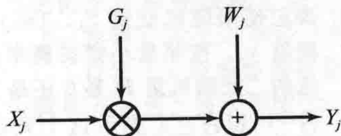


图 P13.11

现在希望通过这个信道发送一个二元随机变量 $H=\{0,1\}$，采样下面的方案，

- 给定 $H=0$，选择输入序列为 $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$；
- 给定 $H=1$，选择输入序列为 $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)=(0,\ 0,\ 1,\ 1)$。

假设 H 两种可能的选择的先验概率分别为 $P(H_0)=p_0$，$P(H_1)=p_1=1-p_0$。基于对信道输出的观测值 Y_j，$1\leqslant j\leqslant 4$，需要对二元随机变量 H 中哪一个值被发送做出判决。

(a) 解释为什么在 $H=0$ 或 $H=1$ 的每个假设下，随机变量 Y_j，$1\leqslant j\leqslant 4$ 分别是高斯的，并且相互独立？确定这些给定条件下，每一个假设情况的高斯输出随机变量的均值和方差。

(b) 你的朋友建议把接收到的信道输出序列通过一个 LTI 滤波器滤波，该滤波器的单位采样响应与两个已知信号的差相匹配，于是比较匹配滤波器在某个适当的时刻的输出与被选择好的阈值。你认为这值得去尝试一下，虽然考虑到根据朋友的建议能获得的最佳判决，与这里讨论的情形不太一样(因为在这里，信道的增益在时间上是随机变化的)。因此，你尝试使用如下随机变量的量测值在假设之间做出判决。

$$D=Y_1+Y_2-Y_3-Y_4$$

确定这个随机变量分别在 $H=0$ 和 $H=1$ 下的分布如何？这有没有告诉你，为什么观察量 D 的量测值将不会有助于区分 H 的两种概率呢？说明理由。所以，现在是时候回到基础问题的分析了！

(c) 确定下列 PDF

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\,|\,H}(y_1,y_2,y_3,y_4\,|\,0)$$

和

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\,|\,H}(y_1,y_2,y_3,y_4\,|\,1)$$

(d) 求解似然比

$$\Lambda(y_1,y_2,y_3,y_4)=\frac{f_{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\mid H}(y_1,y_2,y_3,y_4\mid 1)}{f_{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\mid H}(y_1,y_2,y_3,y_4\mid 0)}$$

和对数似然比 $\ln\Lambda(y_1, y_2, y_3, y_4)$

(e) 确定使用随机变量 Y_j，$1\leqslant j\leqslant 4$ 的量测值 y_j，按照最小错误概率判断被发送的二元随机量 H 是 0 还是 1(分别用 $\hat{H}=0$ 和 $\hat{H}=1$ 表示这个判决结果)。在你写的判决准则的方式中，要弄清楚的是，它只需要数据量 $q=y_1^2+y_2^2$ 和 $r=y_3^2+y_4^2$，而不是各个输出的量测值。

可以证明的是，在条件 $H=0$ 下的数据量

$$Q=Y_1^2+Y_2^2$$

是一个均值为 $\mu_{Q_0}=2(\sigma_G^2+\sigma_W^2)$ 的、服从指数分布的随机变量，它的条件 PDF 是

$$f_{Q\mid H}(q\mid 0)=\frac{1}{\mu_{Q0}}\exp\left(-\frac{q}{\mu_{Q0}}\right),\quad q>0$$

并且对于 $q<0$，它等于 0。同样地，仍然是在条件 $H=0$ 下，数据量

$$R=Y_3^2+Y_4^2$$

是服从指数分布的，其均值为 $\mu_{R0}=2\sigma_W^2$，并且独立于 Q。

从概率课程中，你可以回想起，对于这种独立的(有条件地)指数随机变量，在条件 $H=0$ 下，R 大于 Q 的概率由下式给出：

$$P(R>Q\mid H=0)=\frac{\mu_{R0}}{\mu_{Q0}+\mu_{R0}}$$

在条件 $H=1$ 下，其结果正好相反，即 Q 和 R 还是独立地服从指数分布，但是 Q 的条件均值是 $\mu_{Q1}=2\sigma_W^2$，R 的条件均值是 $\mu_{R1}=2(\sigma_G^2+\sigma_W^2)$，且

$$P(Q>R\mid H=1)=\frac{\mu_{Q1}}{\mu_{Q1}+\mu_{R1}}$$

(f) 在两种假设是等可能的情况中，即 $p_0=p_1=0.5$，使用这里给出的各种事实，推导出下面各式(使用这个问题中给出的参数来描述)。

(i) 条件概率 $P(\hat{H}=1\mid H=0)$ 和 $P(\hat{H}=0\mid H=1)$

(ii) 错误概率 P_e。

13.12 在通信信道的接收端，接收到两个不同时刻的量测值 R_1 和 R_2。在假设 H_0 下，即"只有噪声出现在接收端"，R_1 和 R_2 的值为

$$R_1=X_1$$
$$R_2=X_2$$

其中，噪声采样值 X_1 和 X_2 的均值为 0，方差为 σ^2。不过它们并不是相互独立的，其分布由下列二元高斯概率密度函数决定：

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2\mid H_0)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)\sigma^2}\right]$$

可以证明数据量 ρ 是 X_1 和 X_2 的相关系数。

在假设 H_1 下，即"信号和噪声都出现"，接收到的信号样本为

$$R_1=s_1+X_1$$
$$R_2=s_2+X_2$$

其中，s_1 和 s_2 是信号的采样值(假设它们是已知的某个常量)。

H_0 和 H_1 这两个假设的先验概率是

$$p_0=P(H_0),\quad p_1=P(H_1),\quad p_0+p_1=1$$

假定接收机可实现最小错误概率的 MAP 判决准则，对于每对采样对(r_1，r_2)，当 $P(H_1\mid r_1, r_2)>P(H_0\mid r_1, r_2)$ 时，就判断信号出现，即声明为假设'H_1'，对于其他情况，就判断为无信号出现。

(a) 证明判决准则的形式为

$$k_1r_1+k_2r_2\underset{`H_0\text{'}}{\overset{`H_1\text{'}}{\gtrless}}\gamma$$

并推导 γ、k_1 和 k_2 的表达式。当 p_0 在 0 和 1 之间变化时，描述判决结果是怎样变化的。

(b) 在二元高斯的情况下，此时 $\rho=0$，接收信号中对应的随机变量不仅是不相关的，而且还是独立的。对于这种情况，(a)中的解法应该可以简化，变成本章最小错误概率检测中所建立的匹配滤波器方法。

13.13 这个问题涉及拉普拉斯分布，其 PDF 定义为

$$f_X(x)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x-m|}$$

其中，X 是随机变量，α 是与随机表里 X 的方差 σ^2 相关的参数(实际上，$\alpha=\sqrt{2}/\sigma$)，m 是 X 的均值。拉普拉斯分布的 PDF 常用于语音和图像的模型中。

已知接收信号 $R[n]$ 由下列等可能的两种模型的一种给出。

$$H_0: R[n]=W[n]$$
$$H_1: R[n]=s[n]+W[n]$$

这里，每个 $W[n]$ 都是拉普拉斯分布的随机变量，在每个时刻 n，其值由零均值

($m=0$)的拉普拉斯分布的 PDF 决定。所有的 $W[n]$都是独立的，信号 $s[n]$是确定的并且已知。

(a) 只给出 $R[1]$的量测值 $r[1]$，说明在 H_0 和 H_1 之间，如何进行最小错误概率判决，并计算此概率。

(b) 确定在给定的 H_1 下，$R[1]$，$R[2]$，…，$R[L]$的联合 PDF，即确定

$$f_{\mathbf{R}|H_1}(r[1],r[2],\cdots,r[L]\mid H_1)$$

(c) 基于给定 $R[n]$，$n=1$，2，…，L 的量测值，确定根据最小错误概率在 H_0 和 H_1 之间进行判决的判决准则。对于 $L=2$ 的情况，尝试在($r[1]$，$r[2]$)的平面上勾勒出与'H_0'和'H_1'相关联的判决域，用几何示意图来解释你的答案。

13.14 这里将要进行测量的信号 $X[n]$，$n=1$，2，3，…，L，是根据下面二元假设中的一个来产生的：

H_0：$X[n]=W[n]$

对应的先验概率 $P(H_0)=p_0$

H_1：$X[n]=V[n]$

对应的先验概率 $P(H_1)=p_1=1-p_0$

其中，$W[n]$在每个时刻都是零均值的独立同分布高斯过程，其方差 σ_0^2 为一已知的常数。每个时刻上的采样值由下列概率密度函数决定

$$f_W(w)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

并且，不同时刻的 $W[n]$相互独立。类似地，$V[n]$是零均值高斯过程，在不同时刻的取值相互独立，但是其方差按照一种已知的方式随时间变化，所以方差在时刻 n 处的值为 σ_n^2。可以发现，如果使用定义为下列表达式的单位采样响应，从理论上，将有助于来解决这个问题。

$$h[n]=\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_n^2}\right)$$

注意，$h[n]$对于某个 n 可能是正数，但对于其他的 n，它也可能是负数或零，分别对应 $\sigma_0<\sigma_n$，$\sigma_0>\sigma_n$ 或 $\sigma_0=\sigma_n$ 的情况。

(a) 假设只有一个在 $n=1$ 上的量测值，$X[1]=x[1]$。证明在这个量测值下，在 H_0 和 H_1 之间用最小错误概率进行选择，其判决准则采样形式为

$$h[1]\,(x[1])^2 \underset{\text{'}H_0\text{'}}{\overset{\text{'}H_1\text{'}}{\gtrless}} \gamma$$

对于某个适当选择的门限 γ。同时基于这个问题描述的参数，给出 γ 的表达式。

(b) 根据(a)中的结果，现假设 $h[1]>0$，画出并标明这两个条件密度函数 $f_{X[1]|H}(x\mid H_0)$ 和 $f_{X[1]|H}(x\mid H_1)$。它们是在两种假设中的一个为条件下，控制了 $X[1]$的取值分布。

假设二元假设是等可能性的，也就是 $p_0=p_1$。在水平轴(即 x 轴)上标出点 $\pm\sqrt{\gamma/h[1]}$，并用阴影标出产生条件概率 $P(\text{'}H_1\text{'})\mid H_0$ 的全部区域，可能是一个区域或几个区域，并将这个条件概率写成 Q 函数的形式：

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\infty \mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v$$

(c) 与(b)中情形一样，但是假设不再限定为等可能性的先验概率。请指定 p_0 的取值范围，使得在该范围内无论是什么样的量测值 $x[1]$，最佳判决总是'H_1'。

(d) 现在假设在 $n=1$，2，…，L 处都有量测值，即已知 $X[1]=x[1]$，$X[2]=x[2]$，…，$X[L]=x[L]$。确定最小错误概率的判决准则，用一种包含(a)中结果的通用形式来表达。

(e) 假设实际上

$$V[n]=S[n]+W[n]$$

其中，$S[n]$是零均值独立同分布高斯过程，独立于 $W[\cdot]$，并且方差为 α_n^2，所以 $\sigma_n^2=\alpha_n^2+\sigma_0^2$。证明，(d)中的判决准则可以写成下列数据量与一个固定阈值相比较的形式。

$$\sum_{n=1}^{L} x[n]\,\hat{s}_n(x[n])$$

其中，$\hat{s}_n(X[n])$表示在假设 H_1 情况下，基于量测值 $X[n]$对 $S[n]$的 LMMSE 估计值。判决准则的这种形式与在确定信号情况下的判决准则相似，所得到的结果可参见式(13.15)。

扩展习题

13.15 使用一个合适的计算包，编写一个程序来产生信号 $r[n]$，其通过以概率 p 和 $1-p$ 随机地选择两个给定的信号 $s_1[n]$和 $s_2[n]$中的一个，然后加上一个指定方差的、零均值独立同分布的高斯噪声来得到。你给定的信号应该是一个能量可比的，尽管能量不一定相同。现在再编写一个程序，执行对于 $r[n]$的判决，通过将它与一个指定的信号 $d[n]$相关，也就说，通过计算 $g=\sum r[n]d[n]$，将这个结果与一个指定的阈

值 t 比较，当 $r>t$ 时，声明为‘s_1’，否则声明为‘s_0’。多次执行检测（比如 10000 次），以便对有关的检测概率、虚警概率和错误概率进行经验统计，从而确定这些概率，并与它们的理论值相比较。

(a) 分别画出下列两种情况对应的 $s_1[n]$ 和 $s_2[n]$ 图形，以及典型的 $r[n]$ 图形。

(i) 被噪声干扰的 $s_1[n]$ 版本；

(ii) 被噪声干扰的 $s_0[n]$ 的版本。

(b) 当 $p=0.5$ 时，用 $d[n]$ 和针对最小错误概率检测而适当选择的 t，重复运行你的程序。确定 P_D、P_{FA} 和 P_{error} 的经验统计值，并将它们与理论值进行比较。选择不同的噪声方差，重复上述问题。

(c) 保持 $d[n]$ 和 p 与(b)中一样，并固定一个噪声方差。不过在这里，t 的取值是从某个负数到某个正数，运行你的程序。画出当你改变 t 时经验值 P_D 的图形，它是关于所获得的 P_{FA} 的经验值的一个函数。这就是经验的“接收机操作特性”，或者称为 ROC 曲线。最后，画出以 t 为自变量的函数 P_{error} 的经验值曲线，并且检查在(b)中 t 的选择，是否确实能够给出最小错误概率的那个（需要记住，经验结果可能会具有多样性，并且可能不会与理论值有精确的关系）。对于将噪声方差改成其他某个值后的结果，仿真分析这个结果造成什么样的影响？

(d) 再返回到(b)，但是现在假设 p 是变化的，并且对于每个 p 你选择了最小错误概率的最佳的 t（你自己应该确信，最佳的 $d[n]$ 仍然与以前一样）。画出当 p 变化时经验值 P_D 的数据曲线，它是关于所获得的 P_{FA} 的经验值（用最佳的 t）的一个函数。你期望这种情况下的理想 ROC（相对于经验值而言）与(c)中所定义的理想 ROC 有什么不同吗？说明理由。

13.16 考虑一项检测任务，具体检测是否在一系列噪声量测值 $X[1]$，$X[2]$，…，$X[L]$ 中有一个已知的、有限长度的信号。在这里，还是表征为在二元假设之间进行选择。

$$H_0: X[n]=W[n], \quad 1\leqslant n\leqslant L$$

$$H_1: X[n]=s[n]+W[n], \quad 1\leqslant n\leqslant L$$

这里每个 $W[n]$ 是零均值高斯随机变量，代表噪声，其方差为 σ^2，并且在不同时刻，$W[\cdot]$ 是相互独立的。信号 $s[n]$ 是确定的，并且已知。假设 H_0 和 H_1 的先验概率分别表示为 p_0，$p_1=1-p_0$。

(a) 使用一个合适的计算包，编写一个程序，生成上面一种假设下的 $X[n]$，要求 $p_0=p_1=\dfrac{1}{2}$，$L=5000$，$\sigma^2=1$，且 $s[n]=0.5\cos(\pi(n-\Delta)/2)$。其中，$\Delta$ 可以被设置为 0、1、2、3，但是对于接收机而言，它是未知的。

(b) 运行(a)中的程序，画出作为结果的量测值。只通过观察该图形，你能判断出哪种假设（即包含了还是没有包含信号）是合适的吗？如果可以，你能够确定 Δ 的可能取值吗？

(c) 利用(b)中所生成的数据，实现最小错误概率判决准则，以选择一个合适的假设（包含了还是没有包含信号）。在这里存在一个复杂之处：因为信号中 Δ 的不确定性，造成 $s[n]$ 不是完全确定。不过可以做一件合理的事情，那就是使用你的判决准则对四个被选信号（即信号 $s[n]$，$\Delta=0,1,2,3$）中的每一个进行估计，判决出能支持这些备选信号判决（如果有的话）的最大值域边界范围，并作为你声明‘H_1’而建立的判决条件。

(d) 编写一段程序，自动地重复(b)和(c)很多次（例如 10000 次），并且确定正确判决这两个假设（即假设被正确判决的结果部分）的经验概率，以及当‘H_1’被正确判决时能正确选择 Δ 的经验概率。二元假设的正确判决经验概率与在 Δ 已知的情况下的理论概率值相比较，有什么异同？

13.17 考虑下面的因果 DT 系统。输入 $x[n]$ 是高斯的、独立同分布的噪声，其均值为零，并且 $R_{xx}[m]=\delta[m]$。输入同时经过两个信道进行发送，生成 $w_0[n]$ 和 $w_1[n]$，如图 P13.17 所示。

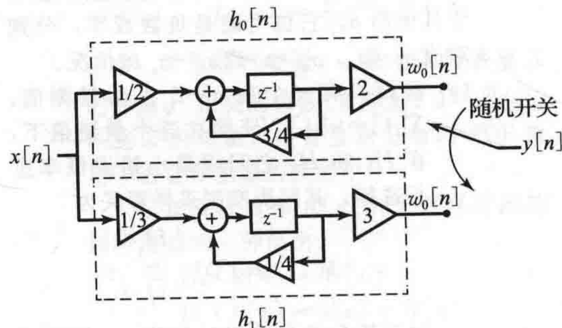


图 P13.17

假设系统在很久以前就启动运行，已经处于稳定状态。对于每个时刻 n，独立地选择 $w_0[n]$或 $w_1[n]$作为输出 $y[n]$。

(a) 计算从 $x[n]$到 $w_0[n]$，以及从 $x[n]$到 $w_1[n]$的滤波器的冲激响应，即确定 $h_0[n]$和 $h_1[n]$。

(b) 给定一个特定的量测值 $y[n]$，设计一个检验以判决输出是来自于 $w_0[n]$还是 $w_1[n]$，并且确定对于判决为 $w_1[n]$的检验，相应的 $y[n]$的取值范围如何。你的判决应该基于最小错误概率检验，并假设 $w_1[n]$和 $w_0[n]$相应的先验概率分别等于$\frac{1}{2}$。

(c) 现在假设开关选择 $w_0[n]$的概率为 P_0，开关选择 $w_1[n]$的概率为 $1-P_0$。虚警概率 P_{FA}和检测概率 P_D 定义如下：

$$P_{FA}=P(\text{声称 } w_1[n] \mid \text{开关选择 } w_0[n])$$

$$P_D=P(\text{声称 } w_1[n] \mid \text{开关选择 } w_1[n])$$

(i) 找出最大的 P_0，使得 $P_{FA}=P_D=1$。

(ii) 找出最小的 P_0，使得 $P_{FA}=P_D=0$。

539 ~ 554

参 考 文 献

Abu: Y. S. Abu-Mostafa, M. Magdon-Ismail, and H.-T. Lin, *Learning from Data: A Short Course*, AMLBook 2012.

Alp: E. Alpaydin, *Introduction to Machine Learning*, 3rd ed., MIT Press 2014.

And: B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice Hall 1979 (reprinted by Dover 2005).

An1: J. B. Anderson, *Digital Transmission Engineering*, 2nd ed., Wiley-IEEE Press 2005.

An2: J. B. Anderson and R. Johannesson, *Understanding Information Transmission*, IEEE Press 2005.

Ant: P. J. Antsaklis and A. M. Michel, *A Linear Systems Primer*, Birkhäuser 2007.

Ast: K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press 2008.

Bar: J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, 3rd ed., Kluwer Academic Publishers 2004.

Ber: D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed., Athena Scientific 2008.

Bis: C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer 2006.

Bl1: M. Bland, *An Introduction to Medical Statistics*, 3rd ed., Oxford University Press 2000.

Bl2: M. Bland and J. Peacock, *Statistical Questions in Evidence-Based Medicine*, Oxford University Press 2000.

Blo: P. Bloomfield, *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*, 2nd ed., Wiley 2000.

Bra: R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, 3rd ed., McGraw-Hill 1999.

Bro: P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd ed., Springer 2002.

Buc: J. R. Buck, M. M. Daniel, and A. C. Singer, *Computer Explorations in Signals and Systems Using MATLAB*, 2nd ed., Prentice Hall 2001.

Cas: H. Caswell, *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation*, 2nd ed., Sinauer 2001.

Cha: D. C. Champeney, *A Handbook of Fourier Theorems*, Cambridge University Press 1987.

Cht: C. Chatfield, *The Analysis of Time Series: An Introduction*, 6th ed., Chapman & Hall/CRC Press 2004.

Ch1: C.-T. Chen, *Signals and Systems*, 3rd ed., Oxford University Press 2004.

Ch2: C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 4th ed., Oxford University Press 2013.

Chu: L. O. Chua and P.-M. Lin, *Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*, Prentice Hall 1975.

Clo: C. M. Close, D. K. Frederick, and J. C. Newell, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 3rd ed., Wiley 2002.

Con: F. Conway and J. Siegelman, *Dark Hero of the Information Age: In Search of Norbert Wiener, the Father of Cybernetics*, Basic Books 2005.

Coo: G. R. Cooper and C. D. McGillem, *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*, 3rd ed., Oxford University Press 1999.

Cov: T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed., Wiley 2006.

Cox: T. F. Cox, *An Introduction to Multivariate Data Analysis*, Hodder Arnold 2005.

Dal: D. J. Daley and J. Gani, *Epidemic Modelling: An Introduction*, Cambridge University Press 1999.

Dav: W. B. Davenport and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw-Hill 1958 (reprinted by IEEE Press 1987).

DeG: M. H. DeGroot and M. J. Schervish, *Probability and Statistics*, 4th ed., Pearson 2012.

Dek: F. M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä, and L. E. Meester, *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*, Springer 2005.

Dur: J. Durbin and S. J. Koopman, *Time Series Analysis by State Space Methods*, 2nd ed., Oxford University Press 2012.

Edw: C. H. Edwards and D. E. Penney, *Differential Equations and Linear Algebra*, 3rd ed., Pearson 2008.

Fin: T. L. Fine, *Probability and Probabilistic Reasoning for Electrical Engineering*, Pearson 2006.

Frd: B. Friedland, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*, McGraw-Hill 1986 (reprinted by Dover 2005).

Frs: B. Fristedt, N. Jain, and N. Krylov, *Filtering and Prediction: A Primer*, American Mathematical Society 2007.

Gal: R. G. Gallager, *Stochastic Processes: Theory for Applications*, Cambridge University Press 2013.

Gar: W. A. Gardner, *Introduction to Random Processes, With Applications to Signals & Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill 1990.

Gib: J. D. Gibson, *Principles of Digital and Analog Communications*, 2nd ed., Prentice Hall 1993.

Gr1: G. R. Grimmett and D. R. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3rd ed., Oxford University Press 2001.

Gr2: G. R. Grimmett and D. R. Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability*, Oxford University Press 2001.

Gui: E. A. Guillemin, *Theory of Linear Physical Systems: Theory of Physical Systems from the Viewpoint of Classical Dynamics, Including Fourier Methods*, Wiley 1963 (reprinted by Dover 2013).

Had: A. H. Haddad, *Probabilistic Systems and Random Signals*, Prentice Hall 2006.

Hay: M. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley 1996.

Ha1: S. Haykin and B. Van Veen, *Signals and Systems*, 2nd ed., Wiley 2002.

Ha2: S. Haykin, *Digital Communication Systems*, Wiley 2014.

He1: C. W. Helstrom, *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, 2nd ed., Macmillan 1991.

He2: C. W. Helstrom, *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon 1960.

He3: C. W. Helstrom, *Elements of Signal Detection and Estimation*, Prentice Hall 1995.

Jan: J. Jan, *Digital Signal Filtering, Analysis and Restoration*, IET 2000.

Jen: G. M. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day 1968.

Ka1: T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall 1980.

Ka2: T. Kailath, *Lectures on Wiener and Kalman Filtering*, 2nd ed., Springer 1981.

Kam: E. W. Kamen and J. K. Su, *Introduction to Optimal Estimation*, Springer 1999.

Kay1: S. M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes Using MATLAB*, Springer 2006.

Kay2: S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Prentice Hall 1993.

Kay3: S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*, Prentice Hall 1998.

Kay4: S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice

Hall 1988.
Kha: H. K. Khalil, *Nonlinear Control*, Pearson 2015.
Kle: J. L. Klein, *Statistical Visions in Time: A History of Time Series Analysis, 1662–1938*, Cambridge University Press 1997.
Koo: L. H. Koopmans, *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press 1995.
Kri: V. Krishnan, *Probability and Random Processes*, Wiley 2006.
Kul: S. Kulkarni and G. Harman, *An Elementary Introduction to Statistical Learning Theory*, Wiley 2011.
Kwa: H. Kwakernaak and R. Sivan, *Modern Signals and Systems*, Prentice Hall 1991.
La1: B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, 2nd ed., Oxford University Press 2005.
La2: B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed., Oxford University Press 2009.
Lee: Y. W. Lee, *Statistical Theory of Communication*, Wiley 1960 (reprinted by Dover 2005).
Leo: A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed., Prentice Hall 2008.
Lev: B. C. Levy, *Principles of Signal Detection and Parameter Estimation*, Springer 2008.
Lue: D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, Wiley 1979.
Lyn: S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*, 2nd ed., Birkhäuser 2014.
Mac: D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press 2003.
Ma1: D. G. Manolakis and V. K. Ingle, *Applied Digital Signal Processing: Theory and Practice*, Cambridge University Press 2011.
Ma2: D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*, Artech House 2005.
Mar: S. L. Marple, Jr., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall 1987.
McC: J. H. McClellan, C. S. Burrus, A. V. Oppenheim, T. W. Parks, R. W. Schafer, and H. W. Schuessler, *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5*, Prentice Hall 1998.
McD: R. N. McDonough and A. D. Whalen, *Detection of Signals in Noise*, 2nd ed., Academic Press 1995.
Mil: S. Miller and D. Childers, *Probability and Random Processes, with Applications to Signal Processing and Communications*, 2nd ed., Academic Press 2012.
Mit: S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*, 4th ed., McGraw-Hill 2011.
Moo: T. K. Moon and W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall 2000.
Mur: K. P. Murphy, *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, MIT Press 2012.
Op1: A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed., Pearson 2010.
Op2: A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, with S. H. Nawab, *Signals & Systems* 2nd ed., Prentice Hall 1997.
Pa1: A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill 1977.
Pa2: A. Papoulis, *Circuits and Systems: A Modern Approach*, Holt, Rinehart, and Winston 1980.
Pa3: A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill 1962.
Pa4: A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed., McGraw-Hill 2002.

Per: D. B. Percival and A. T. Walden, *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge University Press 1993.

Phi: C. L. Phillips, J. M. Parr, and E. A. Riskin, *Signals, Systems, and Transforms*, 5th ed., Pearson 2014.

Poo: H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, 2nd ed., Springer 1994.

Por: B. Porat, *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*, Prentice Hall 1994 (reprinted by Dover 2008).

Pra: P. Prandoni and M. Vetterli, *Signal Processing for Communications*, EPFL Press 2008.

Pr1: J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 4th ed., Prentice Hall 2007.

Pr2: J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed., McGraw-Hill 2008.

Pur: M. B. Pursley, *Random Processes in Linear Systems*, Prentice Hall 2002.

Rce: J. A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 3rd ed., Brooks/Cole 2007.

Rch: M. A. Richards, *Fundamentals of Radar Signal Processing*, 2nd ed., McGraw-Hill 2014.

Rob: M. J. Roberts, *Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and MATLAB*, 2nd ed., McGraw-Hill 2012.

Sch: L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis*, Addision-Wesley 1991.

Sha: K. S. Shanmugan and A. M. Breipohl, *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*, Wiley 1988.

Shn: C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press 1949 (reprinted in 1998).

Shi: R. Shiavi, *Introduction to Applied Statistical Signal Analysis: Guide to Biomedical and Electrical Engineering Applications*, 3rd ed., Elsevier 2007.

Shy: J. J. Shynk, *Probability, Random Variables, and Random Processes: Theory and Signal Processing Applications*, Wiley 2013.

Sie: W. McC. Siebert, *Circuits, Signals, and Systems*, McGraw-Hill/MIT Press 1986.

Sko: M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, 3rd ed., McGraw-Hill 2001.

Slo: J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.

Ste: J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press 2004.

St1: S. M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*, Harvard University Press 1986.

St2: S. M. Stigler, *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*, Harvard University Press 1999.

Sto: P. Stoica and R. L. Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall 2005.

Str: S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., Westview Press 2014.

Th1: C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall 1992.

Th2: C. W. Therrien and M. Tummala, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*, 2nd ed., CRC Press 2012.

Van: H. L. Van Trees and K. L. Bell, with Z. Tian, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Filtering Theory*, 2nd ed., Wiley 2013.

Vet: M. Vetterli, J. Kovačević, and V. K. Goyal, *Foundations of Signal Processing*, Cambridge University Press 2014.

Vid: M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed., Prentice Hall 1993 (reprinted by SIAM 2002).

Wal: R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. E. Ye, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 9th ed., Pearson 2011.

Was: L. Wasserman, *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*, Springer 2004.

Wie: N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*, MIT Press 1949 (reprinted in 1964).

Wil: R. R. Wilcox, *Basic Statistics: Understanding Conventional Methods and Modern Insights*, Oxford University Press 2009.

Wll: R. H. Williams, *Probability, Statistics, and Random Processes for Engineers*, Brooks/Cole 2003.

Wod: P. M. Woodward, *Probability and Information Theory, With Application to Radar*, 2nd ed., Pergamon 1964.

Woo: W. A. Woodward, H. L. Gray, and A. C. Elliott, *Applied Time Series Analysis*, CRC Press 2011.

Yat: R. D. Yates and D. J. Goodman, *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*, 2nd ed., Wiley 2005.

Zad: L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory: The State Space Approach*, McGraw-Hill 1963 (reprinted by Dover 2008).

Zie: R. E. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of Communications: Systems, Modulation, and Noise*, 7th ed., Wiley 2014.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与本书页边标注的页码一致。

A

Absolute summability(绝对可和)，482
Absolute integrable(绝对可积)
  impulse response(冲激响应)，209
  signal(信号)，12
Absolute summable(l^1)signal(绝对可和信号)，12
Action of a signal(信号行为)，11
Additive noise(加性噪声)，394，531
  causal Wiener filtering of a signal corrupted by(干扰信号的因果维纳滤波)，487-489
  FIR estimation of a signal corrupted by(干扰信号的FIR估计)，467-468
  LMMSE for a signal in(干扰信号的LMMSE估计)，321-322
  MMSE estimation for signal in(干扰信号的MMSE估计)，310-311，314-317
  unconstrained estimation of a signal corrupted by(干扰信号的无约束估计)，476-478
Aliasing(混叠现象)，22，439
All-pass frequency response(全通频率响应)，64，66-68
All-pass systems(全通系统)，63-64，66-69，71-76，442，444
  causal，stable system as cascade of(因果稳定系统级联)，77
  frequency response(频率响应)，64-69，73-75
Amplitude-phase representation of a Fourier transform(傅里叶变换的幅度相位表示)，63
Analog-to-digital(A/D)converter(模数转换器)，22
Anti-aliasing filter(抗混叠滤波器)，22
Antipodalsignaling(反相信号)，104，345，535
  binary detection with(二元检测)，537
  detection with matched filter(匹配滤波器检测)，535-538
  error performance(误差性能)，535
  probability of error with(误差概率)，535
Asymptotic stability of linear periodically varying systems(线性周期时变系统的渐进稳定性)，217
Asymptotic stability of lti systems(lti系统的渐进稳定性)
  CT case(连续时间情况)，187-188
  DT case(离散时间情况)，188-189
  of linearized viral propagation model(线性病毒传播模型)，189-190
Autocorrelation(自相关)
  CT Fourier transform of(CTFT，连续时间信号的傅里叶变换)，422
  deterministic(确定性)，15-16，398-399，427，433-434，521，531-532
  DT Fourier transform of(DTFT，离散时间信号的傅里叶变换)，428
  Fourier transform of(傅里叶变换的)，399-400，参见power spectral density(PSD)of the process
  functions(函数的)，385-388，395-400
  of i. i. d. process(独立同分布)，429
  of WSS process(广义平稳过程)，423-426，442，444
  CT(连续时间)，430-431
Autocovariance function(自协方差函数)，385-389，391，395，481
Autoregressive model(自回归模型)，445，500

B

Banded process(带状过程)，470
Bandlimited ct signal(带限连续时间信号)，104
Bandlimited interpolation(带限内插)，23，25-27
Bandlimited random processes(带限随机过程)，444
Bandpass filters(带通滤波器)，14-15，103，422-423
Barker-13 sequence(巴克-13序列)，61，532
Baseband pulse-amplitude modulation(基带脉冲幅度调制)，103-110
  frequency-domain characterizations(频域特征)，105-106
  received signal(接收信号)，105
  transmitted signal(发送信号)，103-105，113
Baud rate(波特率)，104
Bayes'rule or bayes' theorem(贝叶斯法则或贝叶斯理论)，281，286，347，356，362
Behavior of system(系统行为)，2-3，189，252-253，437

of a causal system(因果系统的),202
on circle(圆周上的),18
of circuits(电路的),138
of DT system(离散时间系统的),185-186,202,210-211,261
dynamic(动态的),134
in endemic equilibrium(EE,传染病平衡态),190
equilibrium point(平衡点),159
of a time-invariant nonlinear state-space model(非线性时不变状态空间模型),161-163
in infective-free equilibrium(IFE,无感染平衡态),189
input-output(输入-输出),140,155
internal(内部的),133,175
of LTI structure(LTI结构的),147,155,158,182,187
of observer in presence of noise(噪声中的观测器),246-247
of plant(场景),237-240
state variables and(状态变量),136,139
time evolution and(时间演化),146,149
of Z(随机变量Z),291
zero-input response(ZIR,零输入响应),254
Bernoulli process(伯努利过程),389,536
BilateralLaplace transform(双边拉普拉斯变换),20-21
Bilateral z-transform(双边 z 变换),16-20
of impulse response(冲激响应的),9
Binary signal discrimination in i. i. d Gaussian(独立同分布高斯二元信号鉴别),532-535
Biochemical reactions(生化反应),171
Bipolar or antipodal signaling(双相或反相信号),535
Bivariate Gaussian(二元高斯)
density(密度),293-294
random variable(随机变量),311-312
Blurred signal(模糊信号),478-479
Bochner's theorem(波切内尔定理),424,526
Bounded-input, bounded-output (bibo) stable system(有界输入有界输出的稳定系统),4-5,8,194,395-396,440
Bounded signal(有界信号),12
Boxcar integration(矩形积分),536
Broadband input signal(宽带输入信号),69-72

C

Carrier frequency(载波频率),65,113-114
Cauchy-schwarz inequality(柯西-施瓦茨不等式),524-525,529,534
Causality(因果性),75,153
Causal system(因果系统),4-6,19,21,133,151,153
Centered zero-order hold(ZOH)(中心零阶保持),27
Characteristic polynomial(特征多项式),178
Chebyshev inequality(切比雪夫不等式),288-289,524
Closed-loop characteristic polynomial(闭环特征多项式),258
Closed-loop control(闭环控制),252
Closed-loop lti state-space system(闭环 lti 状态空间系统),253-254
Closed-loop system(闭环系统),254-256
Closed-loop transfer function(闭环传输函数),259-260
Coherence function of two processes(两个随机过程的相干函数),474
Coin tosses, probabilistic experiment with(抛硬币的概率试验),384
Communication system, transmission errors in(通信系统的传输误差),281-282
Complex conjugate(复共轭),14,79,157,176,179,186,482
Complex frequency(复频率),8
Complex mode pair(复模式对),183,186
Conditional probability(条件概率),280-281
Constant phase shift(固定相位偏移),64-66
Constellation(星座图),参见 *I-Q* constellation
Continuous random variable(连续随机变量),307-312
Continuous-time(ct)all-pass system(连续时间全通系统),73-74
phase of a(相位的),75
Continuous-time(CT)filter(连续时间滤波器),24
Wiener(维纳),492
Continuous-time Fourier transform(CTFT,连续时间傅里叶变换),10,422,433
Fourier transform pairs(傅里叶变换对),13
of impulse response(冲激响应的),8
Continuous-time(CT)random process(连续时间随机过程),382
Continuous-time(CT)signal(连续时间信号),1,380-381
absolutely integrable signal(绝对可积信号),12
discrete-time processing of(离散时间处理),21-28
estimation of(估计),492-493
exponential representation of(复指数表达形式),6-7
mapping of(映射),3

matched-filter impulse response of(匹配滤波器的冲激响应)，536
one-sided exponential of(单边指数信号)
random process(随机过程)
Continuous-time(CT)state-space model(连续时间状态空间模型)，149-150
equilibria of nonlinear time-invariant(非线性时不变系统的平衡状态)，160-161
generalizations in(通用形式)，150
for integrator-adder-gain systems(积分器-加法器-增益系统)
LTI model(LTI模型)
nonlinear and time-varying model(非线性时变模型)，150
Continuous-time(CT)white noise(连续时间白噪声)，396，492
Continuous-time(CT)white process(连续时间白过程)，430-431
Continuous-time matched filter(连续时间匹配滤波器)，528-529
Continuous-to-discrete(C/D)converter(连续到离散的转换器)，22
Convolution integral(卷积积分)，5
Convolution of system impulse response(系统冲激响应的卷积)，396-398
Convolution sum(卷积和)，5
Covariance(协方差)，291
matrix(矩阵)，326，465
Correlation coefficient(相关系数)，292，296
Correlation function(相关函数)，388，397
Cross-correlation(互相关)，395-398，400，431
function(函数)，61，386，388，431
Cross-spectral densities(互功率谱密度)，431
fundamental inequality for(基本不等式)，432
Cumulative distribution function(CDF，累积分布函数)，283-284，286，388
Cutoff frequency(截止频率)，18，106

D

Deadbeat(无节拍)，249，261
Deblurring(去模糊)，478-479
Decision regions in measurement space(量测空间的判决区域)，354-355
Decision rule(判决法则)，347
randomized(随机化)，376
Deconvolution(反卷积)，478-479
Decoupled or diagonalized representation(去耦或对角化表示)
CT system(连续时间系统)，198-199
DT system(离散时间系统)，202
Laplace transform(拉普拉斯变换)，203
Delay-adder-gain system(延迟-加法-增益系统)，144-145
detailed component and interconnection equation(详细的元件和互联等式)，144
input-output difference equation(输入输出差分方程)，145
memory of(记忆性)，144
realization(实现)，147
response of(响应)，144-145
Demultiplication using DT Wiener filter(利用维纳滤波器去乘性因子)，479-480
Detectability(可检测性)，244
Detection(检测)，参见 signal detection
in colored noise(色噪声)，525-528
conditional probability of(条件概率)，354，357
error probabilities(误差概率)，355
minimum-error-probability symbol(最小误差概率符号)，351-353
with minimum probability of error，decision rule for(具有最小误差概率的判决规则)，360
ROC for signal in Gaussian noise(高斯噪声中信号的接收者操作特性)，359-361
setting or radar(雷达设置)，355
deterministic autocorrelation function(确定性自相关函数)，15-16，60，398-399，427，433-434，521，531-532
Digital differentiator(数字微分器)，25
Diagonalized system(对角化系统)，198
Discrete-time(DT)all-pass system(离散时间全通系统)，74-75
pole-zero plot for(零极点图)，75-76
Discrete-time(DT)filtering(离散时间滤波)，22，24，158，439
Discrete-time(DT)random process(离散时间随机过程)，382
Discrete-time(DT)signal(离散时间信号)，1，380-381
absolutely summable signal(绝对可和信号)，12
energy spectral density(ESD)of(能量谱密度)，15
finite-action signal(有限行为信号)，11
finite-energy signal(有限能量信号)，11-12
Parseval's identity(帕斯瓦尔恒等式)，13
signal of slow growth(缓慢增长信号)，12-14
Discrete-time(DT)state-space model(离散时间状态空间模型)，146-149
delay-adder-gain simulation of(延迟-加法-增益仿真)，147
equilibria of nonlinear time-invariant(非线性时不

变系统的平衡状态)，159
generalization in(一般化)，147-148
LTI model(LTI 模型)，146-147
nonlinear time-invariant model(非线性时不变模型)，148-149
time-varying(时变)，148
Discrete-time(DT) white process(离散时间白过程)，429-430
Discrete-time(DT) Wiener filters(离散时间维纳滤波器)
causal(因果的)，480-487
deconvolution or deblurring of blurred signal using(模糊信号的反卷积或者去模糊)，478-479
demultiplication using(去乘性因子)，479-480
noncausal prediction(非因果预测)，475
unconstrained(无约束的)，472-480
estimation of a signal corrupted by additive noise using(对加性噪声干扰信号的估计)，476-478
Discrete-time Fourier transform(DTFT，离散时间傅里叶变换)，9，16-17，428
of deterministic DT signal(确定性离散时间信号)，11-14
Fourier transform pair(傅里叶变换对)，13
of impulse response(冲激响应)，9
Inverse(反变换)，20
synthesis/analysis pair(综合/分析对)，10-11
Discrete-time LTI filter(离散时间 LTI 滤波器)，174-176
Discrete-time processing of continuous-time(CT) signal(连续时间信号的离散时间处理)，21-28
basic structure(基本结构)，22-23
DT filtering and frequency response(离散时间滤波器和频率响应)，24
Dispersion(弥散)，72，105
Dominant time constant(主时间常数)，246-247，265
Downsampling(降采样)，439
Duality，time-frequency(时间-频率的对偶性)，111

E

Eigenfunction of an LTI system(LTI 系统的特征函数)，6-10
Eigenfunction property in DT case(离散时间系统的特征函数性质)，8
Eigenvalue(特征值)，176，178-186
nondistinct(非相异)，218
Eigenvector(特征向量)，176，178-186
Einstein-Wiener-Khinchin(EWK) theorem (爱因斯坦-维纳-辛钦定理)，434-436
Electrical circuit(电路)，参见 resistor-inductor-capacitor(RLC) circuit
Endemic equilibrium or steady state(传染病平衡态或者稳定状态)，143，160，163，189，190
Energy density spectrum(能量密度谱)，11
Energy of a signal(信号的能量)，11
output signal(输出信号)，14
Energy spectral density(ESD，能量谱密度)，14-15，423，433
Equilibrium(平衡点)，158-161
Ergodicity of random process(随机过程的各态历经)，391-392
ergodic in correlation(相关性的各态历经)，433
ergodic in distribution(分布的各态历经)，391
ergodic in mean value(均值的各态历经)，391-392，419
second-order ergodic(二阶各态历经)，392
spectral distribution，conditions for(谱分布的条件)，427-428
Estimate(估计)，307
Estimation(估计)，306，464
Estimatior(估计量)，312
Euclidean vector space(欧几里得向量空间)，295
Even function(偶函数)，422，476
Even sysmmetry(偶对称)，388
Event algebra(事件代数)，279
Expectation(期望)，286-287
Expected time-averaged power spectrum(期望的功率谱的时间平均)，432-436
Exponentially correlated process，PSD of(指数相关过程的功率谱密度)，425-426

F

False alarm(虚警)，354-356
error probability(误差概率)，355
False negative(漏报)，356
False positive(误报)，356
Feedback control(反馈控制)
closed-loop control(闭环控制)，252
LTI state feedback(LTI 状态反馈)，253-256
observer-based(基于观测器)，262-266
state(状态)，252-262
filter(滤波器)，参见 Wiener filter
causal(因果的)，444，468，484，487
causal discrete-time(DT) Wiener(因果离散时间维纳滤波器)，480-487
continuous-time(CT)(连续时间)，24，492
continuous-time matched(连续时间匹配滤波器)，528-529

demultiplication using DT Wiener(利用离散时间维纳滤波器去乘性因子)，480-487
descrete-time(DT)(离散时间)，22，24，158，439
finite impulse response(FIR)Wiener(有限长冲激响应维纳滤波器)，467-471
ideal bandpass(理想带通)，15
Kalman(卡尔曼)，245
linear FIR(线性 FIR)，394-395
low-pass(低通)，118
modeling(模型)，439-442
noncausal(非因果)，440
steady-state Kalman(稳态卡尔曼)，245
whitening(白化)，443-444
Finite-action signal(有限行为信号)，11-12
Finite-energy signal(有限能量信号)，11-12
Finite impulse response(FIR)estimation of a signal corrupted by additive noise(加性噪声干扰信号的有限长冲激响应估计)，467-468
Finite impulse response(FIR)Wiener filter(有限长冲激响应维纳滤波器)，467-471
in estimation of a signal corrupted by additive noise(加性噪声干扰信号的估计)，476-468
in WSS random processes(广义平稳随机过程)，467-469
Finite impulse response(FIR)Wiener prediction(有限长冲激响应的维纳预测)，469-472
First-order hold(FOH)pulse(一阶保持脉冲)，27-28
Fluctuation spectral density(FSD)(波动谱密度)，426-428，474，482，487，527
spectral factor of(谱因子)，440
of a sum of two jointly WSS signals(两个联合广义平稳信号之和)，431-432
Forward-Euler algorithm(前向欧拉算法)，151-152
Forward path，system function of(系统函数的前向通路)，209
Fourier transform phase(傅里叶变换相位)，111-112
amplitude-phase representation(幅度-相位表示)，63
constant phase shift and system frequency response(固定相位偏移和系统频率响应)，64-66
for a discrete-time(DT)system(离散时间系统)，64
effect of a nonlinear phase characteristic(非线性相位特征效应)，66-73
linear phase(线性相位)，64
magnitude-phase representation(模-相位表示)，62-65
phase ambiguity(相位模糊)，63
time-domain effect(时域效应)，63-64，69
unwrapped phase(展开的相位特性)，63
Fourier transform(傅里叶变换)，10-11，16，20，433-434，481
correlation relation(相关关系)，399
Parseval's identity(帕斯瓦尔恒等式)，13-15
synthesis/analysis pair(综合/分析对)，10-11
Frequency response(频率响应)，105，530
amplitude of(幅度)，63
of an all-pass system(全通系统)，64-69，73-75
of an ideal bandpass filter(理想带通滤波器)，14
of CT filter(连续时间滤波器)，24-25，77
of CT LTI filter(连续时间线性时不变滤波器)，24
defined(定义的)，8
of the desired optimum filter(期望的最佳滤波器)，527
of DT system(DT 系统)，9，25
high(高频)，9
of ideal bandpass filter(理想带通滤波器)，527
of ideal low-pass filter(理想低通滤波器)，396
low(低频)，9
of LTI DT filter(线性时不变离散滤波器)，24
in LTI systems(线性时不变系统)，10，22，62，526
time-domain effect of(时域效果)，63
magnitude of(模)，8，77-79
of matched filter(匹配滤波器)，521，527
in nonlinear phase(非线性相位)，72
role in modeling filter(模型滤波器中的作用)，439-440
of Wiener filter(维纳滤波器)，473，475-482，492
Frequency-shift keying(FSK)(频移键控)，113-114

G

Gaussian process(高斯过程)，385
Generalized function(广义函数)，16，18，421
Group delay(群延迟)，66-78
of minimum-phase system(最小相位系统)，76-78
nonconstant(非常量)，71-72
for touch-tone signal(按键信号)，72-73

H

Half-sample delay(半采样延迟)，25-26
Heart rate variability，psd estimation of(心率变异性信号的功率谱密度估计)，438-439
Herglotz's theorem(赫尔格罗茨定理)，424，442
Hidden mode of the system(系统的隐藏模式)，204，206-207，210-211，213，218

in a combination of subsystem(子系统的组合), 208-210
of CT system(连续时间系统), 206-207
Homogeneous solution(齐次解), 175
Hypothesis testing(假设检验)
binary(二进制), 353-361
binary detection with antipodal signaling(反相信号的二元检测), 535-538
in coded digital communication(编码数字通信), 350
extension of matched-filter detection(匹配滤波器检测的扩展), 522-532
likelihood ratio test(似然比检验), 356-357
(), 362
MAP decision rule in(最大后验概率判决准则), 347-350
maximum a posteriori probability decision(最大后验概率判决), 347
with minimum probability of error(最小误差概率), 345-353
minimum risk decision(最小风险判决), 361-363
with multiple measurement(多重量测), 512-514
Neyman-Pearson decision rule(纽曼-皮尔逊判决准则), 359-360
optimal decision(最佳判决), 347
probability of error in terms of miss, false alarm and detection(在漏警、虚警和检测方面的误差概率), 354-356
receiver operating characteristic(接收者操作特性), 360
signal detection in i. i. d Gaussian noise(独立同分布高斯噪声中的信号检测), 514-522
signal discrimination in i. i. d Gaussian noise(独立同分布高斯噪声中的信号鉴别), 532-535

I

I-Q constellation(I-Q 星座), 115
Ideal bandlimited interpolating converter(理想带限插值转换器), 26
Ideal bandpass filter(理想带通滤波器), 15
frequency response of(频率响应), 422
Ideal C/D converter(理想连续/离散转换器), 22
Ideal D/C converter(理想离散/连续转换器), 26
Ideal low-pass filter(理想低通滤波器), 23, 26, 102, 396
I. I. D(独立同分布), 参见 independent identically distributed process
Impulse response(冲激响应), 102, 153, 209, 344, 398, 528, 537
for all-pass filter(全通系统), 69-71
of an LTI filter(线性时不变滤波器), 105
of BIBO-stable system(有界输入有界输出的稳定系统), 18
bilateral z-transform of(双边 z 变换), 9
of a causal DT LTI state-space system(因果离散线性时不变状态空间模型), 155-157
constant phase shift and(固定相位偏移), 65
continuous-time Fourier transform(CTFT) of(连续时间傅里叶变换), 8
of CT LTI system(连续线性时不变系统), 400
discrete-time Fourier transform(DTFT) of(离散时间傅里叶变换), 9
finite(有限的), 468
$L^1(L^1)$, 21
Laplace transform of(拉普拉斯变换), 21
of LTI systems(LTI 系统), 5-6, 392, 395, 400, 427
nonlinear phase shift and(非线性相位偏移), 71
real-valued(实值), 75, 78
relation between the DT and CT(离散时间和连续时间的关系), 24
right-sided(右边的), 21
of stable DT LTI system(稳定离散线性时不变系统), 399
Incrementally linear system(增量线性系统), 5
Independence of event(事件的独立性), 281, 286-287
Independent identically distributed(i. i. d.) Process(独立同分布过程), 383, 523
signal discrimination in i. i. d. Gaussian noise(独立同分布高斯噪声中的信号鉴别), 532-535
zero-mean Gaussian noise, detecting(零均值高斯噪声中的信号检测), 514-522
Infective-free equilibrium or steady state(无感染平衡态或者稳定状态), 143, 160, 163
Input-state-output structure of ct system(连续时间系统的输入-状态-输出结构)
of composite system(组合系统), 207-208
feedback configuration(反馈配置), 209-210
hidden mode(隐藏模式), 206-209
input-output relation(输入输出关系), 202-206
loss of observability(可观测性损失), 207
loss of reachability(可达性损失), 207-208
observability, notion of(可观测性概念), 206-208
parallel configuration(平行配置), 210
reachability, notion of(可达性概念), 206-208
transfer function in(传输函数), 203-205, 207
input-state-output structure of DT system(离散时间系统的输入-状态-输出结构)

hidden mode(隐藏模式)，211
nonminimal realization(非最小化实现)，213-214
reachability and observability of(可达性和可观测性)，212-214，216-219
target state，reaching(获取目标状态)，214-216
transfer relation(转移关系)，210-211
unilateral z-transform(单边 z 变换)，210-211
Instantaneous output property(瞬时输出特性)，151-152
Instantaneous power，spectral distribution of expected(期望瞬时功率的谱分布)，422-425
Integrator-adder-gain system(积分-加法-增益系统)
CT state-space model for(连续时间状态空间模型)，144-145
of inverted pendulum for small angle(小角度的倒立摆)，150-151
Integrator(积分器)，145-146，149-150
Interference，intersymbol(码间干扰)，108-110
Internal behavior of a system(系统内部行为)，133
Interpolation(插值)
bandlimited(带限)，23，25-27
of the DT sequence(离散时间序列)，23
linear(线性)，27
Intersymbol interference(ISI)(码间干扰)，108-110
no ISI(无码间干扰)，109
Nyquist condition for no ISI(无码间干扰的奈奎斯特准则)，110
zero ISI(零码间干扰)，592
Intersymbol spacing(码间距)，104，109-110
Inverse fourier transform(傅里叶反变换)，408
Inverse laplace transform(拉普拉斯反变换)，205
Inverse system(逆系统)，169
Inverse z-transform(z 反变换)，19-20
Inverted pendulum(倒立摆)，135-137，150-151，161，164，182-183
eigenvalue and eigenvector for linearized model(线性模型的特征值和特征向量)，179-180
equilibrium in(平衡点)，161
linearized state-space models(线性状态空间模型)，164，179-180
observer-based feedback control(基于观测器的反馈控制)，265-266
ith mode frequency(第 i 个模式频率)，*See* modal frequency(参见模态频率)
ith mode of undriven system(未驱动的系统的第 i 个模式)，181

J

Johnson-Nyquist noise(约翰逊-奈奎斯特噪声)，431
Jointly distributed random variable(随机变量的联合分布)，285
Jointly wide-sense stationary(WSS)process(联合广义平稳过程)，387，394，396，398-399，407，431-432，434，464-465，467-468，472-474，492

K

Kalman filter for a state-space system(状态空间系统的卡尔曼滤波器)，245
Kalman filtering(卡尔曼滤波)，464，487
Optimal state estimates(最优状态估计)，491-492
Kirchhoff's current law(KCL)(基尔霍夫电流定律)，138
Kirchhoff's laws(基尔霍夫定律)，2
Kirchhoff's voltage law(KVL)(基尔霍夫电压定律)，138

L

Laplace transform(拉普拉斯变换)，20
correlation relation(相关关系)，399
Left half-plane(左半平面)，21，78-80，184，187，245
Left-sided signal(左边信号)，19，21
Likelihood ratio test(似然比检验)，356-357
Linear and time-invariant(LTI) state feedback design(线性时不变状态反馈设计)
closed-loop(闭环)，254-256
control effort(控制作用力)，256
Linear and time-invariant(LTI) state-space model(线性时不变状态空间模型)
continuous-time(CT) and discrete-time(DT)(连续时间和离散时间)，174-178
CT exponential solution and mode(连续时间指数解和模式)，177-179
general solution of(通解)，175
Lth-order LTI state-space equation(L 阶线性时不变状态空间方程)，237
open-loop control(开环控制)，252-253
state estimation error(状态估计误差)，239，242
undriven system，response of(无驱动的系统的响应)，177-179
vector and matrix operation(向量和矩阵操作)，175-177
zero-input response(ZIR)of(零输入响应)，175，177-190
zero-state response(ZSR)of(零状态响应)，175

Linear and time-invariant(LTI)system(线性时不变系统)，4-5，138
characterization through convolution(通过卷积表征)，6
condition to be BIBO stable(BIBO稳定系统的条件)，6
exponentials as eigenfunction of(复指数信号作为特征函数)，6-10
Fourier transform(傅里叶变换)，10-11
impulse response(冲激响应)，5-6，395，400
state-space model from LTI input-output model (基于LTI输入输出模型的状态空间模型)，153-158
Linear estimation of random process(随机过程的线性估计)，392-395
linear FIR filtering(线性FIR滤波)，394-395
linear prediction(线性预测)，392-394
LinearFIR filtering(线性FIR滤波)，394-395
Linear interpolation(线性插值)，27
Linearity(线性)，4，6，10，200，295，396，434
Linearization(线性化)，161-164
Linearized state-space model(线性化的状态空间模型)
inverted pendulum(倒立摆)，164，179-180
second-order DT nonlinear system(二阶离散时间非线性系统)，161-163
for viral propagation(病毒传播)，163
Linear minimum mean square error(LMMSE)estimation (线性最小均方误差估计)，292，295
matrix and vector of covariance(协方差矩阵和向量)，465-466
mean square error criterion for(均方误差准则)，324-325
multiple measurements(多重量测)，323-326
normal equations for(正规方程)，326，465
of one random variable from a single measurement of another(从另外一个随机变量的单次量测中完成随机变量的估计)，318-321
optimal linear estimator(最佳线性估计值)，319
orthogonality and unbiasedness condition(正交无偏条件)，320，325
prediction of a WSS process(广义平稳过程的预测)，392，469
of random variable(随机变量)
associated minimum mean square error (MMSE)(关联的最小均方误差)，466
construction of LMMSE estimatior(构建LMMSE估计值)，465-466
from a WSS process(广义平稳过程)，466-467
zero-mean error(零均值误差)，466
for a signal in additive noise(加性噪声中的信号)，321-322
for sinusoidal random process(正弦随机过程)，322-323
for two noisy measurement(两次带噪量测)，326-327
Linear periodically varying(LPV)system(线性周期时变系统)，217
Linear phase(线性相位)，64
LMMSE，参见 linear minimum mean square error (LMMSE)estimation
Low-pass filter(低通滤波器)，118
L-step observability matrix(*L*步可观测性矩阵)，217
Lumped model(集总模型)，146
Lumped system(集总系统)，134

M

magnitude(模)
of all-pass system frequency response(全通系统频率响应)，73，75，77
Fourier transform(傅里叶变换)，62-63
of frequency response(频率响应)，8，77-79
of signals of slow growth(缓慢增长信号)，12
squared(平方的)，14-15，443
of a stable system(稳定系统)，78
ZIR(零输入响应)，182，187-189，255
Magnitude-phase representation of a Fourier transform(傅里叶变换的模-相位表示)，62-65
MAP，参见 maximum *a posteriori* probability (MAP)decision
Mapping(映射)，2-3，5-8，11，283
Marginally stable system(边缘稳定系统)，187，189，484
Matched filter(匹配滤波器)，519-533
continuous-time(CT)version(连续时间情况)，528-529
extension of(扩展)，522-532
frequency response of(频率响应)，521，527
on-off and antipodal signaling, detection of(开关和反相信号的检测)，535-538
property of(特征)，521-522
scaling of(定标)，520-521
Matched filtering(匹配滤波)
continuous-time(CT)version of the detection problem(检测问题的连续时间情况)，528-529
for infinite duration and finite-energy signal(无限

持续时间和有限能量信号)，522
maximizing SNR for signal detection in white noise(白噪声中最大化信噪比的信号检测)，522-525
for Nyquist pulse design(奈奎斯特脉冲设计)，529-530
optimum decision rule(最优判决准则)，526
for signal detection in colored noise(色噪声中的信号检测)，527
thresholding of sampled output of an LTI filter(LTI 滤波器样本输出的阈值)，523
for unknown arrival time and pulse compression(未知到达时间和脉冲压缩)，530-532
Matrix exponential of CT system(连续时间系统的矩阵指数)，199-200
sampled-data model(样本-数据模型)，200-202
Maximum *a posteriori* probability(MAP)decision(最大后验概率判决)，347-350
for minimum probability of error(误差的最小概率)，362-363
for on-off signaling in uniform noise(均匀噪声中的开关信号)，348
with three hypotheses(三种假设)，349-350
Measurement noise(量测噪声)，237-238，242-246，249，252，491
Memoryless dt system(无记忆离散时间系统)，3
Memoryless system(无记忆系统)，3-4
Memory of the system(系统的记忆)，133-134
Minimal realization(最小实现)，204，235
Minimum-error-probability symbol detection(最小误差概率的符号检测)，351-353
Minimum mean square error(MMSE)(最小均方误差)，306-307，318-327，466
for bivariate Gaussian random variable(二元高斯随机变量)，311-312
of causal Wiener filter(因果维纳滤波器)，483
for discrete random variables(离散随机变量)，309-310
estimate *vs* estimator(估计与估计量)，313-314
estimator for bivariate Gaussian random variable(二元高斯随机变量的估计量)，313
of finitely correlated process(有限相关过程)，470-471
frequency-domain expression for(频域表达式)，474
of geometrically correlated process(几何相关过程)，470
orthogonality of MMSE estimator(MMSE 估计值的正交性)，317
of unconstrained discrete-time(DT)Wiener filters(无约束的离散时间维纳滤波器)，473
estimation of a signal corrupted by additive noise(加性噪声干扰信号的估计)，477-478
Minimum-phase modeling filter(最小相位建模滤波器)，485-487
Minimum-phase spectral factorization(最小相位谱因式)，482
Minimum-phase system(最小相位系统)，76
causal, stable system as cascade of(级联的因果稳定系统)，77
group delay of(群延迟)，76-78
Minimum-probability-of-error hypothesis testing(最小误差概率的假设检验)，345-353，522
for symbol detection(符号检测)，351-353
using MAP rule(利用最大后验概率准则)，523，533
Minimum risk(最小风险)，361
miss(漏警)，354-356
conditional probability of(条件概率)，519
error probability(误差概率)，355
MMSE，参见 minimum mean square error (MMSE)
Modal coordinate(模态坐标)
constraint on(约束条件)，191-192
driven CT system(被驱动的连续时间系统)，191-194
driven DT system(被驱动的离散时间系统)，194
as a function of time(作为时间函数)，192
general modal decomposition(通用模态分解)，193
modal matrix(模态矩阵)，191
sampled value of(采样值)，194-195
similarity transformation and diagonalization(相似变换和对角化)，196-200
in state evolution equation(状态演化方程)，192
in term of eigenvector(依据特征向量)，192，194，196
Modal frequency(模态频率)，181
Modal solution(模态解)，181-182，184
Mode(模式)，288，308
asymptotically stable(渐进稳定)，249
complex pair(复数对)
in CT(连续时间)，183-184
in DT(离散时间)，186-187
decay(衰变)，249
hidden(隐藏)，204，206-211，213，218
*i*th, of undriven system(未驱动的系统的第 i 个模式)，181
observable and unobservable(可观测的和不可观测的)，206，214-215，250，260
reachable and unreachable(可达的和不可达的)，

206, 218, 256-258
Modeling filter(模型滤波器), 439
Model(模型), 2-3
mapping *vs* behavioral form(映射与行为形式), 2-3
Moment of a random variable(随机变量的矩), 288
Multivariate Gaussian(多元高斯), 324, 526

N

Narrowband input signal(窄带输入信号), 66-68
Newton's law, rotational form of(牛顿定律的旋转形式), 135
Neyman-Pearson decision rule(纽曼-皮尔逊判决准则), 359-360
Neyman-Pearson test(纽曼-皮尔逊检验), 359
Noise(噪声), 281, 383, 39), 511-512
Additive(加性的), 参见 additive noise
binary pulse-amplitude modulation in(二进制脉冲幅度调制), 343-345
channel(信道), 105, 113, 351
colored, detecting in(有色噪声的检测), 525-528
CT white(连续时间白噪声), 396, 492, 528
Gaussian(高斯)
detection and ROC for signal in(信号的检测和接收者操作特性), 359-361
independent, identically distributed(i. i. d.)(独立同分布), 514-522, 530
signal discrimination in i. i. d(独立同分布信号的鉴别), 532-538
immunity(免疫), 117
trade-off between error decay and(与误差衰变之间的折中), 244-245
Johnson-Nyquist(约翰逊-奈奎斯特), 431
MAP rule for on-off signaling in uniform(MAP准则应用于均匀分布噪声中的开关信号), 348
measurement(量测), 237-238, 242-246, 249, 252, 491
modeling of(建模), 245
overall closed-loop system, impact on(对整个闭环系统的影响), 264
state error, impact on(对状态误差的影响), 245
observer error representation of(观测器误差的表示), 244-251
unit-intensity white(单位强度的白噪声), 440
white(白噪声), 492, 530
maximizing SNR for signal detection in(最大化信噪比的信号检测), 522-525
zero intersymbol interference(ISI) in noise-free case(在无噪声情况下的零码间干扰), 529
Nonideal D/C converter(非理想离散/连续转换器), 26-28
Nonlinear phase(非线性相位), 66-73
effect on touch-tone signal(对按键信号的影响), 72-73
time-domain effect of(时域的影响), 68
Nonlinear system(非线性系统), 148, 220
Nonlinear time-invariant state-space model(非线性时不变状态空间模型),
equilibrium in(平衡点), 158-161
Normal equation(正规方程), 326, 465
Nullspace(零空间), 217
Nyquist frequency(奈奎斯特频率), 35
Nyquist pulse(奈奎斯特脉冲), 110-113
design(设计), 529-530
smoother frequency-domain transition(平滑频域过渡), 111-112
for zero intersymbol interference(ISI)(零码间干扰), 529-530
Nyquist rate(奈奎斯特率), 23-24, 104, 444
Nyquist sampling theorem(奈奎斯特采样定理), 27, 110

O

Observer design(观测器设计), 243-251
for detectable system(可检测系统), 244
error dynamics(误差动态), 243-244
observer error dynamic(观测器误差动力学), 243-244, 250-251
observer gain(观测器增益), 242
plant disturbance, noises and error dynamic(场景干扰、噪声和误差动态), 244-245
for ship heading error(船航向误差), 248-249
for undamped suspended pendulum(无阻尼悬摆), 245-247
Observability(可观测性), 210-211, 255, 487
of composite system(组合系统), 207-208
of CT systems(连续时间系统), 207-208
of a DT system(离散时间系统), 212-213
with nondistinct eigenvalue(非相异特征值), 218-219
in a series combination of subsystems(子系统的级联组合), 209
Observability matrix(可观测性矩阵), 216-217
Observable system(可观测系统), 206
Observer-based compensator(基于观测器的补偿器), 262-264
Observer-based feedback control(基于观测器的反

馈控制)，262-264
for inverted pendulum(倒立摆)，265-266
Odd function(奇函数)，65-66
One-sided$z$-transform(单边 z 变换)，18
One-stepWiener filter for prediction(单步维纳滤波器预测)，487
On-off signaling(开关信号)，104，345，535
binary detection with(二元检测)，536
detection with matched filter(运用匹配滤波器检测)，535-538
Open-loop control(开环控制)，252-253
Open-loop system(开环系统)，252，255-256，259-260
Order of state-space description(状态空间描述的阶数)，134
Orthogonality(正交性)，472-473
of LMMSE estimatior(LMMSE 估计值)，325
of MMSE estimator(MMSE 估计值)，317
Outcome(结果)，279
Overshoot(过冲)，245

P

Paley-Wiener condition(佩利-维纳条件)，482
PAM，参见 pulse amplitude modulation(PAM)
Parallel interconnection(并联连接)，157
Parseval's identity(帕斯瓦尔恒等式)，13-15
Parseval's theorem(帕斯瓦尔定理)，528
Partial fraction expansion(部分分式展开)，inverse z-transform(z 反变换)，19-20
Passband pulse-amplitude modulation(通带脉冲幅度调制)，113-118
binary PSK(BPSK)(二进制相移键控)，114-115
frequency-shift keying(FSK)(频移键控)，114
I-Q constellation(I-Q 星座图)，115
Phase-shift keying(PSK)(相移键控)，114-115
QPSK(quadrature phase-shift keying，正交相移键控)，115
Quadrature-amplitude modulation(QAM，正交幅度调制)，116-118
Pendulum(单摆)
conventional model(常规模型)，135
hanging(悬挂)，180，184
inverted(倒立)，135-137，150-151，161，164，182-183
linear model of(线性模型)，137
observer-based feedback control(基于观测器的反馈控制)，265-266
real-time simulation(实时仿真)，240-241
state-space description of(状态空间描述)，136
time-invariant description of(时不变描述)，136-137
variable(变量)，136
Period，sampling(采样周期)，56，64
Periodic convolution(周期卷积)，480
Periodic impulse train(周期冲激串)，110
Periodic sampling(周期采样)，105
Periodogram(周期图)，433，435，445
of a ±1 Bernoulli process(±1 伯努利过程)，436-437
of finite-duration signal(时限信号)，433
Welch's method(韦尔奇法或 Welch 法)，435，439
Phase(相位)，参见 Fourier transform phase
of a continuous-time(CT)all-pass system(连续时间全通系统)，75
delay of the system(系统延迟)，66，69
for touch-tone signal(按键信号)，72-73
linear(线性)，64
nonlinear(非线性)，69-73
unwraped(展开的)，63-64，66-67，69
Phase plane(相平面)，182-183
Phase-shift keying(PSK)(相移键控)，113-115
Phase shift(相移)，64-65，113-115
Plant(场景)，237
design of an observer for(观测器的设计)，243-251
Lth-order LTI state-space equations(L 阶 LTI 状态空间方程)，237-238
model for(模型)，237-238
observer-based feedback control(基于观测器的反馈控制)，262-266
real-time simulation(实时仿真)，239-241
representation of a DT LTI(离散时间 LTI 系统的表示)，238
state feedback control(状态反馈控制)，252-262
state observer or state estimator for the plant(场景的状态观测器或者状态估计量)，241-243
Poisson times(泊松时刻)，390
Polar signaling(极性信号)，104
Pole-zero cancellation(零极点抵消)，204
Pole-zero plot(零极点图)，17，75-76
Positive predictive value(阳性预测值)，356
Power spectral density(PSD)(功率谱密度)，400，421
of an independent identically distributed(i. i. d))process(广义同分布过程)，428-429
application of(应用)，437-444
of a ±1 Bernoulli process(±1 伯努利过程)，436-437

DTFT of(离散时间傅里叶变换)，429
of a DT WSS process(离散广义平稳过程)，439-442
of exponentially correlated process(指数相关过程)，425-426
heart rate variability，PSD estimation of(心率变异性信号的功率谱密度估计)，438-439
modeling filter(模型滤波器)，439-442
of one-step correlated process(单步相关过程)，428
of sinusoidal random process(正弦随机过程)，424-425
spectral distribution of expected instantaneous power(期望瞬时功率的谱分布)，422-425
Predator-prey model(捕食模型)，172
Prediction(预测)
FIR(有限长冲激响应)，469-472，484
linear(线性的)，392-394
noncausal(非因果)，475
one-step Wiener filter for(单步维纳滤波器)，487
role of modeling filter in(模型滤波器的作用)，485-487
of a WSS CT process(广义平稳连续时间过程)，493
Prevalence(发生率)，356
Price of causality(因果性的代价)，510
Probability(概率)
conditional(条件)，280-281
of declaring a target，radar context(雷达背景下发现目标)，354
distribution(分布)，283-285
event algebra(事件代数)，279-280
independence of event(事件的独立性)，281，286-287
measure(量测)，280
mutually independent events(相互独立事件)，281
sample space(样本空间)，279
Probability density function(PDF)(概率密度函数)，284，286，307，382
Bivariate(二元)，290
Morgenstern's(摩根斯坦)，338
Gaussian(高斯)，289
general(通用的)，288
particular(特别的)，289
strict-sense stationary(SSS，严格平稳)，386
uniform(均匀)，289
Probability mass function(PMF，概率质量分布函数)，284-285
Probability of error(误差概率)
with bipolar or antipodal signaling(双相或反相信号)，535
hypothesis testing in(假设检验)，345-353
MAP decision rule for(最大后验概率判决准则)，362-363
minimum conditional(最小条件概率)，346-347
in terms of miss，false alarm and detection(在漏警、虚警和检测方面的)，354-356
Proximally correlated process(邻近相关过程)，470，参见 one-step correlated process
PSD，参见 power spectral density(PSD) of the process
Pulse-amplitude detection on noise(噪声的脉冲幅度检测)，343
Pulse-amplitude modulation(PAM)(脉冲幅度调制)，102
baseband(基带)，103-110
binary(二进制)，343-345
determination of symbol rate in(符号率的确定)，107-108
intersymbol interference(ISI)(码间干扰)，108-110
no-ISI property of(无码间干扰特性)，109-110
numerical simulation of(数值仿真)，535-538
passband(通带)，113-118
Pulse compression(脉冲压缩)，531
Pulse repetition interval(脉冲重复间隔)，26，104

Q

Q(·)function(*Q*函数)，518
Quadrature-amplitude modulation(QAM)(正交幅度调制)，116-118
constellation diagrams(星座图)，116-117
demodulation scheme for(解调方案)，118

R

Radius of convergence(收敛半径)，18
Raised cosine(升余弦)，112
Random noise(随机噪声)，314
Random oscillator(随机振荡器)，381，387-388
Random process(随机过程)，2，237，306
bandlimited(带限)，444
battery，probabilistic experiment with(电池的概率试验)，383-384
coin toss，probabilistic experiment with(抛硬币的概率试验)，384
CT WSS(连续时间广义平稳)，444
definition and example of(定义和实例)，392-395
ergodicity of(各态历经)，391-392
first- and second-moment characterization of(一阶

矩和二阶矩特征)，385-386
linear estimation of(线性估计)，392-395
sinusoidal(正弦)，322-323
stationary(平稳的)，245
zero-mean(零均值)，238
Random signal(随机信号)，279，322-323，380
Random telegraph wave(随机电报波形)，390-391
Random variable(随机变量)，283
centered and normalized(中心化和归一化)，292
conditional expectation of(条件期望)，289
continuous(连续)，307-312
correlation or second cross-moment(相关或二阶交叉矩)，291
deterministic linear function of(确定性线性函数)，293
expectation of a function of(函数的期望值)，290
expected value of a sum of(和的期望)，288
Gaussian density for(高斯密度)，288，293
jointly distributed(联合分布)，285-286
moment of a(矩)，288
uniform(均匀)，288
variance of(方差)，291
variance or centered second moment of(方差或二阶中心矩)，288
as vector(向量)，294-296
Randomized decision rule(随机判决准则)，376
Range(of a matrix)(矩阵的范围)，177
of L-step reachability matrix(L 步可达矩阵)，216
Rank(of a matrix)(矩阵的秩)，177
Rational z-transform(有理的 z 变换)，17
Reachability(可达性)，210-211，214，255，487
of composite system(组合系统)，207-208
of CT system(连续时间系统)，206-207
of a DT system(离散时间系统)，212-213
with nondistinct eigenvalue(非奇异特征值)，218-219
in a series combination of subsystem(子系统的级联组合)，209
state feedback and(状态反馈)，260
Reachability matrix(可达矩阵)，216-217
L-step(L 步)，217
Reachable system(可达系统)，206
Realization(实现)，381，391
Real-time simulation of plant behavior(场景行为的实时仿真)，239-241
behavior of state error vector(状态误差向量的性能)，239
in CT(连续时间)，240
state error equation and output error(状态误差方程和输出误差)，240
of a suspended pendulum(悬摆的)，240-241
Receiver operating characteristic(ROC)(接收者操作特性)，359
for signal in Gaussian noise(高斯噪声中的信号)，359-361
Rectangular window(矩形窗)，435，439
Region of convergence(ROC)(收敛域)，7-9，17-18
boundary of(界限)，18-20
for a left-sided signal(左边信号)，19-20
for a right-sided signal(右边信号)，19-20
signal properties(信号属性)，18-19
Reproductive ratio(再生率)，143
Resampling(重采样)，108
Resistor-capacitor circuit(电阻-电容电路)，2
Resistor-inductor-capacitor(RLC) circuit(电阻-电感-电容电路)，137-138
constraints on variable(变量的约束条件)，138
input，output，and state variables(输入、输出和状态变量)，139
input-output second-order LTI differential equation(输入-输出二阶 LTI 微分方程)，140
state-space description for(状态空间描述)，139-140
transfer function from input to output(从输入到输出的转移函数)，140
voltage source，defined(定义的电压源)，138
Riccati equation(黎卡提方程)，492
Right half-plane(右半平面)，21，77-79，202
Right-sided signal(右边信号)，19，21
Roll-off parameter(滚降参数)，112

S

Sample space(样本空间)，279
Sampled-data model(样本-数据模型)，194
Sampling(采样)，22，111，113，386，521-523，526，528，530，536-537，539
bandlimited random precess(带限随机过程)，444
a CT signal(连续时间信号)，25
bandlimited(带限)，64
Nyquist rate and(奈奎斯特率)，23-24
Nyquist sampling theorem(奈奎斯特采样定理)，27，110
in PAM scheme(脉冲幅度调制方案)，104-105
in PSD estimation(功率谱密度估计)，439
a random process(随机过程)，386
Sampling frequency(采样频率)，457

Sampling interval(采样间隔)，22，48，201，248
Sampling period(采样周期)，106
Sampling theorem(采样定理)，27，110，444
Scaling property(尺度变换性质)，106
Sensitivity(灵敏度)，356
Ship heading error dynamic(船航向误差动态)，248-249，260-262
Signal detection(信号检测)，395，参见 matched filtering solution
hypothesis testing with multiple measurement(多次量测的假设检验)，512-514
minimum-error-probability decisions(最小误差概率判决)，512-514
optimum decision rule for(最优判决准则)，512-513
in identically distributed(i. i. d.)zero-mean(广义同分布零均值)
Gaussian noise(高斯噪声)，514-522
characterizing performance(表征性能)，517-519
hypothesis test for(假设检验)，517-518
matched filtering(匹配滤波)，519-522
optimal solution for(最优解)，515-517
probability of error over all possible outcome(所有可能结果的误差概率)，519
signal discrimination in(信号鉴别)，532-538
probability，role of(概率的作用)，281
Signal discrimination in i. i. d. Zero-mean Gaussian noise(独立同分布零均值高斯噪声中的信号识别)，532-538
binary(二进制)，533-535
Cauchy-Schwarz inequality in(柯西-施瓦茨不等式)，534
detecting known signal(检测已知信号)，534
probability of error in(误差概率)，534-535
minimum error probability(最小误差概率)，533
using matched filter(运用匹配滤波器)，533
on-off and antipodal PAM(开关和反相脉冲幅度调制信号)，535-538
Signal estimation(信号估计)，395
of CT signal(连续时间信号)，492-493
Kalman filtering(卡尔曼滤波)，464，487
optimal estimate(最优估计)，491-492
LMMSE estimation for random variable(随机变量的LMMSE估计)，465-467
associated minimum mean square error (MMSE)(与最小均方误差相关的)，466
construction of LMMSE estimator(构建LMMSE估计值)，465-466
matrix and vector of covariance(矩阵和向量的协方差)，465-466
from a WSS process(来自广义平稳过程)，466-467
zero-mean error(零均值误差)，466
Wiener filtering(维纳滤波)
causal DT(因果离散时间系统)，480-487
FIR(有限长单位冲激响应)，467-472
observer implementation and(观测器实现)，489-491
of a signal corrupted by additive noise(加性噪声干扰的信号)，487-489
unconstrained DT(无约束的离散时间)，472-480
Signal in additive noise(加性噪声中的信号)
LMMSE estimator for(LMMSE估计值)，321-322
MMSE estimator for(MMSE估计值)，314-317
Wiener filter for(维纳滤波器)，476-477，487-489
Signal processing(信号处理)，76，153，306，343，380，392
biomedical(生物医学)，437
pulse amplitude modulation(PAM)，role in(幅度脉冲调制的作用)，102，113
Signal(信号)，1-2，参见 continuous-time(CT)signal；discrete-time(DT)signal
of slow growth(缓慢增长)，12-14
Signal-to noise ratio(SNR)(信噪比)，374，512，522
Similarity transformation(相似变换)，196-200
CT system(连续时间系统)，196-197
DT system(离散时间系统)，197
input-output relationships of(输入-输出关系)，197
to modal coordinate(模态坐标)，197-198
Sinc function(sinc 函数)，62-63，110，424，435-436
Singularity function(奇异函数)，12
Sinusoidal random process(正弦随机过程)
LMMSE estimator for(LMMSE估计值)，322-323
PSD of(功率谱密度)，424-425
SIR model(SIR模型)，141
SNR，参见 signal-to-noise ratio(SNR)
Specificity(特异性)，356
Spectral abscissa(谱横坐标)，187
Spectral distribution(谱分布)
conditions for ergodicity of mean(均值各态历经的条件)，427-428
of expected instantaneous power(期望瞬时功

率），422-425
fluctuation spectral density（波动谱密度），426-428
Spectral estimation（谱估计），435-436
Spectral factorization（谱因式），78-80，482
Squared error（平方误差），15-16
Squared-sinc transform of triangular pulse（三角脉冲的平方 sinc 变换形式），435-436
Stable（稳定），参见 bounded-input，bounded-output（BIBO）stable system
Stabilizability（稳定化），255
Standard deviation（标准差），288
State error model of the real-time simulator（实时仿真器的状态误差模型），239
State error vector，behavior of（状态误差向量的性能），239
State evolution property（状态演化特性），151
State feedback control（状态反馈控制），252-262
closed-loop transfer function（闭环传输函数），259-260
for a pendulum with torque，control（对单摆转矩的控制），257
steering dynamics of a ship（船的转向特性），260-262
State observer or state estimator for the plant（场景的状态观测器或者状态估计量），241-243
from an input-output difference equation（输入-输出差分方程），154-155
approximation of state trajectory at a discrete set of times（在一组离散时间点上的状态近似轨迹），151-152
for a causal system（因果系统），133-134
CT case（连续时间情况），149-150
defining characteristics of（定义的特征），151-153
delay-adder-gain systems（延迟-加法-增益系统），144-145
DT case（离散时间情况），146-149
electrical circuits（电路），137-140
equilibria and linearization of nonlinear（非线性系统的平衡状态和线性化），158-164
fourth-order（4 阶），154
instantaneous output property（瞬时输出特性），152
inverted pendulum（倒立摆），135-137
linearization of（线性化），161-164
from LTI input-output models（LTI 输入-输出模型），153-158
realization（实现），168
state evolution property（状态演化特性），151-152
for unit-sample or impulse response（单位采样或冲激响应），155-158
viral propagation（病毒传播），141-143
Stationarity（平稳）
strict-sense（SSS）（严格平稳），386
wide-sense（WSS）（广义平稳），386-387
Stationary random process（平稳随机过程），245
Steady-state Kalman filter（稳态卡尔曼滤波器），245
Stochastic process（随机过程），279，380，449，参见 random processes
Strict-sense stationary（SSS）（严格平稳），386
Superposition property（叠加性质），147
Symbol rate（符号率），104
Symmetry（对称性），280-281，295，388-389，518
System function（系统函数），21，400，444
System identification（系统标识），395
System（系统），2，参见 linear and time-invariant（LTI）system
causal（因果的），4-6，19，21
continuous-time（CT）all-pass（连续时间全通系统），73-75
discrete-time（DT）all-pass（离散时间全通系统），74-76
property（性质），3-5
representation as an input-output mapping（表示为输入到输出的映射），3

T

Taylor series approximation（泰勒级数近似），67
Time-domain effects of frequency response（频率响应的时域效应），63-64，69
Time-frequency duality（时频对偶性），111
Time invariance（时不变），4，6，147-148
Time-invariant system（是不变系统），4，参见 linear and time-invariant（LTI）system
Time-reversed signal（时间反转信号），15
Time-shifted version of signal（时移的信号），4
Time window（时间窗），383
Total squared error（总的平方误差），15-16
Transfer function（传输函数），7，21，73-78，133，153，218-219，233
of a causal DT LTI system（因果 DT LTI 系统），156-157
of causal Wiener filter（因果维纳滤波器），483-484，487，489
closed-loop（闭环），259-260，264
coefficient matrices of（系数矩阵），140，145
exactly proper（完全适合），204

for feedback configuration(反馈配置), 209
input-output(输入-输出), 202-213
of minimum-phase filter(最小相位滤波器), 486
of modeling filter(建模滤波器), 442, 450, 483
observer(观测器), 490-491
of one-step Wiener prediction filter(单步维纳预测滤波器), 487
for parallel configuration(并行配置), 210
of stable LTI system or sensor(稳定 LTI 系统或感应器), 77-78, 478
strictly proper(严格适合), 204
Transposition(转置), 146, 255
Triangular function(三角函数), 424
Two-sided signal(双边信号), 111

U

unbiased estimator(无偏估计量), 317
unconstrained discrete-time(DT) Wiener filters(无约束的离散维纳滤波器), 472-480
coherence function(相干函数), 474-475
construction of an LMMSE estimator(构建LMMSE 估计值), 472
deconvolution or deblurring by(反卷积或者去模糊), 478-479
demultiplication by(去乘性因子), 479-480
error fluctuation spectral density(FSD)(波动谱密度误差), 474
estimation of a signal corrupted by additive noise using(加性噪声干扰信号的估计), 476-478
in frequency domain representation(频域表示), 474
minimum mean square error(MMSE)(最小均方误差), 474, 483-484
noncausal prediction(非因果预测), 475
orthogonality condition(正交条件), 472-473
response of unconstrained optimal LMMSE(无约束的最优 LMMSE 响应), 473
unbiasedness condition(无偏条件), 472
unconstrained estimation of a singal corrupted by additive noise(加性噪声干扰信号的无约束估计), 476-478
Undriven system(未驱动的系统)
CT system(连续时间系统), 177-185
DT system(离散时间系统), 185-187
ith mode of(第 i 个模式), 181
linear and time-invariant(LTI)(线性时不变), 177-179
modal solution of(模态解), 177
Unipolar signaling(单极信号), 104
Unit circle(单位圆), 9, 16-19, 76, 80, 188
Unit delay(单位延迟), 144
Unit impulse response or unit sample response(单位冲激响应或者单位采样响应), 5
Unobservable subspace(不可观测的子空间), 216-217
Unobservable system(不可观测的系统), 206
Unreachable system(不可达系统), 206
Unwrapped phase of frequency response(展开相位的频率响应), 63-64, 66-67, 69, 71
nonlinear(非线性), 67

V

Variance(方差), 287
Vector-space interpretation of correlation property(相关性的向量空间描述), 294-296
correlation coefficient(相关系数), 295-296
in Euclidean space(欧式空间), 295
lengths of vectors(向量长度), 295
standard properties(标准属性), 295
Viral propagation model(病毒传播模型), 141-143
asymptotic stability of linearized(线性化系统的渐进稳定性), 189-190
basic reproductive ratio(基本再生率), 143
component subpopulations(亚群成分), 141
endemic steady state(传染病稳定状态), 143
equilibria in(平衡状态), 159-160
infective-free steady state(无感染稳定状态), 143
linearized model for(线性化模型), 163
state-variable trajectory(可变状态轨迹), 142-143
time-invariant equation(时不变方程), 141-142

W

Welch's method(Welch 法), 435, 439
Whitening filter(白化滤波器), 443-444
White noise(白噪声), 396, 440, 489, 492
White process(白过程), 429-431, 439-441, 443, 452, 456, 464, 486-487, 489, 491, 500, 523, 525
Wide-sense stationary(WSS) process(广义平稳过程), 386-387
autocorrelation function of(自相关函数), 385-388, 395-396, 398-400, 424
autocovariance function of(自协方差函数), 385-389, 391, 395
colored(色过程), 429
with finite expected instantaneous power, spectral distribution of(有限的期望瞬时功率的谱分布), 422
jointly WSS processes(联合广义平稳过程), 387
LMMSE estimation of random variables from(随

机变量的 LMMSE 估计)，466-467
LTI filtering of(LTI 滤波)，395-400
zero-mean(零均值)，396-397
zero-mean CT-WSS noise process(零均值连续时间广义平稳噪声过程)，528
Wiener filter(维纳滤波器)，480-487
autocovariance function(自协方差函数)，481-482
causal(因果的)，487-489
corresponding MMSE(相应的 MMSE)，483
FIR(有限长冲激响应)，467-471
frequency response of(频率响应)，473，475-482，492
LMMSE estimation(LMMSE 估计)，486
minimum-phase modeling filter(最小相位模型滤波器)，485-487
MMSE estimation(MMSE 估计)，486-487
observer implementation of(观测器实现)，489-491
predictor(预测器)，483-487
of a signal corrupted by additive noise(加性噪声干扰的信号)，487-489
spectral factor(谱因子)，488
stability and causality conditions(因果稳定的条件)，482
unconstrained(无约束的)，472-480
Windowing(加窗)，433

Y

Young's inequality(杨氏不等式)，60
Yule-Walker equations(Yule-Walker 方程)，326，469

Z

Zero-input response(ZIR) of LTI state-space model (LTI 状态空间模型的零输入响应)，175，177-190
asymptotic stability(渐进稳定)，187-190
complex mode pair in CT(连续时间的复模式对)，183-184
complex mode pair in DT(离散时间的复模式对)，186-187
entries of nth power(项元素的 n 次方)，185-186
general ZIR solution in DT case(离散时间情况下的通用 ZIR 解)，186
of linearized inverted pendulum model(线性倒立摆模型)，182-183
of linearized pendulum model in normal hanging position(悬挂正常位置的线性化单摆模型)，184-185
modal coordinate value(模态坐标值)，191，193
modal decomposition of DT ZIR(离散时间 ZIR 的模态分解)，186
modal representation of CT system(连续时间系统的模态表示)，181-182
oscillatory contribution to(振荡贡献)，187
similarity transformation(相似变换)，197
undriven CT system(未驱动的连续时间系统)，177-185
undriven DT system(未驱动的离散时间系统)，185-187
Zero intersymbol interference(ISI)(零码间干扰)，529，参见 intersymbol interference(ISI)
Zero-mean random process(零均值随机过程)，238
Zero-order hold(ZOH) pulse(零阶保持脉冲)，27-28
z-transform pair(z 变换对)，20
z-transform(z 变换)，9，14，17，399-400，482-483
bilateral(双边)，9，16-20，211
inverse(逆)，19-20
one-sided(单边的)，18
unilateral(单边)，210-211